

3 Zadania

3.1 Zadania teoretyczne

3.1 Pokazać, że dla nieujemnej zmiennej losowej X

$$\begin{aligned}\mathbb{E} X &= \int_0^\infty \bar{F}(x) dx, \\ \mathbb{E} X^2 &= 2 \int_0^\infty \int_y^\infty \bar{F}(y) dy dx.\end{aligned}$$

oraz

$$\mathbb{E} e^{sX} = s \int_0^\infty e^{sx} dF(x).$$

3.2 Niech $F \sim \text{Exp}(\lambda)$ i $Z_1 = F^{-1}(U)$, $Z_2 = F^{-1}(1 - U)$. Pokazać, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E} Z_i &= \lambda \\ \mathbb{E} Z_i^2 &= 2\lambda^2\end{aligned}$$

oraz

$$\text{corr}(Z_1, Z_2) = -0.6449.$$

3.3 Niech $Z_1 = F^{-1}(U)$, $Z_2 = F^{-1}(1 - U)$. Obliczyć korelację $\text{corr}(Z_1, Z_2)$ gdy F jest dystrybuantą:

rozkładu Poissona; $\lambda = 1, 2, \dots, 10$,

rozkładu geometrycznego $\text{Geo}(p)$.

3.4 Niech $F'(x)$ będzie warunkową dystrybuantą zdefiniowaną przez

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)},$$

gdzie $a < b$. Pokazać, że $X = F^{-1}(U')$, gdzie

$$U' = F(a) + (F(b) - F(a))U$$

ma dystrybuantę F' .

3.5 Podać procedurę na generowanie liczb losowych z gęstością trójkątną. Wsk. Rozważyć gęstość $U_1 + U_2$.

3.6 Podać procedurę na generowanie liczby losowej z gęstością postaci

$$f(x) = \sum_{j=1}^N a_j x_j, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

gdzie $a_j \geq 0$. Wsk. Obliczyć gęstość $\max(U_1, \dots, U_n)$ i następnie użyć metody superpozycji.

3.7 Niech F jest dystrybuantą rozkładu Weibulla $W(\alpha, c)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-cx^\alpha), & x \geq 0 \end{cases}$$

Pokazać, że

$$X = \left(\frac{-\log U}{c} \right)^{1/\alpha}$$

ma rozkład $W(\alpha, c)$.

3.8 a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(\lfloor U^{-1} \rfloor = i) = \frac{1}{i(i+1)}$, dla $i = 1, 2, \dots$

b) Podać algorytm i obliczyć prawdopodobieństwo akceptacji na wygenerowanie metodą eliminacji dyskretnej liczby losowej X z funkcją prawdopodobieństwa $\{p_k, k = 1, 2, \dots\}$, gdzie

$$p_k = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

3.9 Podać algorytm i obliczyć prawdopodobieństwo akceptacji na wygenerowanie metodą eliminacji liczby losowej $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ z $\alpha < 1$, używając w tle jako liczby losowej $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, gdzie λ jest odpowiednio dobrana.

3.10 Podać metodę generowania liczby losowej z gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -\infty < x < 0 \\ e^{-2}, & 0 < x < \infty \end{cases}$$

3.11 Podać algorytm i obliczyć prawdopodobieństwo akceptacji na wygenerowanie metodą eliminacji liczby losowej $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ z $\alpha < 1$, używając w tle jako liczby losowej $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, gdzie λ jest odpowiednio dobrana.

3.12 Podać metodę generowania liczby losowej z gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -\infty < x < 0 \\ e^{-2}, & 0 < x < \infty \end{cases}$$

- 3.13 Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z gęstością $f(x, y)$ i niech $B \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem takim, że

$$\int_B f(x, y) dx dy < \infty.$$

Pokazać, że $X|(X, Y) \in B$ ma gęstość

$$\frac{\int_{y:(x,y) \in B} f(x, y) dy}{\int_B f(x, y) dx dy}.$$

- 3.14 [Biegunowa wersja metody Boxa-Mullera.] Niech X_1, X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $X_j \sim U(-1, 1)$. Jeśli $X_1^2 + X_2^2 \leq 1$ zapisujemy punkt (X_1, X_2) w współrzędnych biegunowych R, Θ . Pokazać, że R i Θ są niezależne, $R^2 \sim U(0, 1)$ oraz $\Theta \sim U(0, 2\pi]$.

- 3.15 Niech X_1, X_2 będą jak w zadaniu 3.14 powyżej i niech, przy warunku $X_1^2 + X_2^2 \leq 1$, $S = R^2 = X_1^2 + X_2^2$. Pokazać, że jeśli $X_1^2 + X_2^2 \leq 1$, to

$$\begin{aligned} Y_1 &= (-2 \log S)^{1/2} \frac{X_1}{S^{1/2}} = X_1 \left(\frac{-2 \log S}{S} \right)^{1/2} \\ Y_2 &= (-2 \log S)^{1/2} \frac{X_2}{S^{1/2}} = X_2 \left(\frac{-2 \log S}{S} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

mają rozkład $N_2(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

- 3.16 Niech $f(x)$ będzie gęstością rozkładu półnormalnego z gęstością

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0.$$

Napisać procedurę w Matlabie na generowanie liczby losowej X z gęstością f . Obliczyć prawdopodobieństwo akceptacji.

- 3.17 Niech $f(x)$ będzie gęstością rozkładu $\Gamma(\alpha, 1)$, z $\alpha > 1$. Korzystając z metody ROU napisać procedurę na generowanie liczby losowej X z gęstością $f(x)$. Przyjąć $a_1 = 0$ i $a_2 = 1$ i oszacować prawdopodobieństwo akceptacji.

średnia	wariancja	w.z.	f.t.m.
$\frac{1}{\alpha - 1}$ $\alpha > 1$	$\frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$ $\alpha > 2$	$[\frac{\alpha}{\alpha - 2}]^{-\frac{1}{2}}$ $\alpha > 2$	*
$\omega_1 c^{-1/r}$	$(\omega_1 - \omega_2^2) c^{-2/r}$	$\left[\frac{\omega_2}{\omega_1^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$	*
μ	$\frac{\mu^3}{\lambda}$	$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\exp\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{\mu^2} - 2\lambda s}\right)}$
1	$1 + \frac{2}{\alpha(\alpha - 2)}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha(\alpha - 2)}}$	$\frac{\int_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{x^\alpha}{x-s} dx}{\frac{\alpha^{\alpha-1}}{(\alpha-1)^\alpha}}$ $s < 0$

Tablica 3.2: Tablica rozkładów absolutnie ciągłych (cont.)