

# Łańcuchy Markowa

Tomasz Rolski

Instytut Matematyczny  
Uniwersytetu Wrocławskiego

Odczyt wygłoszony w ramach

Spotkania matematyczne

w dniu 11.01.2003. Cykl jest organizowany przez FSMW oraz IM UWr.

## Plan

- Mała powtórka
- Jedna próba Bernoulliego
- Próby Bernoulliego
- Markowska zależność; łańcuchy Markowa
- Macierze
- Przykład
- Zakończenie

## Mała powtórka

$\Pr$  - prawdopodobieństwo,  $A, B$  - zdarzenia,  $\Pr(A)$  - prawdopodobieństwo zdarzenia. Prawdopodobieństwem  $A$  pod warunkiem  $B$  nazywamy

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Interesuje nas  $n$  kolejnych doświadczeń, które mogą zakończyć się sukcesem ( $=1$ ) lub porażką ( $=0$ ). Będziemy ich kolejne wyniki oznaczać przez  $X_1, X_2, \dots$ . Na przykład  $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$  oznacza, że w pierwszym doświadczeniu mamy sukces, w drugim mamy porażkę i w trzecim mamy sukces.  $X_1, \dots, X_n$  są zmiennymi losowymi i przyjmują tylko wartości 0 lub 1.

## Próba Bernoulliego

Zmienna losowa  $X$  przyjmująca wartości 0 lub 1 nazywamy *próbą Bernoulliego*. Rozkład  $X$  jest określony przez  $\Pr(X = 0) = q$ ,  $\Pr(X = 1) = p$ , gdzie  $p, q \geq 0$  i  $p + q = 1$ .

**Przykład 0.1** Rzut monetą. Przez  $X = 1$  oznaczamy, że wypadł orzeł, a przez  $X = 0$ , że wypadła reszka.

## $n$ prób Bernoulliego

Przypomnijmy, że zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  są niezależne, jeśli

$$\Pr(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) = \Pr(X_1 = i_1)\Pr(X_2 = i_2) \cdots \Pr(X_n = i_n)$$

dla wszystkich układów  $i_1, \dots, i_n = 0, 1$ .

**Definicja 0.2**  $X_1, \dots, X_n$  nazywamy *próbami Bernoulliego* jeśli są niezależne oraz

$$\Pr(X_i = 1) = p, \quad \Pr(X_i = 0) = q$$

dla  $i = 1, \dots, n$ .

**Przykład 0.3** Niech  $p = 1/3$ . Pytamy o zdarzenie  $\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1\}$  jeśli  $p = 1/3$ . Zakładając, że  $X_1, X_2, X_3$  są próbami Bernoulliego mamy

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) &= \Pr(X_1 = 1)\Pr(X_2 = 0)\Pr(X_3 = 1) \\ &= 1/3 \cdot 2/3 \cdot 1/3 = (1/3)^2 \cdot 2/3. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla prób Bernoulliego mamy

$$\begin{aligned} \Pr(X_2 = j | X_1 = i) &= \frac{\Pr(X_2 = j, X_1 = i)}{\Pr(X_1 = i)} \\ &= \frac{\Pr(X_2 = j)\Pr(X_1 = i)}{\Pr(X_1 = i)} \\ &= \Pr(X_2 = j) \end{aligned}$$

dla dowolnych  $i, j = 0, 1$ . W ten sam sposób można pokazać, że dla dowolnego  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \Pr(X_{k+1} = j | X_k = i) &= \frac{\Pr(X_{k+1} = j, X_k = i)}{\Pr(X_k = i)} \\ &= \frac{\Pr(X_{k+1} = j)\Pr(X_k = i)}{\Pr(X_k = i)} \\ &= \Pr(X_{k+1} = j) \end{aligned}$$

dla dowolnych  $i, j = 0, 1, i_\ell = 0, 1$ . W podobny sposób można pokazać, że

$$\Pr(X_{k+1} = j | X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_1 = i_1) = \Pr(X_{k+1} = j) \quad (0.1)$$

dla wszystkich  $i, j = 0, 1$  oraz  $k = 1, 2, \dots$

## Markowska zależność; łańcuchy Markowa

**Definicja 0.4** Mówimy, że  $X_1, \dots, X_n$  jest łańcuchem Markowa, jeśli

$$\Pr(X_{k+1} = j | X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_1 = i_1) = \Pr(X_{k+1} = j | X_k = i) = p_{ij}$$

dla wszystkich  $i, j = 0, 1$  oraz  $k = 1, 2, \dots, i_\ell = 0, 1$ .

Rozpiszmy to dla  $k = 1$ .

$$\begin{aligned} \Pr(X_2 = 0 | X_1 = 0) &= p_{00} \\ \Pr(X_2 = 1 | X_1 = 0) &= p_{01} \\ \Pr(X_2 = 0 | X_1 = 1) &= p_{10} \\ \Pr(X_2 = 1 | X_1 = 1) &= p_{11}. \end{aligned}$$

Ogólnie dla  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \Pr(X_{k+1} = 0 | X_k = 0) &= p_{00} \\ \Pr(X_{k+1} = 1 | X_k = 0) &= p_{01} \\ \Pr(X_{k+1} = 0 | X_k = 1) &= p_{10} \\ \Pr(X_{k+1} = 1 | X_k = 1) &= p_{11}. \end{aligned}$$

A więc zamiast liczb  $p, q$  ( $p, q \geq 0, p + q = 1$ ), które określają próby Bernoulliego mamy

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

gdzie  $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11} \geq 0$  i

$$\begin{aligned} p_{00} + p_{01} &= 1 \\ p_{10} + p_{11} &= 1. \end{aligned}$$

Na przykład

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Do pełnego określenia łańcucha Markowa potrzebna jest jeszcze znajomość rozkładu początkowego  $\Pr(X_1 = 0) = p_0$  i  $\Pr(X_1 = 1) = p_1$ .

## Macierze

Będziemy mówić jedynie o macierzach  $2 \times 2$ . Niech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}.$$

Wtedy definiujemy operację zwaną *mnożeniem macierzy* przez

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{00}b_{00} + a_{01}b_{10} & a_{00}b_{01} + a_{01}b_{11} \\ a_{10}b_{00} + a_{11}b_{10} & a_{10}b_{01} + a_{11}b_{11} \end{pmatrix}.$$

Będzie nam potrzebne potęgowanie:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}\mathbf{P}\cdots\mathbf{P} \quad (n \text{ razy}).$$

Na przykład

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}\mathbf{P}^2$$

lub

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2\mathbf{P},$$

itd. Ogólnie

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^k.$$

Niech  $X_1, \dots, X_{k+1}$  będzie łańcuchem Markowa zdefiniowanym przez macierz  $\mathbf{P}$ . Wtedy

### Twierdzenie 0.5

$$\mathbf{P}^k = \begin{pmatrix} \Pr(X_{k+1} = 0 | X_1 = 0) & \Pr(X_{k+1} = 1 | X_1 = 0) \\ \Pr(X_{k+1} = 0 | X_1 = 1) & \Pr(X_{k+1} = 1 | X_1 = 1) \end{pmatrix}.$$

Istnieje wzór na  $k$ -tą potęgę macierzy  $\mathbf{P}$ . Aby go ładnie zapisać wprowadzimy dwie operacje:  
*dodawania macierzy  $\mathbf{A}$  do  $\mathbf{B}$*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{00} + b_{00} & a_{01} + b_{01} \\ a_{10} + b_{10} & a_{11} + b_{11} \end{pmatrix}$$

oraz mnożenie macierzy  $\mathbf{A}$  przez liczbę  $c$ :

$$c \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} ca_{00} & ca_{01} \\ ca_{10} & ca_{11} \end{pmatrix}.$$

Ponadto jest prawdziwa rozdzielność dodawania względem mnożenia: dla macierzy  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$

Przepiszmy macierz  $\mathbf{P}$  w postaci

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p' & 1-p' \end{pmatrix},$$

gdzie  $0 \leq p, p' \leq 1$ .

**Twierdzenie 0.6**

$$\mathbf{P}^k = \frac{1}{p+p'} \begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-p')^k}{p+p'} \begin{pmatrix} p & -p' \\ p' & -p' \end{pmatrix},$$

dla  $k = 1, 2, \dots$

*Dowód* Dowód przez indukcję. Sprawdzamy dla  $k = 1$

$$\frac{1}{p+p'} \begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{p+p'} - 1\right) \begin{pmatrix} p & -p' \\ p' & -p' \end{pmatrix} = \mathbf{P},$$

Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla  $k$ . wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k \mathbf{P} &= \\ &= \left( \frac{1}{p+p'} \begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-p')^k}{p+p'} \begin{pmatrix} p & -p' \\ p' & -p' \end{pmatrix} \right) \mathbf{P} \\ &= \frac{1}{p+p'} \begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} \mathbf{P} + \frac{(1-p-p')^k}{p+p'} \begin{pmatrix} p & -p' \\ p' & -p' \end{pmatrix} \mathbf{P} \end{aligned}$$

Teraz musimy sobie pomnożyć na boku

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} p' & p \\ p' & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p' & 1-p' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p' - pp' + pp' & p'p + p - p'p \\ p' - pp' + pp' & pp' + p - pp' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p & -p \\ p' & -p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p' & 1-p' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p - p^2 - pp' & p^2 - p + pp' \\ p' - pp' - (p')^2 & pp' - p' + (p')^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - p - p') \begin{pmatrix} p & -p \\ p' & -p' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teraz wstawiając i porządkując otrzymujemy żądany wzór dla  $k + 1$ .

**Zadanie** Pokazać, że jeśli

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

to  $\mathbf{P}^k = \mathbf{P}$ .

## Przykład

Rozważmy teraz łańcuch Markowa zadany przez

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

z rozkładem początkowym  $p_0 = 2/3$  oraz  $p_1 = 1/3$ . Zajmiemy się najpierw kolejnymi potęgami  $\mathbf{P}^k$ . Posługując się MATLABEM lub innym pakietem do obliczeń matematycznych<sup>1</sup> łatwo obliczyć

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.87500 & 0.12500 \\ 0.25000 & 0.75000 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.79688 & 0.20312 \\ 0.40625 & 0.59375 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.74805 & 0.25195 \\ 0.50391 & 0.49609 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Obliczenia do tego odczytu wykonane zostały przy użyciu pakietu OCTAVE, który jest w pewnym sensie odpowiednikiem MATLABA

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^4 &= \begin{pmatrix} 0.71753 & 0.28247 \\ 0.56494 & 0.43506 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^5 &= \begin{pmatrix} 0.69846 & 0.30154 \\ 0.60309 & 0.39691 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^{10} &= \begin{pmatrix} 0.66970 & 0.33030 \\ 0.66060 & 0.33940 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^{15} &= \begin{pmatrix} 0.66696 & 0.33304 \\ 0.66609 & 0.33391 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^{30} &= \begin{pmatrix} 0.66667 & 0.33333 \\ 0.66667 & 0.33333 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd można odgadnąć i potem udowodnić, że

$$\mathbf{P}^k \rightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (0.1)$$

Można też udowodnić, że dla tego przykładu

$$\Pr(X_k = 0) = 2/3, \quad \Pr(X_k = 1) = 1/3 \quad (0.2)$$

dla wszystkich  $k = 1, 2, \dots$ . Jest to bardzo ważna własność, która jest konsekwencją odpowiedniego doboru rozkładu początkowego  $(p_0, p_1)$  do macierzy  $\mathbf{P}$ . Zauważmy, że ten rozkład początkowy jest taki sam jak wiersze w macierzy granicznej (0.1). Rozkład początkowy, który powoduje, że jest prawdziwa własność (0.2) nazywamy *rozkładem stacjonarnym*. Okazuje się, że jest związek pomiędzy granicą (0.1) a istnieniem i jednością rozkładu stacjonarnego. Twierdzenia i własności tego typu noszą nazwę odpowiednio twierdzeń lub własności ergodycznych.

Rozpatrzmy jeszcze przykład z początku odczytu. Jeśli  $X_1, X_2, X_3$  są próbami Bernoulliego z  $p = 1/3$ , to pokazaliśmy, że

$$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = 0.074074.$$

Natomiast jeśli  $X_1, X_2, X_3$  jest łańcuchem Markowa rozpatrywanym w tym podrozdziale, to mamy

$$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = p_1 \cdot p_{10} \cdot p_{01} = 1/3 \cdot 1/4 \cdot 1/8 = 0.010417.$$

Jeśli  $X_1, X_2, X_3$  są próbami Bernoulliego, to mamy

$$\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = 0.29630.$$

Natomiast jeśli  $X_1, X_2, X_3$  jest łańcuchem Markowa rozpatrywanym w tym podrozdziale, to mamy

$$\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = p_0 \cdot p_{00} \cdot p_{00} = 2/3 \cdot 7/8 \cdot 7/8 = 0.51042.$$

## Zakończenie

Teoria naszkicowana w tym odczycie jest fragmentem większej teorii łańcuchów Markowa, będącej jednym z działów teorii procesów stochastycznych. Metody łańcuchów Markowa służą dzisiaj w wielu dziedzinach do opisu zjawisk fizycznych, ekonomicznych, biologicznych, itd. Zanim podamy przykłady, musimy najpierw pozbyć się założenia, że łańcuch  $X_1, X_2, \dots$  przyjmuje tylko dwie wartości. Można teorię przerobić tak aby dopuścić za wartości, które przyjmują zmienne losowe, wszystkie liczby naturalne począwszy od zera. Będziemy je zwać *stanami* tego łańcucha. Słowna definicja łańcucha Markowa opisującą ewolucję pewnego zjawiska  $X_1, X_2, \dots$  brzmi następująco. Jest to taka ewolucja, w której następna pozycja w kroku  $k + 1$  zależy (oczywiście losowo) jedynie od pozycji w kroku  $k$  a nie od tego jak doszło do pozycji w kroku  $k$ . A więc przyszłość zależy jedynie o terażniejszości a nie od przeszłości. Dla dwustanowych łańcuchów Markowa wyraziliśmy to formalnie w definicji 0.4. W ogólnym przypadku łańcuch Markowa też zadaje się za pomocą rozkładu początkowego  $p_0, p_1, \dots$  oraz macierzy  $\mathbf{P}$ . Niestety rozmiar tej macierzy równy jest liczbie wszystkich stanów a więc może być nieskończony. Macierz  $\mathbf{P}$  zawiera wszystkie prawdopodobieństwa przejścia w jednym kroku, to jest prawdopodobieństwa  $p_{ij}$  przejścia z stanu  $i$  do stanu  $j$ .

Nazwa łańcuchów pochodzi od matematyka rosyjskiego A.A. Markowa, który używał tego pojęcia do badań lingwistycznych na początku XX-ego wieku. Podamy teraz kilka dalszych przykładów pokazujących złożoność i możliwości tej teorii.

**Przykład 0.7** *Tasowanie kart.* Przypuśćmy, że mamy 3 karty (można to zrobić dla dowolnej liczby  $n$  kart, ale ze względów dydaktycznych wybraliśmy liczbę  $n = 3$ ), ustawione w kolejności starszeństwa królowa (=D), król

(=K) i as (=A). Możemy karty przekładać lub tasować. Przez tasowanie rozumiemy *losowe* wyciągnięcie z talii dwóch kart i zamiana ich kolejność w talii. Stanami będą wszystkie uporządkowania trójek:

$$(D, K, A), (K, A, D), (A, D, K), (D, A, K), (K, D, A), (A, K, D), \quad (0.3)$$

których jest oczywiście  $3! = 6$ . Popatrzmy do jakich stanów można przejść z  $(D, K, A)$  pamiętając naszą definicję tasowania. Możliwe są tylko stany  $(D, A, K), (A, K, D), (K, D, A)$  ale nie można przejść na przykład w jednym tasowaniu do  $(A, D, K)$ . Zakładając *losowość* tasowania przyjmujemy, że przejście do każdego z stanów dokonuje się z prawdopodobieństwem  $1/3$ . Możemy więc teraz napisać macierz przejścia  $P_1$ . Stany w (0.3) numerujemy od 0 do 5, tzn  $(D, K, A)$  przypisujemy 0,  $(K, A, D) - 1$ ,  $(A, D, K) - 2$ ,  $(D, A, K) - 3$ ,  $(K, D, A) - 4$ ,  $(A, K, D) - 5$ . Mamy więc

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zamiast tasowania możemy rozważać przekładanie. Jeśli  $(i, j, k)$  opisuje porządek kart to dla  $n = 3$  mamy tylko dwie możliwe przłożenia:  $(i, j, k) \rightarrow (j, k, i)$  oraz  $(i, j, k) \rightarrow (j, k, i)$  W przypadku *losowych* przelożeń mamy macierz przejścia następującą:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

W obu przypadkach macierze są podwójnie stochastyczne to znaczy suma w kolumnach jak i wierszach zawsze równa się jeden. Niestety w obu łańcuchach występują pewne ciekawe “nieprawidłowości” jak “okresowość” lub “przywiedlność”, na omawianie których nie ma tu miejsca. Można skorzystać z MATLABA lub innego pakietu do obliczeń matematycznych aby policzyć potęgi  $P_1$  i  $P_2$  i zobaczyć inne zjawiska niż sygnalizowane w przykładzie dwustanowym, gdy  $0 < p, p' < 1$ .

Można zauważyć, że w przypadku macierzy  $\mathbf{P}_1$  kolejne potęgi będą

$$\mathbf{P}_1^{2k} = \mathbf{P}_1$$

oraz

$$\mathbf{P}_1^{2k+1} = \mathbf{P}'_1,$$

gdzie

$$\mathbf{P}'_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

W przypadku  $\mathbf{P}_2$  widać, że nie ma komunikacji pomiędzy  $\{0, 1, 2\}$  a  $\{3, 4, 5\}$ . A więc można robić osobno analizę dla każdej grupy stanów. Dla stanów  $\{0, 1, 2\}$  mamy

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kolejne potęgi  $\mathbf{Q}$  są następujące:

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 0.50000 & 0.25000 & 0.25000 \\ 0.25000 & 0.50000 & 0.25000 \\ 0.25000 & 0.25000 & 0.50000 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^3 = \begin{pmatrix} 0.25000 & 0.37500 & 0.37500 \\ 0.37500 & 0.25000 & 0.37500 \\ 0.37500 & 0.37500 & 0.25000 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^4 = \begin{pmatrix} 0.37500 & 0.31250 & 0.31250 \\ 0.31250 & 0.37500 & 0.31250 \\ 0.31250 & 0.31250 & 0.37500 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^5 = \begin{pmatrix} 0.31250 & 0.34375 & 0.34375 \\ 0.34375 & 0.31250 & 0.34375 \\ 0.34375 & 0.34375 & 0.31250 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^{10} = \begin{pmatrix} 0.33398 & 0.33301 & 0.33301 \\ 0.33301 & 0.33398 & 0.33301 \\ 0.33301 & 0.33301 & 0.33398 \end{pmatrix}.$$

**Przykład 0.8** *Protokół ALOHA*. Do transmisji danych tworzy się rozmaite protokoły. Na Uniwersytecie Hawajskim wypróbowano następujący protokół, zwany ALOHA. Przypuśćmy, że  $n$  komputerów jest połączonych w sieć oraz, że czas podzielony jest na okresy  $(hk, h(k+1)]$  zwane sloty. W każdym slotcie, każdy komputer może chcieć wysłać pakiet z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych komputerów. A więc może pojawić się w slotcie czasowym  $l$  pakietów z prawdopodobieństwem  $a_l = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}$ . Umówmy się, że transmisja jest na koniec slotu, i że sloty są ponumerowane od  $k = 1, 2, \dots$ . Zasada jest taka, że jeśli jest tylko jeden pakiet oczekujący na transmisję, to transmisja jest udana. Jeśli natomiast jest czekających więcej niż jeden pakiet to następuje kolizja i żaden nie jest wysłany. Wtedy w następnym slotcie, każdy czekający pakiet jest ponownie wysyłany z prawdopodobieństwem  $w$  oraz czeka na wylosowanie w następnym slotcie z prawdopodobieństwem  $1-w$ , niezależnie od pozostałych pakietów. Wtedy transmisja skończy się sukcesem jeśli tylko jeden został wylosowany i żaden nowy się nie pojawił. W przeciwnym razie nastąpi kolizja. Jeśli oznaczymy przez  $X_k$  liczbę pakietów czekających na transmisję pod koniec  $k$ -tego slotu, to można zauważyć, że  $\{X_n\}$  tworzy łańcuch Markowa z przestrzenią stanów  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Okazuje się, że ten protokół nie jest najlepszy. Przyjmując  $I_k = 1$  jeśli udała się transmisja w slotcie  $k$ , natomiast  $I_k = 0$  w przeciwnym razie, to można pokazać, że  $\sum_{k=1}^{\infty} I_k < \infty$  z prawdopodobieństwem 1, co oznacza możliwość skończonej liczby transmisji w nieskończonym horyzoncie czasowym. Jest to efekt związany z własnością przechodniości naszego łańcucha Markowa. Tego typu zjawisko nie może występować w łańcuchach Markowa z skończoną liczbą stanów.