

Symulacje Lista 2.

Zadania laboratoryjne

- (1) Podać wraz z uzasadnieniem jak generować liczbę losową X o rozkładzie $U[a,b]$. Napisać funkcję $\text{Unif}(a,b)$.
- (2) W literaturze aktuarialnej rozważa się rozkład Makehama przyszłego czasu życia x -latka z ogonem rozkładu

$$\mathbb{P}(T_x > t) = e^{-At-m(c^{t+x}-c^x)}.$$

Napisać procedurę $\text{Makeham}(A,m,c,x)$ generowania liczb losowych o takim rozkładzie. Wsk. Zinterpretować faktoryzację $e^{-At-m(c^{t+x}-c^x)} = e^{-At}e^{-m(c^{t+x}-c^x)}$.

- (3) Napisać procedurę $\text{Poi}(\text{lambda})$ generowania liczb losowych o rozkładzie $\text{Poi}(\lambda)$. Uzasadnić jej poprawność.
- (4) Rozkład $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ ma gęstość

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < x < 1.$$

gdzie beta funkcja jest zdefiniowana przez

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx .$$

Przy założeniu $\alpha, \beta > 1$ podać algorytm wraz z usadnieniem generowania liczb losowych $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ metodą eliminacji.

- (5) Napisać procedurę MATLAB-owską generowania liczby losowej $N(0,1)$ (tablicy liczb losowych $N(0,1)$)
 - (i) metodą eliminacji (randnrej),
 - (ii) 1-szą metodą Boxa-Mullera (randnbnmfirst),
 - (iii) 2-gą metodą Boxa-Mullera (randnbnmsec). Przeprowadzić test z pomiarem czasu 100 000 replikacji dla każdej z tych metod oraz MATLAB-owskiej randn . Wsk. Można użyć instrukcji TIC and TOC.

Zadania teoretyczne

(t1) Niech $F \sim \text{Exp}(\lambda)$ i $Z_1 = F^{-1}(U)$, $Z_2 = F^{-1}(1 - U)$. Pokazać, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E} Z_i &= 1/\lambda \\ \mathbb{E} Z_i^2 &= 2/\lambda^2\end{aligned}$$

oraz

$$\text{corr}(Z_1, Z_2) = -0.3225.$$

$$\text{Wsk. } \int_0^1 \log x \log(1-x) dx = 0.3551.$$

(t2) Niech $Z_1 = F^{-1}(U)$, $Z_2 = F^{-1}(1 - U)$. Obliczyć korelację $\text{corr}(Z_1, Z_2)$ gdy F jest dystrybuantą:

(a) rozkładu Poissona; $\lambda = 1, 2, \dots, 10$,

(b) rozkładu geometrycznego $\text{Geo}(p)$.

(t3) Niech $F'(x)$ będzie warunkową dystrybuantą zdefiniowana przez

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}, & a \leq x < b, \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

gdzie $a < b$. Pokazać, że $X = F^{-1}(U')$, gdzie

$$U' = F(a) + (F(b) - F(a))U$$

ma dystrybuantę F' .

(t4) Podać procedurę generowania liczb losowych z gęstością trójkątną $\text{Tri}(a, b)$, z gęstością

$$f(x) = \begin{cases} c(x-a) & a < x < (a+b)/2 \\ c((b-a)/2 - x) & (a+b)/2 < x < b \end{cases}$$

gdzie stała normująca $c = 4/(b-a)^2$. Wsk. Rozważyć najpierw $U_1 + U_2$.

(t5) Podać procedurę na generowanie liczby losowej z gęstością postaci

$$f(x) = \sum_{j=1}^N a_j x_j, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

gdzie $a_j \geq 0$. Wsk. Obliczyć gęstość $\max(U_1, \dots, U_n)$ i następnie użyć metody superpozycji.

(t6) Niech F jest dystrybuantą rozkładu Weibulla $W(\alpha, c)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-cx^\alpha), & x \geq 0. \end{cases}$$

Pokazać, że

$$X = \left(\frac{-\log U}{c} \right)^{1/\alpha}$$

ma rozkład $W(\alpha, c)$.

(t7)

- a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(\lfloor U^{-1} \rfloor = i) = \frac{1}{i(i+1)}$, dla $i = 1, 2, \dots$
- b) Podać algorytm i obliczyć prawdopodobieństwo akceptacji na wygenerowanie metodą eliminacji dyskretnej liczby losowej X z funkcją prawdopodobieństwa $\{p_k, k = 1, 2, \dots\}$, gdzie

$$p_k = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(t8) Podaj metodę generowania liczby losowej z gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -\infty < x < 0 \\ e^{-2x}, & 0 < x < \infty \end{cases}$$

(t9) Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z gęstością $f(x, y)$ i niech $B \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem takim, że

$$\int_B f(x, y) dx dy < \infty.$$

Pokazać, że $X|(X, Y) \in B$ ma gęstość

$$\frac{\int_{y:(x,y) \in B} f(x, y) dy}{\int_B f(x, y) dx dy}.$$