

Tomasz Rolski
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Symulacje, wykład 4

Tomasz Rolski

$$I = \mathbb{E} Y$$

dla pewnej liczby losowej Y , takiej, że $\mathbb{E} Y^2 < \infty$.

$Y_1, \dots, Y_n$ będą niezależnymi replikacjami

Estymator $\hat{Y}_n$ jest *nieobciążony* t.j.

$$\mathbb{E} \hat{Y}_n = I$$

oraz *mocno zgodny* to znaczy z prawdopodobieństwem 1 zachodzi zbieżność

$$\hat{Y}_n \rightarrow I$$

co pociąga *słabą zgodność*, to znaczy, że dla każdego $b > 0$ mamy

$$\Pr(|\hat{Y}_n - I| > b) \rightarrow 0.$$

Zauważmy, że warunek $|\hat{Y}_n - I| \leq b$ oznacza, że błąd bezwzględny nie przekracza b .

Dla każdego b i liczby $0 < \alpha < 1$ istnieje n (nas interesuje najmniejsze naturalne) takie, że

$$\Pr(\hat{Y}_n - b \leq I \leq \hat{Y}_n + b) \geq 1 - \alpha.$$

A więc z prawdopodobieństwem większym niż $1 - \alpha$ szukana wielkość I należy do przedziału losowego $[\hat{Y}_n - b, \hat{Y}_n + b]$ i dlatego α nazywa się *poziomem istotności* lub *poziomem ufności*.

Centralne twierdzenie graniczne, mówi, że jeśli tylko $Y_1, \dots, Y_n$ są niezależne i o jednakowym rozkładzie, to dla $n \rightarrow \infty$

$$\Pr \left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mathbb{E} Y}{\sigma_Y \sqrt{n}} \leq x \right) \rightarrow \Phi(x) \quad (1)$$

gdzie $\sigma_Y = \sqrt{\text{Var } Y}$ oraz $\Phi(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Niech $z_{1-\alpha/2}$ będzie $\alpha/2$ -kwantylem rozkładu normalnego tj.

$$z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Przekształcając otrzymujemy

$$\Pr(\hat{Y}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} \leq I \leq \hat{Y}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}) \approx 1 - \alpha .$$

Fundamentalny związek

$$z_{1-\alpha/2} = \frac{b\sqrt{n}}{\sigma_Y}.$$

W teorii Monte Carlo przyjęło rozważać się $\alpha = 0.05$
skąd $z_{1-0.025} = 1.96$

σ_Y^2 nie jest znane; wtedy zamiast σ_Y^2 , bierzemy
nieobciążony i mocno zgodny estymator wariancji

$$\hat{S}_n^2 = \frac{n-2}{n-1} \hat{S}_{n-1}^2 + \frac{1}{n} (Y_n - \hat{Y}_{n-1})^2$$

Można udowodnić wariant CTG:

$$\Pr \left(\sum_{j=1}^n \frac{(Y_j - \mathbb{E} Y)}{\hat{S}_n \sqrt{n}} \leq x \right) \rightarrow \Phi(x)$$

skąd

$$\Pr(\hat{Y}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} \leq I \leq \hat{Y}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}) \approx 1 - \alpha .$$

Rekurencyjna metoda obliczania $\hat{Y}_n$ oraz $\hat{S}_n^2$

Algorytm

$$\hat{Y}_n = \frac{n-1}{n} \hat{Y}_{n-1} + \frac{1}{n} Y_n$$

i

$$\hat{S}_n^2 = \frac{n-2}{n-1} \hat{S}_{n-1}^2 + \frac{1}{n} (Y_n - \hat{Y}_{n-1})^2$$

dla $n = 2, 3, \dots$ i

$$\hat{Y}_1 = Y_1 \quad \hat{S}_1^2 = 0 .$$

Tablica 1: Kwantyle standardowego rozkładu normalnego $\Phi(u)$; $\beta = 1 - \alpha$.

β	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995
z_β	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Metoda CMC

- Przypuśćmy, że

$$I = \mathbb{E} Y$$

i $\sigma_Y^2 = \text{Var } Y < \infty$.

- Niech $Y_1, \dots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jak Y (replikacje).
- Wtedy

$$\hat{Y}^{\text{CMC}} = \hat{Y}_n^{\text{CMC}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

jest zgrubnym estymatorem Monte Carlo (CMC).

- $\hat{Y}^{\text{CMC}}$ jest estymatorem mocno zgodnym i nieobciążonym.
- $\text{Var } \hat{Y}^{\text{CMC}} = \sigma_Y^2 / n$.

- Przypuśćmy, że

$$I = \int_B k(x) dx,$$

gdzie $|B| < \infty$.

- Wtedy przyjmujemy $Y = k(V)$, gdzie $V \sim U(B)$.
- Niech $Y_1, \dots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi.
- Wtedy

$$\hat{Y}^{\text{CMC}} = \hat{Y}_n^{\text{CMC}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

jest zgrubnym estymatorem Monte Carlo (CMC).

Metoda chybił trafił

- Estymator *chybił-trafił* (Hit Or Miss) (HoM).
Pomysł polega na przedstawieniu $I = \mathbb{E} Y$,
gdzie

$$Y = 1(k(U_1) > U_2).$$

Jest bowiem oczywiste, że

$$\mathbb{E} Y = \int_0^1 \left(\int_{k(u_1) > u_2} du_2 \right) du_1 = \int_0^1 k(u_1) du_1.$$

- Wtedy dla $U_1, \dots, U_{2n}$ obliczamy replikacje $Y_1, \dots, Y_n$ skąd obliczamy estymator

$$\hat{Y}_n^{\text{HoM}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j.$$

zwanym estymatorem *chybił trafił*.

Metoda warstw

- Jak zwykle chcemy obliczyć $I = \mathbb{E} Y$.
- Przestrzeń zdarzeń Ω rozbijamy na m warstw $\Omega_1, \dots, \Omega_m$.
- Niech $J(\omega) = j$ jeśli $\omega \in \Omega_j$. Niech $Y_j =_{\text{d}} (Y|J = j)$, tj.

$$\Pr(Y_j \in B) = \Pr(Y \in B|J = j) = \frac{\Pr(\{Y \in B\} \cap \Omega_j)}{\Pr(\Omega_j)}.$$

- Oznaczmy prawdopodobieństwo wylosowania warstwy $p_j = \Pr(\Omega_j)$ oraz $y_j = \mathbb{E} Y_j$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$\mathbb{E} Y = \mathbb{E} Y_J = p_1 y_1 + \dots + p_m y_m .$$

- n – liczbą replikacji, którą podzielimy na odpowiednio n_j replikacji Y_j w warstwie j . Te replikacje w warstwie j są $Y_1^j, \dots, Y_{n_j}^j$. Oczywiście $n = n_1 + \dots + n_m$.

•

Niech $\hat{Y}^j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_i^j$ będzie estymatorem y_j i definiujemy estymator warstwowy

$$\hat{Y}^{\text{str}} = p_1 \hat{Y}^1 + \dots + p_m \hat{Y}^m .$$

- Przypuśćmy, że wiadomo jak generować poszczególne Y_j . Niech $\sigma_j^2 = \text{Var } Y_j$ będzie wariancją warstwy j . Zauważmy, że estymator warstwowy jest nieobciążony

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \hat{Y}^{\text{str}} &= p_1 \mathbb{E} \hat{Y}^1 + \dots + p_m \mathbb{E} \hat{Y}^m \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \frac{\mathbb{E} Y 1_{\Omega_i}}{p_i} = \mathbb{E} Y = I. \end{aligned}$$

Wariancja estymatora warstwowego –

$$\hat{\sigma}_{\text{str}}^2 = n \text{Var } \hat{Y}^{\text{str}} = p_1^2 \frac{n}{n_1} \sigma_1^2 + \dots + p_m^2 \frac{n}{n_m} \sigma_m^2 .$$

Niech dla $n \rightarrow \infty$ będzie $n_j/n \rightarrow q_j$. Wtedy

FAKT

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_{\text{str}}^2} (\hat{Y}^{\text{str}} - I) \xrightarrow{\text{d}} \text{N}(0, 1) .$$

Przyjmiemy teraz, że $q_j = p_j$ (*alokacja proporcjonalna*).
Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_{\text{str}}^2 = \sum_{j=1}^m p_j \sigma_j^2 .$$

Z drugiej strony pamiętając, że $Y =_d Y_J$

$$\begin{aligned} \text{Var } Y &= \text{Var } Y_J = \sum_{j=1}^m p_j \mathbb{E} (Y_j - I)^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^m p_j \mathbb{E} (Y_j - y_j)^2 = \sum_{j=1}^m p_j \sigma_j^2 . \end{aligned}$$

ponieważ funkcja od x równa $\mathbb{E} (Y_j - x)^2$ jest minimalna dla $x = \mathbb{E} Y_j$.

Okazuje się, że optymalny dobór liczby replikacji n_j (to znaczy na warstwach można wyliczyć w następującym twierdzeniu.

TW. Niech n będzie ustalone i $n_1 + \dots + n_m = n$. Wariancja $p_1^2 \frac{n}{n_1} \sigma_1^2 + \dots + p_m^2 \frac{n}{n_m} \sigma_m^2$ estymator warstwowego $\hat{Y}^{\text{str}}$ jest minimalna gdy

$$n_j = \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{j=1}^m p_j \sigma_j} n .$$

Estymator antytetyczny

$2n$ zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n-1}, Y_{2n}$,

- Pary $(Y_i, Y_{i+1})_i$, $i = 1, \dots, n$ są niezależne o jednakowym rozkładzie,
- Zmienne losowe $(Y_j)_{j=1}^{2n}$ mają ten sam rozkład jak Y .
- Zauważmy, że jeśli będziemy rozpatrywać estymator

$$\hat{Y}^{\text{anth}} = \frac{\sum_{j=1}^{2n} Y_j}{2n}$$

to jego wariancja

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Var}(\hat{Y}^{\text{anth}})}{2n} \\ &= \frac{\text{Var}\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right)}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \text{Var}(Y)(1 + \text{corr}(Y_1, Y_2)) . \end{aligned}$$

- A więc jeśli $\text{corr}(Y_1, Y_2)$ jest ujemne to redukujemy wariancję.