Rozdział 4. Łańcuchy Markowa z czasem ciągłym, procesy urodzin i śmierci

Definicja 4.1. Proces stochastyczny $\{X(t), t \geq 0\}$ o wartościach w $E = \{0, 1, \dots\}$ nazywamy (jednorodnym) łańcuchem Markowa z czasem ciągłym, jeśli dla każdego $s, t \geq 0$ oraz $i, j, x(u) \in E$, $0 \leq u < s$, zachodzi

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i,\ X(u) = x(u),\ 0 \leq u < s) = P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) \overset{\text{ozn}}{=} P_{ij}(t). \quad (4.1)$$

Równania Chapmana-Kołmogorowa dla Ł.M. z czasem ciągłym:

Dla dowolnego $s, t \geq 0$ oraz $i, j \in E$ zachodzi

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t) \cdot P_{kj}(s). \quad (4.2)$$

d-d analogiczny do tego dla Ł.M. opuszczamy

Wracając do def. 4.1 zauważmy, że jeśli przez T_i oznaczymy czas przebywania procesu w stanie $i \in E$ przed przejściem do innego stanu, to z (4.1) wynika, że

$$P(T_i > s+t \mid T_i > s) = P(T_i > t),$$

co, jak wiemy, oznacza, że T_i ma rozkład wykładniczy, $i \in E$.

Innymi słowy, Ł.M. z czasem ciągłym to proces stoch., który zmienia stany jak Ł.M., tzn. jeśli opuszcza stan „i", to wchodzi do stanu „j" z prawdop. P_{ij}: $P_{ii} = 0$ oraz $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1$, ale przebywa w każdym z „odwiedzanych" stanów przez czas $T_i \sim \mathcal{E}(v_i)$ niezależny od następnego stanu procesu. Gdyby bowiem przyszły stan procesu zależał od T_i, to informacja o tym, jak długo proces przebywa już w stanie „i" byłaby istotna dla określenia następnego jego stanu. Warunek (4.1), czyli własność Markowa, temu przeczy.

Definicja 4.2. Rozważmy system, którego stan $X(t)$ w chwili t określa liczba znajdujących się w nim jednostek. Jeśli w systemie znajduje się n jednostek, to

i) czas B_n do przybycia następnej jest wykładniczy: $B_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$,
ii) -"- D_n do opuszczenia systemu przez jednostkę jest wykładniczy: $D_n \sim \mathcal{E}(\mu_n)$,
iii) dla każdego $n \in E$, czasy D_n i B_n są niezależne.

Proces $\{X(t), t \geq 0\}$ nazywamy procesem urodzin i śmierci, a ciągi parametrów $\{\lambda_n\}$ i $\{\mu_n\}$ - intensywnościami urodzin i śmierci, odpowiednio.

Zauważmy, że pr. urodzin i śmierci jest Ł.M. z czasem ciągłym z przestrzenią stanów $E = \{0, 1, \dots\}$ oraz parametrami:

$$v_0 = \lambda_0, \quad v_i = \lambda_i + \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots; \tag{4.3}$$

$$P_{01} = 1, \quad P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \tag{4.4}$$

Powyższe równości wynikają bezpośrednio z własności rozkładu wykładniczego: $v_0 = \text{intens.}\, B_0 = \lambda_0$,

$$v_i = \text{intens.}\left(\min(B_i, D_i)\right) = \lambda_i + \mu_i, \ i = 1, 2, \dots$$

$$P_{i,i+1} = P(B_i < D_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \ i = 1, 2, \dots$$

$$P_{i,i-1} = P(D_i < B_i) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Przykład 4.1. Proces Poissona jest pr. urodzin i śmierci z intensywnościami: $\lambda_n = \lambda, \ \mu_n = 0, \ n = 0, 1, \dots$

Czas $B_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, to czas T_i między kolejnymi „urodzinami" tzw. zgłoszeniami (wejściami do systemu).

Przykład 4.2 Model liniowego wzrostu z imigracją (omówiony na spotkaniu, także Ross).

Przykład 4.3. System kolejkowy M/M/1.

Przypuśćmy, że do stacji z jednym stanowiskiem obsługi przybywają klienci zgodnie z pr. Poissona o intensywności λ. Jeśli stanowisko obsługi jest wolne, klient jest obsługiwany przez czas $S_i \sim \mathcal{E}(\mu)$. Jeśli nie, to ustawia się w kolejce i czeka, aż stanowisko obsługi będzie wolne. Zakłada się, że zm. los. $S_1, S_2, \ldots$, są niezależne.

Jeśli $X(t)$ oznacza liczbę klientów w systemie w chwili t, to $\{X(t), t \geq 0\}$ jest pr. urodzin i śmierci z inten.

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, \ldots$$
$$\mu_n = \mu,$$

Przykład 4.4. System kolejkowy M/M/s jest uogólnieniem systemu M/M/1 na przypadek s stanowisk obsługi, z których każde pracuje z tą samą intensywnością μ (przez czas wykładniczy). Przychodzący klient albo obsługiwany jest od razu, albo czeka w kolejce na pierwsze wolne stanowisko obsługi. Zatem parametry tego procesu urodzin i śmierci to

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s \\ s\mu, & n > s \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Rozważmy teraz proces urodzin i śmierci z inten. $\{\lambda_n\}$ i $\{\mu_n\}$, odpowiednio. Niech $\mu_0 = 0$ i niech X_i oznacza czas, jaki potrzebuje proces, aby ze stanu „i" dostać się do stanu „i+1", $i=0,1,\ldots$.

Wyznaczymy wzór rekurencyjny na $E(X_i)$, $i=0,1,\ldots$

Dla $i=0$ z definicji procesu wiemy, że $E(X_0)=E(T_0)=\frac{1}{\lambda_0}$.

Dla $i=1,2,\ldots$ wprowadźmy zm. losową I_i następująco:

$$I_i=\begin{cases}1, & \text{jeśli pierwsze przejście z „i" następuje do „i+1"}\\ 0, & \text{— " — — " — — " — — " — „i-1".}\end{cases}$$

Wtedy $E(X_i\mid I_i=1)=\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}$,

ponieważ czas do pierwszej zmiany jest wykładniczy z parametrem $\lambda_i+\mu_i$ i jeśli ta zmiana polega na pojawieniu się nowego osobnika, to proces znajdzie się w stanie „i+1".

Natomiast $E(X_i\mid I_i=0)=\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+E(X_{i-1})+E(X_i)$,

ponieważ, jeśli zmiana polega na „śmierci" jednostki, to proces przechodzi w stan „i-1" i aby znaleźć się w stanie „i+1" potrzebuje dodatkowego czasu wynoszącego średnio $E(X_{i-1})+E(X_i)$.

Zatem na mocy (4.4) mamy

$$E(X_i)=E(X_i\mid I_i=1)\cdot P(I_i=1)+E(X_i\mid I_i=0)\cdot P(I_i=0)=$$

$$\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}\cdot\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}+\left(\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+E(X_{i-1})+E(X_i)\right)\cdot\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}=$$

$$\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\left(E(X_{i-1})+E(X_i)\right),\quad i=1,2,\ldots$$

Stąd $$E(X_i)=\frac{\lambda_i+\mu_i}{\lambda_i}\left(\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}E(X_{i-1})\right).$$

Ostatecznie

$$E(X_0)=\frac{1}{\lambda_0},\quad E(X_i)=\frac{1}{\lambda_i}+\frac{\mu_i}{\lambda_i}E(X_{i-1}),\quad i=1,2,\ldots \tag{4.5}$$

Przykład 4.5. Dla procesu urodzin i śmierci ze stałymi intensywnościami: $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$, $n = 1, 2, \dots$, $\mu_0 = 0$ otrzymujemy

$$E(X_i) = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i+1}}{\lambda - \mu}, & \text{jeśli } \mu \neq \lambda \\ \dfrac{i+1}{\lambda}, & \text{jeśli } \mu = \lambda. \end{cases}$$

Rozważmy teraz czysty proces urodzin, tzn. taki, że $\mu_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$, i wyznaczmy dla niego funkcje prawdopodobieństw przejść:

$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j \mid X(s) = i)$, $t, s \geq 0$, $i, j \in E$.

W tym celu skorzystamy z następującego lematu:

Lemat 4.3. Dla niezależnych zm. losowych $T_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i > t\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_i}. \quad (4.6)$$

d-d (Ross, str. 309-10)

Twierdzenie 4.4. Dla czystego procesu urodzin o intensywnościach $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$ zachodzi

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=i}^{j} e^{-\lambda_k t} \prod_{\substack{r=i \\ r \neq k}}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k} - \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{\substack{r=i \\ r \neq k}}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}, \quad i < j \quad (4.7)$$

$$P_{ii}(t) = P(T_i > t) = e^{-\lambda_i t}$$

d-d. Zauważmy, że pod warunkiem, że $X(0) = i$, dla $j > i$ mamy $X(t) < j \iff T_i + T_{i+1} + \dots + T_{j-1} > t$, ponieważ jeśli przez czas t proces „nie zdążył" dotrzeć do stanu „j", to znaczy, że w stanie „i" oraz w pośrednich stanach „$i+1$", „$i+2$", ..., „$j-1$" przebywał łącznie dłużej niż t. Stąd na mocy (4.6) oraz równości

$$P_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i) = P(X(t) < j+1 \mid X(0) = i) - P(X(t) < j \mid X(0) = i)$$

otrzymujemy teraz twierdzenia, czyli wzory (4.7).

Przykład 4.6. Zastosujemy powyższy wzór na $P_{ij}(t)$ do procesu Yule'a będącego czystym procesem urodzin z intensywnościami $\lambda_n = n\lambda$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} e^{-i\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-i}, \quad j = i, i+1, \ldots$$

(Ross, str. 383).