

Life II Exercises 3.

(1) Załóżmy, że $\mu_x^{(j)}(t) = a_j \mu_x^{(\tau)}(t)$ dla $j = 1, \dots, m$. Pokazać, że

- (i) $a_j \geq 0$ i $\sum_{j=1}^m a_j = 1$.
- (ii) $Pr(J_x = j) = a_j$ dla $j = 1, \dots, m$.
- (iii) ${}_t q_x^{(j)} = a_j {}_t q_x^{(\tau)}$.
- (iv) ${}_t p_x^{(j)} = ({}_t p_x^{(\tau)})^{a_j}$.

(2) W modelu na 3 ryzyka pokazać przy założeniu $HU^{(\tau)}$, że

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= q_x^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} (q_x^{(2)} + q_x^{(3)}) + \frac{1}{3} q_x^{(2)} q_x^{(3)} \right), \\ q_x^{(2)} &= q_x^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} (q_x^{(1)} + q_x^{(3)}) + \frac{1}{3} q_x^{(1)} q_x^{(3)} \right), \\ q_x^{(3)} &= q_x^{(3)} \left(1 - \frac{1}{2} (q_x^{(1)} + q_x^{(2)}) + \frac{1}{3} q_x^{(1)} q_x^{(2)} \right). \end{aligned}$$

(3) W modelu na dwa ryzyka obliczyć $q_x^{(j)}$ gdy $T^{(j)}$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu^{(j)}$. Porównać z aproksymacjami

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &\approx q_x^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(2)} \right), \\ q_x^{(2)} &\approx q_x^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(1)} \right). \end{aligned}$$

W tym celu przyjąć $\mu^{(1)} = 1$ i zbadać różnicę wyniku dokładnego i aproksymowanego jako funkcję zmiennej $\mu^{(2)}$.

(4) Przypuśćmy teraz, że mamy dwa ryzyka: 1 – zadane przez ${}_t p_x^{(1)}$ oraz 2 – podwyższone ze względu na udział w imprezie w odcinku czasu $(x + k, x + k']$, $(k < k')$ o której to imprezie wiadomo, że przeżywa ją jedynie $100 \times q'$ % biorących udział. Zakładając, że wypadki rozkładają się jednostajnie w czasie trwania imprezy, policzyć $q_x^{(1)}$ oraz $q_x^{(2)}$.