
RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 2: AKSJOMATY I PRAWDOPODOBIENSTWO KLASYCZNE

1. Zapoznać się z rozdziałami 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
 2. Ile różnych liczb 10 cyfrowych można ułożyć z cyfr: 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4?
 3. Na loterię przygotowano 100 losów, z których 15 jest wygrywających. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupując 10 losów dokładnie 2 nich będą wygrywające?
 4. Dane są $\mathbb{P}[A \cup B] = 1/2$ i $\mathbb{P}[A \cap B] = 1/4$, ponadto $\mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[B \setminus A]$. Obliczyć $\mathbb{P}[A]$ oraz $\mathbb{P}[B \setminus A]$.
 5. Ile wyników można rozróżnić, jeżeli rzuca się r_1 kości sześciennych wraz z r_2 monetami?
 6. Z 52 kart wybrano 13. Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania:

(a) 5 pików, 4 kierów, 3 trefli, 1 kara;	(c) układu 5-3-3-2;
(b) układu 5-4-3-1;	(d) układu 4-4-4-1.
 7. Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Znaleźć prawdopodobieństwo, że:

(a) każdy ma asa;
(b) każdy ma jakiegoś pika;
(c) każdy ma jakąś figurę (A, K, D lub W).
-
8. Na ile sposobów można rozmieścić n kul w k urnach, jeżeli: (a) kule są rozróżnialne; (b) kule są nierozróżnialne.
 9. Na ile sposobów można ustawić w ciąg n różnokolorowych (k kolorów) kul, jeżeli kul i -tego koloru jest r_i , $i = 1, 2, \dots, k$ oraz $\sum_{i=1}^k r_i = n$?
 10. Rzucamy symetryczną monetą do chwili otrzymania orła. Skonstruować zbiór zdarzeń elementarnych i wybrać odpowiednie prawdopodobieństwo. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie parzysta? podzielna przez 3? podzielna przez m ?
 11. Znaleźć i oszacować prawdopodobieństwo, że w grupie k osób przynajmniej dwie obchodzą urodziny tego samego dnia. Ile powinno wynosić k aby prawdopodobieństwo to było większe niż $1/2$?
 12. Niech $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}[B] = 2\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[C] = 3\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[B \cap C]$. Pokaż, że $1/6 \leq \mathbb{P}[A] \leq 1/4$, przy czym oba ograniczenia są osiągalne.
 13. (nierówność Boole'a) Udowodnić, że

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i].$$

Przenieść wynik na przeliczalnie wiele zbiorów.

14. Udowodnić, że

$$\mathbb{P} \left[\bigcap_{i=1}^n A_i \right] \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] - (n-1).$$

15. (nierówność Bonferroniego) Udowodnić, że

$$\mathbb{P} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j].$$

16. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w losowym uporządkowaniu 52 kart przynajmniej dwa asy będą obok siebie.

17. Znaleźć prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden z graczy w brydża ma wszystkie karty jednego koloru. Przybliżyć to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.

18. (Koincydencje) Na imprezie mikołajkowej wszystkie n prezentów pozbawiono karteczek z imieniem adresata i losowo rozdano uczestnikom. Niech p_k oznacza prawdopodobieństwo, że dokładnie k osób dostanie własny prezent. Obliczyć p_k oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_k$.

19. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Pokazać, że $A \sim B \Leftrightarrow \mathbb{P}[A \triangle B] = 0$ definiuje relację równoważności. Niech $\mathfrak{B} = \{[A] \mid A \in \mathcal{F}\}$ oznacza rodzinę klas abstrakcji tej relacji. Zauważyć, że $\mathfrak{B}$ ma strukturę algebry Boole'a. Jakie są działania? Tak zdefiniowana algebra nazywamy algebrą miary $\mathbb{P}$.

20. Niech $A_1, \dots, A_{2015} \in \mathcal{F}$ będą zbiorami o własności $\mathbb{P}[A_i] \geq 1/2$. Wykazać, że istnieje $\omega \in \Omega$ taka, że $\omega \in A_i$ dla przynajmniej 1008 wartości i .

21. Niech $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem nieskończonych ciągów zer i jedynek. Niech n -tym wyrazem $\omega \in \Omega$ będzie $a_n(\omega)$, czyli $\omega = (a_1(\omega), a_2(\omega), a_3(\omega), \dots)$. Sprawdzić, że na zbiorze Ω można określić metrykę d wzorem

$$d(\omega, \theta) = \frac{1}{n}, \quad \text{gdzie } n = \min\{k : a_k(\omega) \neq a_k(\theta)\}.$$

Zauważyć, że zbieżność w metryce d to zbieżność po współrzędnych, to znaczy dla $\omega_n, \omega \in \Omega$, zbieżność $d(\omega_n, \omega) \rightarrow 0$ jest równoważna temu, że $a_k(\omega_n) \rightarrow a_k(\omega)$ dla każdego k (co w tym przypadku oznacza, że $a_k(\omega_n) = a_k(\omega)$ dla dostatecznie dużych n).

22. (kontynuacja poprzedniego zadania) Pokaż, że funkcja $f: \Omega \rightarrow [0, 1]$ dana wzorem

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k(\omega)}{3^k}$$

jest homeomorfizmem pomiędzy przestrzenią Ω i zbiorem $f[\Omega] \subseteq [0, 1]$, który jest trójkowym zbiorem Cantora. Wywnioskować, że (Ω, d) jest przestrzenią zwartą.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 3: P-STWO GEOMETRYCZNE, WARUNKOWE I CAŁKOWITE

1. Zapoznać się z rozdziałami 1.3, 3.1-3.2 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. Ania i Bożena umówiły się między 16.00 a 17.00 w centrum miasta. Osoba, która przyjdzie pierwsza, czeka na drugą 20 minut. Jaka jest szansa, że dojdzie do spotkania?

Żeby opisać, co się zdarzyło, wystarczy podać czasy przybycia obu koleżanek. Można zatem przyjąć, że $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, a wtedy $\omega = (t_1, t_2)$, gdzie $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Wybierając $\mathcal{F} = \text{Bor}[0, 1]^2$ i $\mathbb{P} = \lambda$ będącą miarą Lebesgue'a, otrzymujemy model, w którym szansa, że Ania pojawi się w przedziale $[s, t]$ będzie równa długości tego przedziału. To samo dotyczy się Bożeny. Jak wygląda zbiór zdarzeń sprzyjających? Jakie jest prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania?

3. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo punkty X i Y . Wyznaczyć funkcje:
(a) $g(a) = \mathbb{P}[\max(X, 1/3) < a]$; (b) $h(a) = \mathbb{P}[\min(X, Y) < a]$; (c) $k(a) = \mathbb{P}[\max(X, Y) < a]$.
4. Niech $\mathbb{P}[B] > 0$. Udowodnić, że $\mathbb{P}[A|B]$ jako funkcja A , przy ustalonym B , jest prawdopodobieństwem.
5. W urnie jest b kul białych i c czarnych. Wyciągnięto jedną kulę i wyrzucono bez oglądania. Znaleźć prawdopodobieństwo, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą.
6. Jest n monet, ale k z nich jest asymetrycznych i orzeł wypada na nich dwa razy rzadziej niż reszka. Wybrano losowo monetę i w wyniku rzutu wypadł orzeł. Znaleźć prawdopodobieństwo warunkowe, że moneta jest asymetryczna.
7. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się skonstruować trójkąt.
8. Na płaszczyźnie jest nieskończenie wiele prostych równoległych, w odległościach na przemian 2 i 10. Na płaszczyznę rzucono okrąg o promieniu 3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że nie przetnie on żadnej prostej

-
9. Wybrano losowo rodzinę z dwojgiem dzieci i okazało się, że jedno z dzieci ma na imię Franek. Jeśli p oznacza prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chłopiec ma na imię Franek, wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że drugie dziecko jest chłopcem.
 10. (igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geq l$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski.
 11. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $2r < a$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że: (a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól; (b) moneta przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy.
 12. (dylemat więźnia) Naczelnik więzienia postanowił uwolnić jednego z trzech więźniów, o czym dowiedzieli się zainteresowani, ale nie dowiedzieli się, który z nich będzie wolny. Więzień A ma wśród strażników znajomego, który to wie. Chce go zapytać, ale krępuje

się pytać o siebie. Pyta więc o imię jednego z więźniów (różnego od niego), który ma pozostać w więzieniu. Przed zadaniem pytania ocenia, że każdy z nich ma szanse wyjścia równą $1/3$. Myśli, że jeśli strażnik powie na przykład, że zostaje B , to jego szanse rosną do $1/2$ (bo zostaje uwolniony A lub C). Gdzie popełnia błąd?

13. (schemat Pólya) W urnie znajduje się b kul białych i c czarnych. Po wyciągnięciu kuli z urny wrzucamy ją z powrotem i dokładamy d kul tego samego koloru. Znaleźć prawdopodobieństwo wyciągnięcia k kul czarnych w n losowaniach.
14. W urnie jest n kul, przy czym n może być równe 2, 3, 4, 5 z jednakowym prawdopodobieństwem. Kule są ponumerowane liczbami od 1 do n . Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania (z tej samej urny) i zapisujemy cyfry z tych kul w kolejności wylosowania. Zapisana liczba okazała się być mniejsza niż 44. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że n było równe 3.
15. Gracze A i B rzucają niezależnie monetą (niekoniecznie symetryczną). W pojedynczej kolejce gracz A wygrywa 1 od gracza B z prawdopodobieństwem p lub gracz B wygrywa 1 od gracza A z prawdopodobieństwem $1 - p$. Gracze mają kapitały początkowe a i b . Znaleźć prawdopodobieństwo q_a ruiny gracza A , który kończy gdy straci wszystko (ruina) lub gdy będzie miał c ($a \leq c \leq a + b$).

16. (Kontynuacja zadania 22 z listy 2) Niech $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem nieskończonych ciągów zer i jedynek. Niech n -tym wyrazem $\omega \in \Omega$ będzie $a_n(\omega)$, czyli $\omega = (a_k(\omega) \mid k \geq 0)$. Dla skończonego ciągu zer i jedynek $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \{0, 1\}^n$ zbiór

$$[u] := \{\omega \in \Omega \mid a_k(\omega) = u_k, 1 \leq k \leq n\} \quad (1)$$

nazywamy cylindrem rzędu n . Pokazać, że zbiory postaci $[u]$ są jednocześnie otwarte i domknięte w Ω . Rodzina takich zbiorów stanowi bazę topologii w Ω .

17. (kontynuacja poprzedniego zadania) Rozważmy na Ω miarę $\mathbb{P}$ daną przez $\mathbb{P}([u]) = 2^{-n}$, gdzie $[u]$ jest postaci (1). Rozważmy rodzinę zbiorów $\mathcal{C}_0$ składającą się ze zbioru pustego i rozłącznych, skończonych sum $A = \bigcup_{j=1}^k C_j$, gdzie C_j są cylindrami. Połóżmy $\mathbb{P}[A] = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}[C_j]$. Pokaż, że

- (a) $\mathcal{C}_0$ jest ciałem zbiorów;
- (b) zbiór $C \in \mathcal{C}_0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje n i $C' \subseteq \{0, 1\}^n$ takie, że

$$C = C' \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots; \quad (2)$$

- (c) $\mathbb{P}$ jest skończenie addytywna na klasie cylindrów;
- (d) $\mathbb{P}$ jest dobrze określona na $\mathcal{C}_0$ i jest na niej skończenie addytywna;
- (e) dla C postaci (2), $\mathbb{P}[C] = \frac{|C'|}{2^n}$;
- (f) $\mathbb{P}$ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{C}_0$;

Wynioskuj, że $\mathbb{P}$ rozszerza się jednoznacznie do miary probabilistycznej na $\sigma(\mathcal{C}_0) = \mathcal{Bor}(\Omega)$ (patrz zadanie 16).

18. (kontynuacja poprzedniego zadania) Niech $h: \Omega \rightarrow [0, 1]$ będzie dana wzorem

$$h(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\omega)}{2^k}.$$

Sprawdzić, że h jest funkcją ciągłą. Niech $\mu: \mathcal{Bor}[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie dana przez $\mu(A) = \mathbb{P}[h^{-1}[A]]$. Pokazać, że μ jest miarą probabilistyczną. Zidentyfikować μ .

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 4: ZMIENNE LOSOWE, ROZKŁADY I DYSTRYBUANTY

Definicja

Ustalmy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- (i) *Zmienną losową* nazywamy funkcję mierzalną $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{Bor}(\mathbb{R}))$.
 - (ii) *Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X* nazywamy miarę probabilistyczną μ_X na $\mathbb{R}$ daną przez $\mu_X(A) = \mathbb{P}[X^{-1}[A]]$ dla $A \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R})$.
 - (iii) *Dystrybuantą zmiennej losowej X* nazywamy funkcję $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ daną wzorem $F_X(t) = \mu_X((-\infty, t]) = \mathbb{P}[X \leq t]$
 - (iv) Rozkład μ na $\mathbb{R}^n$ nazywamy *dyskretnym*, jeżeli istnieje przeliczalny $S \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $\mu(S) = 1$.
 - (v) Rozkład μ na $\mathbb{R}^n$ nazywamy *ciągłym*, jeżeli jest on absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$.
-

- 1. Zapoznać się z rozdziałami 5.1-5.3 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
- 2. Punkt x nazywamy punktem skokowym rozkładu μ na $\mathbb{R}$ (= miary probabilistycznej na $\mathbb{R}$), gdy $\mu(\{x\}) > 0$. Pokazać, że rozkład prawdopodobieństwa μ może mieć co najwyżej przeliczalną liczbę punktów skokowych. Wskazówka: rozważyć zbiory $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) \geq 1/n\}$.
- 3. Wykazać, że jeżeli μ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^n$, to

$$\mu_j(B) := \mu(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \underbrace{B}_{j\text{-te miejsce}} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}),$$

gdzie $B \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R})$, jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ (nazywamy go (jednowymiarowym) *rozkładem brzegowym* rozkładu μ). Zdefiniować rozkład brzegowy wielowymiarowy.

- 4. Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa μ dana jest wzorem

$$F_\mu(x) = (0.1 + x) \mathbb{1}_{[0,0.5)}(x) + (0.4 + x) \mathbb{1}_{[0.5,0.55)}(x) + \mathbb{1}_{[0.55,\infty)}(x).$$

Wyznaczyć $\mu(\{1/2\})$, $\mu([0, 1/2])$ i $\mu((0, 0.55))$.

- 5. (rozkład geometryczny $Geo(p)$) Wykonujemy doświadczenia Bernoulliego (z prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu p) aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y – czas oczekiwania na pierwszy sukces. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych X i Y , tj. wyznaczyć funkcje $\mathbb{P}[X = k]$ oraz $\mathbb{P}[Y = k]$.

6. Niech F_1, F_2 będą jednowymiarowymi dystrybuantami. Sprawdzić, czy następujące funkcje są jednowymiarowymi dystrybuantami: (a) $F_1 F_2$; (b) $F_1 + F_2$; (c) $F_1 - F_2$; (d) F_1 / F_2 ; (e) $\max(F_1, F_2)$; (f) $\min(F_1, F_2)$.
7. Niech μ_1 będzie rozkładem jednostajnym na $[0, 1]$, $\mathcal{U}[0, 1]$ (= miara Lebesgue'a na $[0, 1]$), a μ_2 rozkładem *jednopunktowym* (*delta Diraca*) skupionym w zerze ($\mu_2(\{0\}) = 1$). Pokazać, że $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ nie jest rozkładem dyskretnym, ani ciągłym.
8. Rozmieszczamy losowo n kul w k urnach. Znaleźć rozkład liczby kul w pierwszej urnie. Rozpatrzyć przypadek rozróżnialnych jak i nierozróżnialnych kul. Znaleźć rozkłady graniczne dla $k \rightarrow \infty$ gdy $\frac{n}{k} \rightarrow \lambda > 0$. Co to za rozkłady?
9. (rozkład wykładniczy $\text{Exp}(\lambda)$) Przypuśćmy, że doświadczenia opisane w zadaniu 5 wykonuje się n razy na sekundę, zaś prawdopodobieństwo sukcesu wynosi λ/n , $\lambda > 0$, a czas oczekiwania na pierwszy sukces, X_n , mierzy się w sekundach. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X_n i zbadać jej zachowanie gdy $n \rightarrow \infty$.
10. Udowodnić, że rozkład μ na $\mathbb{R}^n$ jest dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \leq n$ rozkład brzegowy μ_j jest dyskretny.
11. Udowodnić, że jeżeli rozkład μ jest ciągły, to wszystkie rozkłady brzegowe są ciągłe. Podać przykład, że implikacja odwrotna nie zachodzi. Jest to również przykład na to, że znajomość rozkładów brzegowych nie wystarcza do odtworzenia pierwotnego rozkładu.
12. Niech F będzie dystrybuantą na $\mathbb{R}$
 - (a) Sprawdzić, że funkcja $F^{-1}(s) = \inf\{u : F(u) \geq s\}$ jest dobrze określona na $(0, 1)$. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$. Udowodnić, że $Y = F^{-1}(X)$ ma rozkład o dystrybuancie F (tak zdefiniowana funkcja F^{-1} nazywa się *funkcją kwantylową*).
 - (b) Niech Y będzie zmienną losową o ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuancie F_Y . Pokazać, że zmienna losowa $X = F_Y(Y)$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0, 1]$.

13. (kontynuacja zadania 18 z listy 3) Niech $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem nieskończonych ciągów zer i jedynek. Niech n -tym wyrazem $\omega \in \Omega$ będzie $a_n(\omega)$, czyli $\omega = (a_k(\omega) \mid k \geq 0)$. Dla $\omega, \theta \in \Omega$ określamy działanie

$$\omega \oplus \theta = ((a_k(\omega) + a_k(\theta))_{\text{mod } 2} \mid k \geq 0).$$

Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą z zadania 17 z listy 2. Pokazać, że dla każdego $A \in \mathcal{Bor}(\Omega)$ i dla każdej $\omega \in \Omega$ zbiór

$$\omega \oplus A = \{\omega \oplus a \mid a \in A\}$$

jest elementem $\mathcal{Bor}(\Omega)$ oraz $\mathbb{P}[\omega \oplus A] = \mathbb{P}[A]$. Mówimy, że $\mathbb{P}$ jest miarą Haara na Ω .

14. (kontynuacja poprzedniego zadania) Zbiór borelowski $A \subseteq \Omega$ jest nazywany zdarzeniem resztowym jeżeli $\omega \oplus A = A$ dla dowolnego $\omega \in \Omega$, dla którego $a_k(\omega) = 0$ dla prawie wszystkich k . Udowodnić, że $\mathbb{P}[A] = 0$ lub $\mathbb{P}[A] = 1$ dla każdego zdarzenia resztowego (jest tzw. prawo 0-1 Kołmogorowa). Wskazówka: Jeżeli A jest takim zdarzeniem to $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C]$ dla każdego $C \in \mathcal{C}_0$; skorzystać z tego, że wielkość $\mathbb{P}[A \triangle C]$ może być dowolnie mała.
15. (kontynuacja poprzedniego zadania) Pokazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ funkcje $a_n: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ są zmiennymi losowymi. Pokazać, że mają one taki sam rozkład oraz $\mathbb{P}[a_n = i, a_k = j] = \mathbb{P}[a_n = i]\mathbb{P}[a_k = j]$ dla $n \neq k$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 5: GĘSTOŚĆ, PARAMETRY ROZKŁADÓW I SCHEMAT BERNOULLIEGO

1. Zapoznać się z rozdziałami 5.4-5.6 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. Niech (X, Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o rozkładzie łącznym μ . Korzystając z faktu, że dla dowolnej borelowskiej funkcji $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \mu(dx, dy),$$

uzasadnić wzory:

- (a) $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \mu(dx, dy)$ dla borelowskiej funkcji $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- (b) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^2} x \mu(dx, dy)$;
- (c) $\text{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 \mu(dx, dy) - \left(\int_{\mathbb{R}^2} x \mu(dx, dy)\right)^2$;
- (d) $\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy \mu(dx, dy)$;
- (e) $\text{Cov}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \mu(dx, dy) - \left(\int_{\mathbb{R}^2} x \mu(dx, dy)\right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} y \mu(dx, dy)\right)$

Zauważyć, że jeżeli (X, Y) ma rozkład ciągły z gęstością f , to „ $\mu(dx, dy) = f(x, y)dx dy$ ”, a jeżeli (X, Y) ma rozkład dyskretny $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{i,j}$ dla $i, j \in I$, to „ $\mu(dx, dy) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ ”. Zapisać wszystkie powyższe wzory w postaci odpowiednich całek za pomocą f w przypadku ciągłym, a w postaci odpowiednich sum za pomocą $p_{i,j}$ w przypadku dyskretnym.

3. Pokazać, że jeżeli wektor losowy $\mathbf{X}$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$ ma rozkład ciągły z gęstością f_X , S jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, takim że $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in S) = 1$, $\varphi: S \rightarrow T \subset \mathbb{R}^n$ jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem klasy C^1 , $J_\varphi \neq 0$, to gęstość wektora losowego $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$ ma postać

$$f_Y(\mathbf{y}) = f_X(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) \cdot \det(J_{\varphi^{-1}}(\mathbf{y})) \quad \text{dla } \mathbf{y} \in \varphi(S).$$

W szczególności jeżeli φ jest odwracalnym przekształceniem liniowym o macierzy A , to gęstość wektora losowego $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ ma postać

$$f_Y(\mathbf{y}) = f_X(A^{-1}(\mathbf{y})) / \det(A) \quad \text{dla } \mathbf{y} \in \varphi(S).$$

4. Znaleźć minimum funkcji $\varphi(t) = \mathbb{E}[(X - t)^2]$, gdzie X jest zmienną losową mającą wariancję.
5. Wykonujemy doświadczenia Bernoulliego (z prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu p) aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y – czas oczekiwania na pierwszy sukces. Wyznaczyć wartości oczekiwane zmiennych X i Y . Wskazówka: zróżniczkuj obustronnie wzór $\sum_{k=0}^n x^k = (x^{n+1} - 1)/(x - 1)$.

-
6. Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej (nieparzystej) liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p .

7. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X , a f jej gęstością. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości zmiennych losowych: (a) $aX + b$ dla $a \neq 0$; (b) $|X|$; (c) X^2 ; (d) X^3 ; (e) $\sqrt{X}$ przy założeniu, że $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, (f) $1/X$ i $1/|X|$ przy założeniu, że $\mathbb{P}(X = 0) = 0$; (g) $\sin(X)$; (h) $[X]$ i $X - [X]$.
8. Wykaż, że
- (a) jeżeli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t) dt$ przy czym istnienie jednej strony implikuje istnienie drugiej i ich równość;
 - (b) jeżeli X jest dowolną zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej i dystrybuancie F , to $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F(t)) dt - \int_{-\infty}^0 F(t) dt$.
9. Udowodnić, że jeżeli $X \geq 0$, φ jest rosnącą i różniczkowalną, $\varphi(0) = 0$, to $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_0^\infty \varphi'(t) \mathbb{P}(X > t) dt$. W szczególności, jeżeli $r > 0$, to $\mathbb{E}[X^r] = \int_0^\infty r t^{r-1} \mathbb{P}(X > t) dt$.
10. Udowodnić, że jeżeli $X \geq 0$, to $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{E}[X] \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n)$.
11. Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapalek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie k zapalek. W chwili początkowej matematyk ma dwa pełne pudełka z m zapalkami w każdym.
12. (własności wariancji i kowariancji)
- (a) Wykazać, że jeżeli X jest zmienną losową, taką, że $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, to istnieje $\text{Var}[X]$ oraz:
 - i. $\text{Var}[X] \geq 0$;
 - ii. $\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$;
 - iii. $\text{Var}[X + a] = \text{Var}[X]$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$;
 - iv. $\text{Var}[X] = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa X jest stała z prawdopodobieństwem 1.
 - (b) Wykazać, że jeżeli zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ mają wariancję, to istnieje wariancja ich sumy oraz
- $$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$
13. Niech $\mathbf{X}$ będzie wektorem losowym n -wymiarowym (pionowym), A – macierzą $p \times n$, B – macierzą $p \times m$. Sprawdzić, że:
- (a) jeżeli $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$ istnieje, to $\mathbb{E}[A\mathbf{X}] = A\mathbb{E}[\mathbf{X}]$, $\mathbb{E}[A\mathbf{X}B] = A\mathbb{E}[\mathbf{X}]B$;
 - (b) jeżeli macierz kowariancji Q_X istnieje, to $Q_{A\mathbf{X}} = A Q_X A'$.
- Korzystając z (b), udowodnić podpunkt (b) z poprzedniego zadania.

14. Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p . Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby sukcesów podzielnej przez 3?
15. (kontynuacja zadania 15 z listy 4) Pokazać, że funkcje $a_n: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$ są stochastycznie niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie. Niech $\mathbf{P}$ będzie zbiorem liczb pierwszych. Pokazać, że dla $p \in \mathbf{P}$, $U_p = \sum_{k \geq 1} a_{pk} 2^{-k}$ są stochastycznie niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$ (zadanie 18 lista 3). Wywnioskować z zadania 12 z listy 4, że dla dowolnego ciągu dystrybuant $(F_p)_{p \in \mathbf{P}}$ istnieje ciąg stochastycznie niezależnych zmiennych losowych $(X_p)_{p \in \mathbf{P}}$ określonych na $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że X_p ma rozkład o dystrybuancie F_p .

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 6: PRZEGLĄD WAŻNIEJSZYCH ROZKŁADÓW

1. Zapoznać się z rozdziałem 5.10 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. (*delta Diraca*) Załóżmy, że X ma rozkład δ_a ($a \in \mathbb{R}$). Pokaż, że
- (a) $\mathbb{P}[X = a] = 1$; (c) $\mathbb{E}[X] = a$;
(b) $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{1}_{[a, \infty)}(t)$; (d) $\text{Var}[X] = 0$.

3. (*rozkład dwumianowy (Bernoulliego)* $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}_+$, $p \in [0, 1]$) Niech X oznacza liczbę sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu równym p . Pokazać, że
- (a) $\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$; (c) $\text{Var}[X] = np(1 - p)$.
(b) $\mathbb{E}[X] = np$;

Wskazówka: różniczkując wzór dwumianowy Newtona wywnioskować, że $\sum_k \binom{n}{k} k x^k y^{n-k} = nx(x + y)^{n-1}$.

4. (*rozkład jednostajny* $\mathcal{U}[a, b]$ $a < b \in \mathbb{R}$) Pokazać, że funkcja $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, a następnie sprawdzić tożsamości dla zmiennej losowej X o gęstości f_X
- (a) $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$; (b) $\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

-
5. (*rozkład dwupunktowy*) Załóżmy, że X ma rozkład $p\delta_a + (1 - p)\delta_b$, gdzie $a \neq b$, $p \in (0, 1)$. Sprawdź, że

(a) $\mathbb{P}[X = a] = p$, $\mathbb{P}[X = b] = 1 - p$; (c) $\text{Var}[X] = (b - a)^2 p(1 - p)$.
(b) $\mathbb{E}[X] = ap + b(1 - p)$;

6. (*rozkład Poissona* $\mathcal{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$) Pokazać, że funkcja $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k \in \mathbb{N}$ definiuje rozkład prawdopodobieństwa, a następnie sprawdzić tożsamości

(a) $\mathbb{E}[X] = \lambda$; (b) $\text{Var}[X] = \lambda$.

7. (*rozkład geometryczny* $\mathcal{Geo}(p)$, $p \in (0, 1)$) Sprawdzić, że funkcja $\mathbb{P}[X = k] = p(1 - p)^{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}_+$ definiuje rozkład prawdopodobieństwa, a następnie sprawdzić tożsamości

(a) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$; (b) $\text{Var}[X] = \frac{(1-p)}{p^2}$.

8. (*rozkład wykładniczy* $\mathcal{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$) Pokazać, że funkcja $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, a następnie sprawdzić tożsamości dla zmiennej losowej X o gęstości f_X

$$(a) \mathbb{P}[X \leq t] = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t) (1 - e^{-\lambda t}); \quad (c) \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$(b) \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda};$$

9. (rozkład dwustronny wykładniczy (Laplace'a) $\lambda > 0$): Pokazać, że funkcja $f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, a następnie sprawdzić tożsamości dla zmiennej losowej X o gęstości f_X :

$$(a) \mathbb{E}[X] = 0; \quad (b) \text{Var}[X] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

10. (rozkład normalny (Gaussa)) Pokazać, że funkcja $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, a następnie sprawdzić tożsamości na wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X :

$$(a) \mathbb{E}[X] = 0; \quad (b) \text{Var}[X] = 1.$$

Wskazówka: $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$

11. (rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$)) Niech Φ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X z poprzedniego zadanie. Rozpatrując zmienną losową $Y = \sigma X + m$ pokazać, że funkcja $f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, a następnie wyznaczyć dystrybuantę i sprawdzić tożsamości na wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej Y :

$$(a) \mathbb{E}[Y] = m; \quad (b) \text{Var}[Y] = \sigma^2.$$

12. (rozkład gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$) Pokaż, że funkcja

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \quad \text{gdzie} \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx;$$

jest gęstością prawdopodobieństwa, a następnie sprawdź, że

$$(a) \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}; \quad (b) \text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

13. (rozkład beta $B(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$) Pokaż, że funkcja

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{gdzie} \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)};$$

jest gęstością prawdopodobieństwa, a następnie sprawdź, że

$$(a) \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}; \quad (b) \text{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

14. X, Y mają jednakowy rozkład. Czy prawdą jest, że $\mathbb{E}\left[\frac{X}{X+Y}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+Y}\right]$?

15. (kontynuacja zadania 19 z listy 2) Sprawdzić, że algebra miary $\mathfrak{B}$ jest przestrzenią metryczną, gdzie metrykę zadajemy wzorem $d([A], [B]) = \mathbb{P}[A \triangle B]$. Udowodnić, że metryka ta jest zupełna.

16. (kontynuacja poprzedniego zadania) Niech miara $\mathbf{Q}$ będzie absolutnie ciągła względem miary $\mathbb{P}$. Pokazać, że funkcja $\mathcal{Q}: \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$ dana wzorem $\mathcal{Q}([A]) = \mathbf{Q}(A)$ jest dobrze określona i jednostajnie ciągła.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 7: POWTÓRKA PRZED KOŁOKWIUM

1. Zapoznać się z rozdziałami 1.1-5.10 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. Wybieramy losowo liczbę naturalną z przedziału $[1, 1000]$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrana liczba jest podzielna przez co najmniej jedną z liczb: 4, 6, 9.
3. Co jest bardziej prawdopodobne: otrzymanie co najmniej jednej jedynek przy rzucie 4 kostek, czy co najmniej raz dwóch jedynek na obu kostkach przy 24 rzutach obu kostek
4. Każda z n pałek została złamana na dwie części – długą i krótką. $2n$ części połączono w n par, z których utworzono nowe pałki. Znaleźć prawdopodobieństwo, że (a) części zostaną połączone w takich samych kombinacjach jak przed złamaniem; (b) wszystkie długie części zostaną połączone z krótkimi.
5. Grupa składająca się z $2n$ pań i $2n$ panów została podzielona na dwie równoliczne grupy. Znaleźć prawdopodobieństwo, że każda z tych grup składa się z takiej samej liczby pań i panów. Przybliżyć to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.
6. Na odcinku $[0, 1]$ umieszczono losowo punkty A_1 , A_2 i A_3 . Obliczyć prawdopodobieństwo, że $A_1 \leq A_2 \leq A_3$.
7. Z przedziału $[-1, 1]$ wybrano losowo punkty A i B . Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = (A + 1)x^2 + 2Bx + 1$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że (a) $f(x) > A$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$; (b) suma rozwiązań równania $f(x) = 0$ jest dodatnia.
8. W jednej urnie jest k_1 kul białych i n_1 czarnych, w drugiej k_2 kul białych i n_2 czarnych. Nie wiadomo, która urna jest która. Należy wylosować bez zwracania po kolei dwie kule tak, by szansa otrzymania dwóch kul białych była największa. Jaka powinna być procedura losowania? Zakładamy, że k_1 , n_1 , k_2 i n_2 są stosunkowo duże.
9. W turnieju (system turniejowy) wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Znaleźć prawdopodobieństwo, że się spotkają w pojedynku.
10. W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15% samochodów). Świadek nocnego wypadku twierdzi, że samochód był niebieski. Jednak świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że w wypadku uczestniczyła rzeczywiście niebieska taksówka.
11. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną wartość k , zajścia dokładnie k sukcesów w n próbach Bernoulliego (z prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu p).
12. Znaleźć prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych suma oczek 8 wypadnie przed sumą oczek 7.
13. Niech Q będzie wielomianem rzeczywistym stopnia $2n$ o losowych współczynnikach. Każdy współczynnik jest losowany niezależnie i może wynieść 1 z prawdopodobieństwem p oraz -1 z prawdopodobieństwem $1 - p$. Znaleźć: (a) $\mathbb{P}[Q(2) > 0]$; (b) $\mathbb{P}[Q(1) > 0]$; (c) $\mathbb{P}[Q(2) > 0 | Q(1) > 0]$.

14. Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$. Wykazać, że x_0 jest punktem skokowym μ wtedy i tylko wtedy, gdy dystrybuenta F_μ jest nieciągła w x_0 .
15. Z urny, w której jest 6 kul czarnych i 4 białe losujemy kolejno bez zwracania po jednej kuli tak długo, aż wylosujemy kulę czarną. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wylosowanych kul białych.
16. Rzucamy sześcienną kostką aż do momentu, gdy wypadną pod rząd dwie „szóstki”. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.
17. (rozkład Cauchy’ego, $\lambda > 0, m \in \mathbb{R}$) Pokazać, że funkcja $f_X(x) = \frac{\lambda}{\pi((x-m)^2 + \lambda^2)}$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, a następnie wyznaczyć dystrybuentę i sprawdzić, że nie istnieje wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej X .
18. Podaj przykład dystrybuenty, której zbiór punktów nieciągłości jest gęsty w $\mathbb{R}$.
19. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz gęstości zmiennych $Y = e^X$, $Z = X^2$.
20. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki: $\text{Var}[X] = 3$, $\text{Cov}(X, Y) = -1$, $\text{Var}[Y] = 2$. Oblicz $\text{Var}[4X - 3Y]$ oraz $\text{Cov}(2X - Y, 2X + Y)$.
21. Zdarzenia A i B są niezależne oraz $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $\mathbb{P}(A) = 1$ lub $\mathbb{P}(B) = 1$.
22. Zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p . Znaleźć prawdopodobieństwo, że:

(a) zajdą wszystkie naraz;	(d) zajdzie tylko A_n ;
(b) nie zajdzie żadne;	(e) zajdzie A_1 i nie zajdzie A_3 ;
(c) zajdzie dokładnie jedno;	(f) zajdzie przynajmniej jedno.
23. Rzucono 10 razy sześcienną kostką. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeżeli wiadomo, że

(a) otrzymano 3 szóstki;	(b) w następnych 9-ci rzutach otrzymano szóstki.
--------------------------	--
24. Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ będą niezależnymi zdarzeniami o jednakowym prawdopodobieństwie p_n . Przy pomocy nierówności Boole’a oraz nierówności Bonferroniego (lista 2 zadania 13 i 15) oszacować (z góry i z dołu)

$$\mathbf{P}_n = \frac{\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^n A_i]}{np_n}.$$

Jak sprawdza się to szacowanie dla $p_n = 1/n$? Jak się sprawdza dla $p_n < 1/n$? Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n$ w przypadku, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 0$.

25. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p , niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l . Wskazówka: Skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.
 26. Szansa wygrania pojedynczej partii gry przez gracza A wynosi p i do zakończenia całej gry brakuje mu a wygranych partii, a jemu przeciwnikowi brakuje b wygranych partii. Niestety, pojedynkę musi zostać przerwany. Jak sprawiedliwie podzielić stawkę?
-

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 8: NIERÓWNOŚCI, NIEZALEŻNE ZMIENNE I SPLOTY

1. Zapoznać się z rozdziałami 5.7-5.9 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
 2. (nierówność Schwarz) Załóżmy, że $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Pokaż, że $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ oraz $\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$. Wskazówka: rozważyć funkcję $f(a) = \mathbb{E}[(aX + Y)^2]$.
 3. Korzystając z nierówności Czebyszewa (zadanie 8) dobierając odpowiednie funkcje g udowodnić nierówności:
 - (a) (nierówność Markowa) dla $p > 0$ i każdego $\epsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{P}[|X| \geq \epsilon] \leq \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\epsilon^p}$;
 - (b) (nierówność Czebyszewa-Biernaymé) dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon^2}$;
 - (c) (wykładnicza nierówność Czebyszewa) jeżeli $\mathbb{E}[e^{pX}] < \infty$ dla pewnego $p > 0$, to dla każdego $\lambda \in [0, p]$ i $\epsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{P}[X \geq \epsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda \epsilon}}$.
 4. Przy pomocy nierówności Jensena (zadanie 10) pokaż, że jeżeli $0 < p < q$, to $(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}|X|^q)^{1/q}$.
 5. Niech $X_0, X_1, \dots, X_7$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym $\mathcal{B}(1, p)$ (tzn. $p = \mathbb{P}[X_k = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_k = 0]$). Zmienne $X_0, X_1, \dots, X_7$ traktujemy jako cyfry w zapisie binarnym liczby $X = \sum_{k=0}^7 2^k X_k$ ze zbioru $\{0, 1, \dots, 255\}$. Obliczyć:
 - (a) $\mathbb{E}[X]$ oraz $\text{Var}[X]$;
 - (b) $\mathbb{P}[X \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}]$.
 6. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych $\mathcal{Exp}(\alpha)$ i $\mathcal{Exp}(\beta)$ odpowiednio. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.
 7. (rozkład chi-kwadrat) Niech $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Pokazać, że zmienna losowa X^2 ma rozkład $\Gamma(1/2, 2)$. Z zadania 14 wywnioskować, że zmienna losowa $\sum_{k=1}^n X_k^2$ ma rozkład $\Gamma(n/2, 2) = \chi^2(n)$. Rozkład ten nazywany jest rozkładem chi-kwadrat z n stopniami swobody.
-
8. (nierówność Czebyszewa) Pokaż, że
 - (a) dla $X \geq 0$ i każdego $\epsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{P}[X \geq \epsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\epsilon}$;
 - (b) jeżeli g jest niemalejąca i dodatnia, to dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(a)}$;
 - (c) jeżeli g jest parzysta, niemalejąca na $[0, \infty)$ i dodatnia, to dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{P}[|X| \geq \epsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(\epsilon)}$.
 9. (nierówność Höldera) Udowodnić, że jeżeli $p > 1, q > 1$ spełniają $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \mathbb{E}[|X|^p] < \infty, \mathbb{E}[|Y|^q] < \infty$, to $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ oraz $\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$.
 10. (nierówność Jensena) Pokazać, że jeżeli φ jest funkcją wypukłą to $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

11. (nierówność Minkowskiego) Udowodnić, że jeżeli $p \geq 1$, to $\mathbb{E}[|X + Y|^p]^{1/p} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} + \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p}$.
12. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach z dystrybuantami $F_1, F_2, \dots, F_n$ odpowiednio. Znaleźć dystrybuanty zmiennych losowych $Y = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ oraz $Z = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Znaleźć dystrybuanty i gęstości Y, Z w przypadku, gdy $X_1, X_2, \dots, X_n$ mają jednakowy rozkład ciągły z dystrybuantą F i gęstością f .
13. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi mającymi wariancję. Wyznaczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych losowych $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ oraz $Z = \prod_{i=1}^n X_i$. Zastosować wynik dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = m$ oraz $\text{Var}[X_1] = \sigma^2$.
14. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\Gamma(\alpha_X, \beta)$ i $\Gamma(\alpha_Y, \beta)$ odpowiednio. Pokazać, że $Z = X + Y$ ma rozkład $\Gamma(\alpha_X + \alpha_Y, \beta)$.

15. (rozkład Erlanga) Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym $\mathcal{Exp}(\lambda)$. Udowodnić, że zmienna losowa $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład gamma $\Gamma(\lambda, n)$ o następującej gęstości g_n i dystrybuancie G_n :

$$g_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \quad G_n(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \quad \text{dla } x > 0.$$

16. („nieróżnowartościowa” wersja zadania 9 z listy 6) Niech $\mathbf{X}$ będzie wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^n$ z gęstością $f_{\mathbf{X}}$ taką, że $\mathbb{P}[\mathbf{X} \in \bigcup_{i=1}^r A_i] = 1$ dla pewnych $A_1, A_2, \dots, A_r$ będącymi parami rozłącznymi zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^n$. Niech $\varphi: \bigcup_{i=1}^r A_i \rightarrow T \subset \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem takim, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, r$ obcięcie $\varphi_i := \varphi|_{A_i}$ jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem klasy C^1 oraz $J_{\varphi_i} \neq 0$. Pokazać, że gęstość wektora losowego $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$ ma postać

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^r f_{\mathbf{X}}(\varphi_i^{-1}(\mathbf{y})) \cdot \det(J_{\varphi_i^{-1}}(\mathbf{y})) \cdot \mathbb{1}_{\varphi(A_i)}(\mathbf{y}) \quad \text{dla } \mathbf{y} \in \varphi\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right).$$

17. (transformata Boxa-Müllera) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$. Niech

$$U = \sqrt{-2 \log X} \cos(2\pi Y), \quad V = \sqrt{-2 \log X} \sin(2\pi Y),$$

a następnie pokazać, że U, V są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Wskazówka: Ostrożnie skorzystać z poprzedniego zadania.

18. (całkowa nierówność Minkowskiego) Dla $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p \geq 1$ i rozkładów μ i ν

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x, y) \nu(dy) \right|^p \mu(dx) \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x, y)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} \nu(dy)$$

Wskazówka: zacznij od funkcji postaci $g(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \mathbb{1}_{F_k}(y)$ i zastosuj zadanie 11.

19. (nierówność Chernoffa) Mamy $\mathbb{P}[X \geq c] \leq \min_{t \geq 0} \mathbb{E}[e^{tX - tc}]$ dla dowolnej zmiennej X (patrz zadanie 3). Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie 0/1-kowym, przy czym $\mathbb{P}[X_i = 1] = p_i = 1 - q_i$. Niech ponadto $X = \sum_{k=1}^n X_k$ i $\mu = \mathbb{E}[X]$. Pokazać, że:
- (a) dla $\delta > 0$, $\mathbb{P}[X > (1 + \delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1 + \delta}} \right)^\mu$; (b) dla $\delta \in [0, 1)$, $\mathbb{P}[X > (1 + \delta)] \leq e^{-\mu\delta^2/3}$;
(c) dla $\delta > 2\mu e$, $\mathbb{P}[X > \delta] \leq e^{-\delta}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 9: WŁASNOŚCI WAŻNIEJSZYCH ROZKŁADÓW

1. Zapoznać się z rozdziałem 5.10 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
 2. (a) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Pokazać, że zmienna losowa $Y = aX + b$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.
(b) Niech $\mathbf{X}$ będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{m}, Q_X)$. Pokazać, że wektor losowy $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(A\mathbf{m} + \mathbf{b}, AQ_XA')$.
 3. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$. Pokazać, że zmienna losowa $Y = -\frac{\log X}{\lambda}$, gdzie $\lambda > 0$, ma rozkład wykładniczy $\text{Exp}(\lambda)$.
 4. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$, natomiast Y będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[a, b]$ ($a < b$). Pokazać, że Y ma taki sam rozkład co $(b - a)X + a$.
 5. (rozkład Weibulla $W(\lambda, \beta)$) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(\lambda)$. Znaleźć dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Y = X^{1/\beta}$ dla $\beta > 0$.
-

6. (wielowymiarowy rozkład normalny)

- (a) Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$, gdzie I jest macierzą identyczności, z gęstością

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sprawdzić, że $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$.

- (b) (wielowymiarowy rozkład normalny) Niech $\mathbf{Y}$ będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{m}, Q_Y)$, gdzie Q_Y jest dodatnio określoną macierzą kowariancji, z gęstością

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det(Q_Y)} (\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle Q_Y^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}), \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle\right) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Pokazać, że $\mathbf{Y}$ ma taki sam rozkład co $B\mathbf{X} + \mathbf{m}$, gdzie B jest kwadratową macierzą taką, że $BB' = Q_Y$.

Wskazówka: Skorzystać z zadań 3 i 13 z listy 5.

7. (własności wielowymiarowego rozkładu normalnego)

- (a) Niech (X, Y) będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym z nieskorelowanymi współzrędnymi X, Y (tzn. $\text{Cov}(X, Y) = 0$). Wykazać, że X, Y są niezależne.
- (b) Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym z wzajemnie nieskorelowanymi współzrędnymi $X_1, X_2, \dots, X_n$. Wykazać, że $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne.

- (c) Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{m}, Q_X)$. Wykazać, że $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne, wtedy i tylko wtedy, gdy Q_X jest macierzą diagonalną.
- (d) Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$. Wykazać, że jeżeli A jest kwadratową macierzą ortonormalną, to $Y = A\mathbf{X}$ jest również wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$.
- (e) Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$. Wykazać, że jeżeli A jest kwadratową macierzą ortogonalną (niekoniecznie ortonormalną), to $Y = A\mathbf{X}$ jest wektorem losowym o wzajemnie niezależnych współrzędnych $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.
8. Niech Φ będzie dystrybucją, a φ gęstością standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykazać, że dla każdego $x > 0$ zachodzi $\frac{x\varphi(x)}{1+x^2} < 1 - \Phi(x) = \Phi(-x) < \frac{\varphi(x)}{x}$, a w szczególności $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\Phi(-x)}{\varphi(x)} = 1$.
9. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathcal{N}(0, 1)$ i $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ odpowiednio. Pokazać, że $Z = YX$ ma rozkład standardowy rozkład normalny. Pokazać, że $X + Z$ nie ma rozkładu normalnego. Dlaczego tak się dzieje?
10. Wykazać, że rozkład geometryczny $\text{Geo}(p)$ (w jednej z podanych wersji) i wykładniczy $\text{Exp}(\lambda)$ mają następującą własność *braku pamięci* zwaną też *własnością Markowa*:

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s),$$

gdzie w przypadku rozkładu ciągłego $t, s \in \mathbb{R}_+$, a dyskretnego $t, s \in \mathbb{N}$. Wykazać, że jedynym rozkładem ciągłym na $[0, \infty)$ z własnością braku pamięci jest wykładniczy, a jedynym skupionym na liczbach naturalnych – geometryczny.

11. Pokazać, że jeżeli X_1, X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona $\text{Poi}(\lambda_1), \text{Poi}(\lambda_2)$ odpowiednio, to $Y = X_1 + X_2$ ma rozkład Poissona $\text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$. W szczególności, jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona $\text{Poi}(\lambda_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ odpowiednio, to $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład Poissona $\text{Poi}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.

12. Niech X będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}[|X|^p]$ dla $p > 0$. Wyznaczyć momenty $\mathbb{E}[X^n]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ oraz momenty $\mathbb{E}[Y^n]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, gdzie Y jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
13. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(\lambda)$. Niech $S_0 = 0$ oraz $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Dla $t > 0$ definiujemy zmienną losową $N_t := \max\{n : S_n \leq t\}$. Pokazać, że N_t ma rozkład Poissona $\text{Poi}(\lambda t)$. Wskazówka: zadanie 15 z listy 8.
14. (rozkład Studenta $t(n)$) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$, chi-kwadrat $\chi^2(n)$ odpowiednio. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$.
15. (rozkład Fishera-Snedecora $F(n, r)$) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat $\chi^2(n), \chi^2(r)$ odpowiednio. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Z = \frac{rX}{nY}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 10: ZBIEŻNOŚCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

1. Zapoznać się z rozdziałami 4.3 i 7.1-7.6 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$, jeżeli $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:
 - (a) $\mathbb{P}[X_n = 2^{-n}] = \mathbb{P}[X_n = 0] = 1/2$;
 - (b) $\mathbb{P}[X_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0] = 1/n$;
 - (c) $\mathbb{P}[X_n = n^{-\alpha}] = \mathbb{P}[X_n = -n^{-\alpha}] = 1/2$ dla $\alpha > 0$;
 - (d) $\mathbb{P}[X_n = a_n] = \mathbb{P}[X_n = -a_n] = 1/2$ dla pewnego ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
3. Niech $\mathbb{P}[X_n = n] = \mathbb{P}[X_n = -n] = \frac{1}{n^3}$, $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{2}{n^3}$. Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n., chociaż $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}[X_n] = \infty$.
4. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:

$$\mathbb{P}[X_n = n+1] = \mathbb{P}[X_n = -(n+1)] = \frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}, \quad \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}.$$

Pokazać, że ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia SPWL, a nie spełnia MPWL.

5. Zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń A_n .
6. Sprawdzić, że następujące zdarzenia należą do $\mathcal{F}_{\infty}$:
 - (a) $\{\text{istnieje skończona granica } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n\}$;
 - (b) $\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty\}$;
 - (c) $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\}$.
7. (*dystrybuanta empiryczna*) Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F . Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy zmienną losową

$$F_n(x)(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}(\omega).$$

Pokazać, że $F_n(x) \xrightarrow{\text{p.n.}} F(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

-
8. Rzucamy nieskończenie wiele razy niesymetryczną monetą (z prawdopodobieństwem wyrzucenia orła $\frac{1}{2} \neq p \in (0, 1)$ w pojedynczym rzucie). Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach było tyle samo orłów, co reszek. Pokazać, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi tylko skończona liczba zdarzeń A_n .
 9. Niech $X, X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem stochastycznie niezależnych, nieujemnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie.
 - (a) Pokaż, że jeżeli $\mathbb{E}[X] < \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0$ p.w.

- (b) Pokaż, że jeżeli $\mathbb{E}[X] = \infty$, to $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \infty$ p.w.
10. Pokazać, że jeżeli $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Podać przykład, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.
11. Pokazać, że poniższe fakty są prawdziwe zarówno dla zbieżności prawie na pewno $\xrightarrow{\text{p.n.}}$, jak i dla zbieżności według prawdopodobieństwa $\xrightarrow{\mathbb{P}}$. Jeżeli $X_n \rightarrow X$, $Y_n \rightarrow Y$, to
- $aX_n + bY_n \rightarrow aX + bY$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$;
 - $X_n Y_n \rightarrow XY$;
 - $\mathbb{1}_{\{X_n \neq 0\}} \frac{1}{X_n} \rightarrow \frac{1}{X}$, o ile $\mathbb{P}(X \neq 0) = 1$;
 - $f(X_n, Y_n) \rightarrow f(X, Y)$ dla dowolnej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
12. (nierówność Bernsteina, Mocne prawo wielkich liczb Bernoulliego) Niech S_n będzie liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p . Udowodnić, że dla każdego $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \epsilon \right] \leq 2e^{-n\epsilon^2/4} \quad \text{oraz} \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.n.}} p.$$

13. Niech $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Obliczyć granice:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{\sum_{i=1}^n x_i} dx_1 \dots dx_n$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,1]^n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \dots dx_n$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) dx_1 \dots dx_n$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\sqrt{\prod_{i=1}^n x_i}\right) dx_1 \dots dx_n$.

14. (średnia i wariancja empiryczna) Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\text{Var}[X_1] < \infty$. Definiujemy zmienne losowe

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{oraz} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Sprawdzić, że $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[S^2] = \text{Var}[X_1]$ oraz $\bar{X} \xrightarrow{\text{p.n.}} \mathbb{E}[X_1]$, $S^2 \xrightarrow{\text{p.n.}} \text{Var}[X_1]$.

15. Niech A_n będą zdarzeniami niezależnymi, przy czym $\mathbb{P}[A_n] = p_n \in (0, 1)$. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń A_n wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n .
16. Niech S_n będzie liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p . Pokazać, że dla $p > 1/2$ jest $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty) = 1$, a dla $p < 1/2$ jest $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty) = 1$.
17. (kontynuacja zdania 15 z listy 5) Niech $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem nieskończonych ciągów zer i jedynek. Niech n -tym wyrazem $\omega \in \Omega$ będzie $a_n(\omega)$, czyli $\omega = (a_k(\omega)) | k \geq 0$. Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą z zadania 17 z listy 3. Pokazać, że zachodzi *twierdzenie Borela o liczbach normalnych*

$$\mathbb{P} \left[\omega \in \Omega \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k(\omega) = \frac{1}{2} \right. \right] = 1.$$

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B

LISTA 11: SŁABA ZBIEŻNOŚĆ

1. Zapoznać się z rozdziałami 8.1-8.3 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. Pokazać, że dla dowolnych liczb $x, \{x_n\}_{n=1}^\infty$ zachodzi $\delta_{x_n} \xrightarrow{\text{st}} \delta_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
3. (*Twierdzenie Scheffé'go*) Niech μ będzie miarą σ -skończoną, $f, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ funkcjami nieujemnymi takimi, że dla $n \in \mathbb{N}_+$ miary $\nu(A) = \int_A f d\mu, \nu_n(A) = \int_A f_n d\mu$ są miarami probabilistycznymi. Pokazać, że jeżeli $f_n \xrightarrow{\text{p.n.}} f$ względem miary μ , to

$$\sup_A |\nu(A) - \nu_n(A)| \leq \int_\Omega |f - f_n| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

W szczególności, jeżeli $\mu, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ są rozkładami ciągłymi o gęstościach $f, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ odpowiednio oraz $f_n \xrightarrow{\text{p.n.}} f$ względem miary Lebesgue'a, to $\mu_n \xrightarrow{\text{st}} \mu$.

4. Pokazać, że jeżeli X_n mają rozkłady (przykładowo) $\mathcal{Exp}(\lambda_n)$ i $\lambda_n \rightarrow \lambda$, to X_n zbiegają słabo do rozkładu $\mathcal{Exp}(\lambda)$.
5. Załóżmy, że $(X_n)_n$ zbiegają słabo do X . Pokaż, że

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X].$$

Wskazówka: zadanie 8 z listy 5.

6. Niech $(X_n)_n$ o dystrybuantach $(F_n)_n$ będą zbieżne słabo X o dystrybuancie F . Określić na przestrzeni probabilistycznej $([0, 1], \mathcal{Bor}[0, 1], \lambda_1)$ zmienne losowe $U, (U_n)_n$ o dystrybuantach $F, (F_n)_n$ odpowiednio takie, że U_n zbiega p.w. do U . Wskazówka: zadanie 12 lista 4.

-
7. Wykazać, że jeżeli $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ są zmiennymi losowymi takimi, że $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$. Wskazówka: rozważyć funkcję $f(x) = \min\{1, |x - c|\}$.
 8. Wykazać, że jeżeli $X, \{X_n\}_{n=1}^\infty$ są zmiennymi losowymi takimi, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Podać przykład, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.
 9. Niech $(U_n)_n$ będzie ciągiem stochastycznie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$. Pokaż, że dla $\lambda > 0, X_n = \frac{n}{\lambda} \min_{1 \leq j \leq n} U_j$ zbiega słabo do rozkładu wykładniczego $\mathcal{Exp}(\lambda)$.

10. Udowodnić, że

- (a) jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$;
- (b) jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$.

11. Udowodnić, że

- (a) jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, to $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$;
 (b) jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$, to $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$.
12. Podać przykład zmiennych losowych $X, \{X_n\}_{n=1}^\infty, Y, \{Y_n\}_{n=1}^\infty$ takich, że $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, ale nieprawda, że $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + Y$.
13. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Niech $Y_n = n \min_{1 \leq i \leq n} |X_i|$. Pokazać, że $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, gdzie Y jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Z jakim parametrem?

14. Niech $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, gdzie a jest punktem ciągłości dystrybucyjnej F_X . Pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a_n) = F(a)$.
15. Podać przykład rozkładów $\mu, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ ciągłych o gęstościach $f, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ odpowiednio takich, że $\mu_n \xrightarrow{\text{sł}} \mu$, ale nie jest prawdą, że $f_n \xrightarrow{\text{p.n.}} f$ względem miary Lebesgue'a.
16. (Twierdzenie Banacha o punkcie stałym) Niech (M, ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $f: M \rightarrow M$ spełnia $\rho(f(x), f(y)) < c\rho(x, y)$, gdzie $c < 1$. Pokaż, że równanie $f(x) = x$ ma w M dokładnie jedno rozwiązanie. Wskazówka: rozważ ciąg $(f^n(x))_n$, gdzie f^n oznacza n -krotne złożenie funkcji f .
17. (metryka Wassersteina) Niech $\mathcal{P}^1(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią miar probabilistycznych μ na $\mathbb{R}$ dla których $\int |x| \mu(dx) < \infty$. Pokazać, że $\mathcal{P}^1(\mathbb{R})$ jest zbiorem wypukłym. Dla $\mu, \nu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{R})$ definiujemy

$$d(\mu, \nu) = \inf \{ \mathbb{E}[|X - Y|] \mid X \sim \mu, Y \sim \nu \}.$$

Pokazać, że d jest metryką.

18. (kontynuacja poprzedniego zadania) Zinterpretować $d(\mu, \nu)$ w przypadku $\mu = \sum_k p_k \delta_{a_k}$ i $\nu = \sum_k q_k \delta_{b_k}$.
19. (kontynuacja poprzedniego zadania) Można pokazać, że

$$d(\mu, \nu) = \int_0^1 |F_\mu^{-1}(x) - F_\nu^{-1}(x)| dx.$$

Zauważyć, że nierówność $\leq$ w powyższym wzorze można uzasadnić stosunkowo łatwo. Korzystając z powyższego pokazać, że $d(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_n \xrightarrow{\text{sł}} \mu$ i $\int |x| \mu_n(dx) \rightarrow \int |x| \mu(dx)$.

20. (kontynuacja poprzedniego zadania) Pokazać, że przestrzeń $(\mathcal{P}^1, d)$ jest zupełna.
21. (kontynuacja poprzedniego zadania) Niech $a \in (0, 1)$ i $b \in \mathbb{R}$. Pokazać, że w $\mathcal{P}^1$ istnieje dokładnie jeden rozkład μ taki, że jeżeli X ma rozkład μ , to $aX + b$ również ma rozkład μ . Innymi słowy X i $aX + b$ mają ten sam rozkład μ . Piszemy wtedy

$$X \stackrel{d}{=} aX + b.$$

Wskazówka: Niech $\nu \in \mathcal{P}^1$. Załóżmy, że Y ma rozkład ν . Przez $\mathcal{S}(\nu)$ oznaczmy rozkład zmiennej $aY + b$. Pokazać, że $\mathcal{S}: (\mathcal{P}^1, d) \rightarrow (\mathcal{P}^1, d)$ jest dobrze określone i że spełnione są założenia Twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 12: FUNKCJE CHARAKTERYSTYCZNE

1. Zapoznać się z rozdziałami 9.1-9.3 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
 2. W każdym podpunkcie sprawdzić, że podana funkcja jest funkcją charakterystyczną odpowiedniego rozkładu.
 - (a) Rozkład jednopunktowy (delta Diraca) δ_a ($a \in \mathbb{R}$): $\varphi(t) = e^{ita}$;
 - (b) Rozkład dwupunktowy ($a \neq b \in \mathbb{R}, p \in (0, 1)$): $\varphi(t) = pe^{ita} + (1-p)e^{itb}$;
 - (c) Rozkład Poissona $\text{Poi}(\lambda)$ ($\lambda > 0$): $\varphi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$;
 - (d) Rozkład geometryczny $\text{Geo}(p)$ ($p \in (0, 1)$): $\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$;
 - (e) Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) $\mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}_+, p \in [0, 1]$): $\varphi(t) = (pe^{it} + (1-p))^n$;
 - (f) Rozkład jednostajny $\mathcal{U}[a, b]$ ($a < b \in \mathbb{R}$): $\varphi(t) = e^{ita} \frac{e^{it(b-a)} - 1}{it(b-a)}$;
 - (g) Rozkład wykładniczy $\text{Exp}(\lambda)$ ($\lambda > 0$): $\varphi(t) = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}$;
 - (h) Standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$: $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$;
 - (i) Rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$): $\varphi(t) = e^{itm} \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$;
 - (j) Rozkład gamma $\Gamma(\lambda, \beta)$: $\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\lambda}$;
 3. Wykazać, że jeżeli X i Y są niezależne, to $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
 4. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\Gamma(\alpha_X, \beta)$ i $\Gamma(\alpha_Y, \beta)$ odpowiednio. Pokazać, że $Z = X + Y$ ma rozkład $\Gamma(\alpha_X + \alpha_Y, \beta)$.
 5. Niech X_p będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym $\text{Geo}(p)$. Pokazać, że $2pX_p \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ gdy $p \rightarrow 0$, gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$.
-
6. Udowodnić *twierdzenie Poissona* przy użyciu funkcji charakterystycznych: Jeżeli $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładach dwumianowych $\mathcal{B}(n, p_n)$ odpowiednio oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, to $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie Poissona $\text{Poi}(\lambda)$.
 7. Mówimy, że X jest symetryczna, jeżeli $X \stackrel{d}{=} -X$. Pokazać, że X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy φ_X przyjmuje tylko wartości rzeczywiste.
 8. Załóżmy, że X przyjmuje wartości całkowite. Pokaż, że $\mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \varphi_X(t) dt$.
 9. Zbadać, czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi i jeżeli tak, wyznaczyć odpowiedni rozkład: (a) $\cos t$; (b) $\cos^2 t$; (c) $\frac{1}{4} (1 + e^{it})^2$; (d) $\frac{1 + \cos t}{2}$; (e) $\frac{1}{2 - e^{it}}$.
 10. Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X . Czy funkcja $e^{-t^2/4} \varphi(2t)$ jest funkcją charakterystyczną? Jeżeli tak, to jakiej zmiennej losowej?

11. (rozkłady złożone) Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z funkcją charakterystyczną ϕ . Niech N będzie (niezależną od ciągu $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$) zmienną losową o rozkładzie: $\mathbb{P}[N = n] = p_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Wywnioskować wzór Walda $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N]$.
12. Znaleźć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej S_N z zadania 11 w przypadku, gdy N ma rozkład geometryczny $\mathcal{Geo}(p)$ (wówczas rozkład S_N nazywamy *złożonym rozkładem geometrycznym*) lub Poissona $\mathcal{Poi}(\lambda)$ (wówczas rozkład S_N nazywamy *złożonym rozkładem Poissona*). Następnie znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej losowej S_N .

13. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą stochastycznie niezależne o rozkładach $\mathbb{P}[X_j = \pm j] = (2j)^{-1}$ i $\mathbb{P}[X_j = 0] = 1 - j^{-1}$. Dowieść, że $n^{-1}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ zbiegają słabo do rozkładu o funkcji charakterystycznej

$$\varphi(t) = \exp \int_0^1 (\cos(tx) - 1) \frac{dx}{x}.$$

14. (Kryterium Pólya)

- (a) Pokazać, że każda funkcja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ciągła, parzysta i przedziałami liniowa, na przedziale $[0, \infty)$ wypukła i nierosnąca oraz taka, że $\varphi(0) = 1$ i $\varphi(t) = 0$ dla dostatecznie dużych t , jest funkcją charakterystyczną.
- (b) Pokazać, że każda funkcja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ciągła, parzysta, na przedziale $[0, \infty)$ wypukła i nierosnąca oraz taka, że $\varphi(0) = 1$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, jest funkcją charakterystyczną.
- (c) Pokazać, że funkcja $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leq 1$.
15. Udowodnić, że dla funkcji charakterystycznej φ rozkładu μ następujące warunki są równoważne:
- (a) $\varphi(s) = 1$ dla pewnego $s \neq 0$;
- (b) φ ma okres s ;
- (c) rozkład μ jest skupiony na zbiorze liczb postaci $2\pi k/s$ dla $k \in \mathbb{Z}$.
16. Wykazać, że jeżeli φ jest funkcją charakterystyczną, a F jest dystrybuantą taką, że $F(0-) = 0$, to funkcjami charakterystycznymi są:
- (a) $\int_0^1 \varphi(tu) du$;
- (b) $\int_0^\infty e^{-|t|u} dF(u)$;
- (c) $\int_0^\infty e^{-t^2 u} dF(u)$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 13: CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE

Definicja

Powiemy, że schemat serii $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lindeberga, jeśli dla każdego $r > 0$

$$L_n(r) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} (X_{n,k} - \mathbb{E} X_{n,k})^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k} - \mathbb{E} X_{n,k}| > s_n r\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gdzie $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}[X_{n,k}]$.

Twierdzenie (Lindeberga-Lévy'ego)

Niech $(X_{n,k})$ będzie schematem serii. Jeśli spełnia on warunek Lindeberga, to

$$\frac{1}{s_n} \left(\sum_{k=0}^n X_{n,k} - \mathbb{E}[X_{n,k}] \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

1. Zapoznać się z rozdziałami 10.1-10.2 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
 2. Znaleźć przybliżenia prawdopodobieństw otrzymania w n rzutach symetryczną monetą co najmniej 60% orłów dla $n = 10, 100$ i 1000 .
 3. Na kampusie uniwersyteckim są dwie restauracje, po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonują losowo z jednakowym prawdopodobieństwem. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że w którejś restauracji zabraknie miejsc. Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze niż 0.0001?
 4. (a) Na podstawie losowej próby szacujemy procent chorych na rzadką chorobę. Wiadomo na pewno, że liczba chorych nie przekracza 0.5% populacji, a błąd ma być mniejszy od 0.001 z prawdopodobieństwem 0.95. Ile osób musi liczyć próba?
(b) Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób, które umieją pisać i czytać. Wiadomo na pewno, że jest to ponad 90% (dorosłej) populacji, a błąd ma być mniejszy od 0.001 z prawdopodobieństwem 0.9. Ile osób musi liczyć próba?
-

5. Sprawdzić, że jeśli $X, X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o skończonej wariancji, to schemat serii $X_{n,k} = X_k$ spełnia warunek Lindeberga. Wywnioskować, że

$$\frac{\sum_{k=0}^n X_k - \mathbb{E}[X]n}{\sqrt{n \text{Var}[X]}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

6. Pokazać, że dla każdego $c \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{j=0}^{n+c\sqrt{n}} \frac{n^j}{j!} = \Phi(c)$, gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{j=0}^n \frac{n^j}{j!} = \frac{1}{2}$.

7. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0.517. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród $n = 1000$ noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli za prawdopodobieństwo urodzenia chłopca przyjmujemy 0.5?
8. Rzucono 1000 razy sześcienną kostką. Znaleźć przybliżenie prawdopodobieństwa, że suma oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

9. Pokazać, że podane rozkłady są *asymptotycznie normalne*, tzn. $\frac{X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$, jeśli:

- (a) X_n ma rozkład dwumianowy $\mathcal{B}(n, p)$ oraz $a_n = np$ i $b_n = \sqrt{np(1-p)}$;
 (b) X_n ma rozkład Poissona $\mathcal{Poi}(n)$ oraz $a_n = n$ i $b_n = \sqrt{n}$;

Wskazówka: Zbadać zbieżność funkcji charakterystycznych lub znaleźć przedstawienie $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, gdzie $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie i skorzystać z CTG.

10. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $\text{Var}[X_1] = 1$. Pokazać, że:

- (a) $U_n = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$;
 (b) $V_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Wskazówka: zadanie 11 lista 12.

11. Pokazać, że warunek Lapunowa: dla wszystkich n, k naturalnych i pewnego $\delta > 0$ jest $\mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} < \infty$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}|^{2+\delta} = 0$$

pociąga za sobą warunek Lindeberga

12. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $\text{Var}[X_1] = \sigma^2$. Pokazać, że jeżeli f jest funkcją różniczkowalną w zerze, to

$$\sqrt{n} (f(S_n/n) - f(0)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, (\sigma f'(0))^2),$$

gdzie $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

13. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $\text{Var}[X_1] = \sigma^2$. Niech N będzie (niezależną od ciągu $\{X_n\}_{n=1}^\infty$) zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $\mathcal{B}(n, p)$. Pokazać, że

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, p\sigma^2).$$

Wskazówka: Skorzystać z zadania 11 z listy 12.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 14: POWTÓRKA PRZED KOŁOKWIUM

1. Zapoznać się z rozdziałami 7.1-10.2 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. (Reguła n sigm) Pokazać, że jeśli $\text{Var}[X] = \sigma^2 < \infty$, to $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > n\sigma] \leq n^{-2}$
3. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach z dystrybuantami F_1, F_2 i gęstościami f_1, f_2 odpowiednio. Znaleźć dystrybuantę i gęstość zmiennych losowych: (a) $U = X - Y$; (b) $V = XY$; (c) $W = X/Y$. Jak wyglądają powyższe wzory w przypadku zmiennych losowych dyskretnych?
4. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F . Udowodnić, że $\mathbb{E}|X - Y| = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1 - F(t)) dt$.
5. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Udowodnij, że zmienne X/Y oraz $X + Y$ są niezależne.
6. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, a kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Oblicz $\mathbb{E}[X]$.
7. Wykazać, że jeżeli $X > 0$, to $\mathbb{E}[X] > 0$ oraz $\frac{1}{\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.
8. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{m}, Q_X)$. Z definicji wielowymiarowego rozkładu normalnego wyznaczyć rozkład $Y = \langle \mathbf{a}, \mathbf{X} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. W szczególności pokazać, że jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ odpowiednio, to $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.
9. Niech $\mathbf{X}$ będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, gdzie $|\rho| < 1$. Wyznaczyć gęstość $\mathbf{X}$ w języku ρ oraz wykazać, że jest ona stała na elipsach $\frac{1}{1-\rho^2}(x^2 - 2\rho xy + y^2) = c$. W zależności od znaku ρ przedyskutować kąt pomiędzy osią $0x$ oraz dużą osią elipsy.
10. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie gamma $\Gamma(\lambda, \beta)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}[X^p]$ dla $p > 0$. W szczególności wyznaczyć $\mathbb{E}[Y^p]$ dla $p > 0$, gdzie Y jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(\lambda)$. Jak wyglądają te wzory dla $p \in \mathbb{N}_+$?
11. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona $\text{Poi}(1)$, natomiast Y będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona $\text{Poi}(\lambda)$ ($\lambda \neq 1$). Pokazać, że nie istnieje $a \in \mathbb{R}$, że Y ma taki sam rozkład co aX . Wskazówka: Rozpatrzyć wartości oczekiwane i wariancje.
12. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$, natomiast Y będzie zmienną losową o rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Pokazać, że zmienna losowa $U = X + Y$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0, n]$.

13. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\mathcal{Exp}(\lambda)$. Pokazać, że zmienna losowa $Y = \lceil X \rceil$ ma rozkład geometryczny $\mathcal{Geo}(1 - e^{-\lambda})$.
 14. Czas obsługi pojedynczego klienta w kasie ma rozkład wykładniczy ze średnią 4 minuty. Zakładamy, że klienci są obsługiwani w sposób niezależny. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 6 godzin uda się obsłużyć w kasie co najmniej 100 klientów.
 15. Liczba dziennych wyświetleń pewnej strony internetowej ma rozkład Poissona ze średnią 300 wyświetleń. Zakładamy, że wywołania strony w kolejnych dniach są niezależne. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że w listopadzie strona zostanie wyświetlona co najmniej 8800 razy.
 16. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych. Pokaż, że funkcje $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ oraz $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ są zmiennymi losowymi (być może o wartościach na rozszerzonej prostej $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).
 17. (*paradoks Bertranda raz jeszcze*) Rozważmy trzeci model w paradoksie Bertranda, gdzie $\Omega = K$ jest kołem o promieniu 1. Jaki należy przyjąć rozkład na kole aby zmienna losowa $R(\omega) = |\omega|$ miała rozkład jednostajny na $[0, 1]$? Wskazówka: Założyć, że rozkład ma gęstość $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ postaci $f(\omega) = g(|\omega|)$ dla $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Zauważyć, że ten model realizuje drugi model w paradoksie Bertranda.
 18. Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Załóżmy, że $\mathbb{P}, \mathbb{Q}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ są prawdopodobieństwami dla których istnieje π -układ $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ taki, że $\mathbb{P}|_{\mathcal{U}} = \mathbb{Q}|_{\mathcal{U}}$. Pokaż, że $\mathbb{P}|_{\sigma(\mathcal{U})} = \mathbb{Q}|_{\sigma(\mathcal{U})}$
-

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 15: POWTÓRKA PRZED EGZAMINEM

1. Zapoznać się z rozdziałami 1.1-10.2 z książki *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel, Wydanie III, SCRIPT, Warszawa 2004.
2. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 2]$. Znaleźć rozkłady zmiennych losowych $Y = \min(X, X^2)$ i $Z = \max(1, X)$.
3. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = XY$.
4. Znaleźć gęstość i wartość oczekiwaną pola koła, którego promień jest zmienną losową o rozkładzie:
 - (a) jednostajnym $\mathcal{U}[0, \alpha]$;
 - (b) wykładniczym $\text{Exp}(\lambda)$.
5. Niech $X_1, X_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wyznaczyć dystrybuanty, gęstości, wartości oczekiwane oraz wariancje zmiennych losowych $Y = \epsilon_1 X_1$ i $Z = \epsilon_1 X_1 + \epsilon_2 X_2$, jeśli ϵ_1, ϵ_2 mają jednakowy rozkład dwupunktowy $\mathbb{P}[\epsilon_1 = 1] = \mathbb{P}[\epsilon_1 = -1] = 1/2$, natomiast X_1, X_2 mają jednakowy rozkład:
 - (a) jednostajny $\mathcal{U}[0, \alpha]$;
 - (b) wykładniczy $\text{Exp}(\lambda)$.
6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona $\text{Poi}(\lambda)$. Znaleźć $\mathbb{E}[e^{X-Y}]$, $\mathbb{P}[XY = 0]$ oraz $\mathbb{P}[X + Y = 10]$.
7. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, \alpha]$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$.
8. Niech X będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = \min(|X|, |X|^2)$.
9. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = \frac{1}{|X-2Y|}$.
10. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych $\text{Exp}(\lambda_1)$, $\text{Exp}(\lambda_2)$ odpowiednio. Znaleźć rozkład łączny wektora losowego $(U, V) = (X - Y, X + Y)$ oraz rozkłady brzegowe.
11. Niech X będzie zmienną losową z rozkładu o gęstości postaci

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{(1, \infty)}(x).$$

Wyznaczyć rozkład (dystrybuantę lub gęstość) zmiennej losowej $Y = 1/X$. Co to za rozkład? Znaleźć $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$ i porównać z $\frac{1}{\mathbb{E}X}$ (o ile to możliwe).

12. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(\lambda)$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $Y = 1/X$.

13. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X takiej, że jeżeli Y jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(2, 1)$ niezależną od X , to $2X + Y$ ma ten sam rozkład co $3Y + 1$.
14. Znaleźć prawdopodobieństwo, że trójmian kwadratowy $\lambda^2 - 2A\lambda + B$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeśli A, B są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:
- jednostajnym $\mathcal{U}[0, \alpha]$;
 - wykładniczym $\mathcal{E}x(\lambda)$.
15. Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Określamy $f(t) := \mathbb{E} \exp(t(X + 2Y - 3Z)^2)$. Wyznaczyć dziedzinę oraz wzór funkcji f .

16. Pokazać, że:

- jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $\mathbb{P}[X = Y] = 1$;
- jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - Y_n| > \epsilon] = 0$ dla każdego $\epsilon > 0$.

17. Pokazać, że jeśli $\mathbb{P}$ jest rozkładem dyskretnym, to dla zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zachodzi równoważność:

$$X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

18. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Pokazać, że $\frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
19. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = 1$ oraz $\mathbb{P}(X_1 = 1) < 1$. Pokazać, że $\Pi_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{p.n.}} 0$.
20. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Znaleźć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n X_i},$$

jeżeli

- X_1 ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0, 1]$;
- X_1 ma rozkład o gęstości postaci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

21. Wiadomo, że pewnym kilkumilionowym kraju 60% dorosłych osób ma wykształcenie podstawowe, 30% średnie i 10% wyższe. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że wśród 1000 losowo wybranych dorosłych mieszkańców kraju osób z wykształceniem średnim jest przynajmniej o 180 więcej niż z wyższym.
22. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach wykładniczych $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Znaleźć rozkład łączny wektora losowego $(U, V) = (\min(X, Y), \max(X, Y))$ oraz pokazać, że U i V są niezależne.
23. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. W zależności od wartości parametru $p > 0$ zbadać, kiedy z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n , jeśli:
- X_1 ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$ oraz $A_n = \{X_n > \log n^p\}$;
 - X_1 ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ oraz $A_n = \{X_n > \sqrt{\log n^p}\}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1 B
LISTA 1: ROZGRZEWKA

Definicja

Mówimy, że rodzina $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ jest σ -ciałem zbiorów, jeżeli

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (ii) jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to $A' = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- (iii) jeżeli $A_n \in \mathcal{F}$, to $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

1. Niech $\Omega = [0, 1]$. Jakie jest najmniejsze σ -ciało $\sigma(\mathcal{A})$ zawierające rodzinę $\mathcal{A}$, jeżeli

- (a) $\mathcal{A} = \{[0, 1/2]\}$;
- (b) $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in [0, 1]\}$;
- (c) $\mathcal{A} = \{A_n \mid n = 1, \dots, N\}$ dla pewnych $A_n \subseteq [0, 1]$ takich, że $\bigcup_{n=1}^N A_n = [0, 1]$.

Definicja

Funkcję $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ nazywamy prawdopodobieństwem, jeżeli

- (i) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$;
- (ii) dla $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$ parami rozłącznych $\mathbb{P}[\bigcup_n A_n] = \sum_n \mathbb{P}[A_n]$.

Wówczas trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

2. Udowodnić własności prawdopodobieństwa (a) – (g). Jeżeli $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną i $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, to:

- (a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- (b) jeżeli $A_1, A_2, \dots, A_n$ wykluczają się wzajemnie, tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, to $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$;
- (c) $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- (d) jeżeli $A \subset B$, to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
- (e) jeżeli $A \subset B$, to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- (f) $\mathbb{P}(A) \leq 1$;
- (g) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

3. (wzór włączeń i wyłączeń) Dowolną metodą udowodnić, że

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right].$$

4. (twierdzenie o ciągłości) Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Wykaż, że

- (a) ($\mathbb{P}$ jest ciągła z dołu) jeżeli $A_n \subseteq A_{n+1}$ są elementami $\mathcal{F}$, to $\mathbb{P}[\bigcup_n A_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n]$;
- (b) ($\mathbb{P}$ jest ciągła z góry) jeżeli $A_{n+1} \subseteq A_n$ są elementami $\mathcal{F}$, to $\mathbb{P}[\bigcap_n A_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n]$.