1 Zadania MUŻ; lista 1

1.1 Poniżej dane są informacje o 3-letnim ubezpieczeniu na dożycie płatnym na koniec roku śmierci zawartym przez (x)-latka:

k	b_{k+1}	$_{k\|}q_x$
0	2	0.20
1	3	0.20
2	4	0.3

Składka płacona jest na początku ubezpieczenia i $i = 1/9$. W przypadku przeżycia wypłacana jest kwota $b_3 = 4$.
(i) Napisz OW sumy tego ubezpieczenia.
(ii) Napisz JSN A dla tego ubezpieczenia przy użyciu standardowych oznaczeń.
(iii) Oblicz JSN dla tego ubezpieczenia (najlepiej bezpośrednio z definicji).
(iv) Oblicz roczną składkę netto płaconą w jednakowej wysokości P tak długo jak ubezpieczony żyje.
(v) Oblicz rezerwę netto po pierwszym roku (najlepiej bezpośrednio z definicji). Rozważyć dwa przypadki: (1°) składka netto jest płacona jednorazowo w momencie wypisania polisy, (2°) składka jest płacona corocznie.

1.2 Wykupiono polisę na całe życie z składką roczną netto płatną na początku każdego roku jak długo ubezpieczony żyje i wynoszącą 100 zł. Znajdź na jaką sumę ubezpieczenia została wypisana polisa, jeśli $i = 4\%$ oraz przyjęto śmiertelność wg TTŻ-PL97m. Obliczyć rezerwę netto po pierwszym roku.

1.3 (i) Napisać obecną wartość całkowitej straty L dla renty z góry na całe życie, odroczonej na 2 lata, sfinansowanej składką netto płaconą w pierwszych dwóch latach; w chwili wypisania polisy w wysokości P oraz, jeśli ubezpieczony dożyje, w następnym roku w wysokości kP.
Ile wynosi P jeśli $k = 1$ (przyjąć HJP)?

1.4 Rozpatrzmy następującą rentę z góry na całe życie. Co roku wypłacana jest kwota równa 1 i jeśli rentobiorca zmarł przed upływem 5 lat, a na koniec roku śmierci rentobiorcy zostaje zwrócona połowa pobranej na początku JSN P.

(i) Napisać wzór na całkowitą stratę ubezpieczyciela L.
(ii) Podać wzór, w terminach standardowych oznaczeń aktuarialnych, na JSN.

1.5 Polisa dla (x)-latka ze składka roczną Π zapewnia
(i) 1000 zł po przeżyciu n lat
(ii) zwrot całej zapłaconej składki na koniec roku śmierci, jeśli umarł przed momentem n. Napisać wzór na składkę netto oraz obliczyć rezerwę składki.

1.6 W przypadku jednostkowej polisy całkowicie ciągłej na całe życie dla (x)-latka, opłacanej składką o stałej intensywnowści (powiedzmy $\bar{P}$ i nie jest ważne ile ona wynosi), całkowita strata ubezpieczyciela w przypadku gdy ubezpieczony umrze w chwili t wynosi

$$l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t}|}\,.$$

Pokazać, że $l(t)$ jest funkcją malejącą dla $t \geq 0$, $l(0) = 1$, $\lim_{t\to\infty} l(t) = -\bar{P}/\delta$. Wywnioskować stąd, że istnieje dokładnie jeden moment t_0 taki, że całkowita strata ubezpieczyciela jest równa zero jeśli $T_x = t_0$, dodatnia jeśli $T_x < t_0$ oraz ujemna gdy $T_x > t_0$.

1.7 Udowodnić, że rezerwa składki netto ubezpieczenia na całe życie opłacanego składką o stałej intensywności wynosi

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - (\delta + \bar{A}_x)\bar{a}_{[x]+t}\,, \tag{1.1}$$

a stąd wywnioskować, że jeśli prawdopodobieństwo warunkowe ${}_sp_{[x]+t}$ maleje wraz ze wzrostem t, to rezerwa jest funkcją rosnącą.
Ponadto wykazać, że $\lim_{t\to\infty} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1$.

1.8 Udowodnić przy założeniu rozkładu przyszłego czasu życia, takim jak w zad. 1.7, że rezerwa składki netto ubezpieczeń odroczonych (terminowego i bezterminowego) opłacanych składką o stałej intensywności jest funkcją rosnącą od t. Dotyczy to zarówno przypadku gdy składka netto podlega odroczeniu, jak i wówczas gdy jest płacona od początku.

1.9 Wyprowadzić wzór

$$\begin{aligned} &{}_t\bar{V}(\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}) \qquad (1.2)\\ &= \frac{1}{{}_tE_x}\int_0^t\int_t^n v^{s+w}\,{}_sp_x\,{}_wp_x(\mu_{[x]+w} - \mu_{[x]+s})\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}s \quad 0 \leq t \leq n\,. \end{aligned}$$

(**Wsk.:** wyjść od wzoru retrospektywnego, podstawić

$$\bar{P}(\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}) - \mu_{[x]+s} = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}} \int_0^n v^w\, {}_w p_x(\mu_{[x]+w} - \mu_{[x]+s})\,\mathrm{d}w$$

oraz zauważyć, że całka podwójna $\int_0^t \mathrm{d}s \int_0^t \ldots\, \mathrm{d}w$ zeruje się dzięki symetrii.)

Zauważyć, że jeśli natężenie zgonów $\mu_{[x]+s}$ jest funkcją rosnącą od t, to wyrażenie po prawej stronie (1.2) jest nieujemne.

1.10 Rozwiązać równanie różniczkowe Thielego. Sprawdzić, że przy dodatkowym warunku brzegowym ${}_0\bar{\mathcal{V}} = v_0$ rozwiązanie przyjmuje postać jak trzeba. (**Wsk.:** jest to liniowe, niejednorodne równanie różniczkowe postaci $f'(t) + h(t)f(t) = k(t)$; zastosować tzw. metodę wariacji stałej, to znaczy, znaleźć najpierw rozwiązanie g równania jednorodnego $g'(t) + h(t)g(t) = 0$ stosując na przykład separację zmiennych, a następnie szukać rozwiązania równania niejednorodnego pośród funkcji postaci $f(t) = C(t)g(t)$.)

1.11 Rozważmy następujący ciągły model ogólny ubezpieczenia na dożycie w odcinku $(0, n)$ gwarantujący wypłatę sumy ubezpieczenia $b(t)$ jeśli śmierć nastąpi w chwili t, podczas gdy składki są płacone w sposób ciągły z intensywnością $\bar{\Pi}(t)$, dla $t \in (0, n)$. Ponadto, jeśli ubezpieczony przeżyje czas n otrzymuje b_n. Pokazać, że rezerwa matematyczna ${}_t\bar{\mathcal{V}}$ składki $\bar{\Pi}(t)$ wyraża się wzorem

$$ {}_t\bar{\mathcal{V}} = \int_t^n v^{u-t}\; {}_{u-t}p_{[x]+t}(\mu_{[x]+u}\, b(u) - \bar{\Pi}(u))\,\mathrm{d}u + b_n v^{n-t}\; {}_{n-t}p_{[x]+t}, \quad (1.3)$$

dla $0 \le t \le n$. Jeśli ponadto w chwili 0 jest pobierana jednorazowa składka Π_0, to wówczas

$$ {}_0\bar{\mathcal{V}} = \Pi_0 + \int_0^n v^u\; {}_u p_x(\mu_{[x]+u}\, b(u) - \bar{\Pi}(u))\,\mathrm{d}u + b_n v^n\; {}_n p_x\,,$$

podczas gdy ${}_t\bar{\mathcal{V}}$ dla $0 < t \le n$ dane jest wzorem (1.3). Podać warunki brzegowe dla ${}_0\bar{\mathcal{V}}$ i ${}_n\bar{\mathcal{V}}$ w przypadku składki netto.