# ZADANIA DO WYKŁADU Z MATEMATYKI UBEZPIECZEŃ NA ŻYCIE

Bartłomiej Błaszczyszyn Tomasz Rolski

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

2013/2014

# 1 Zadania MUŻ; lista 1

1.1 W ciągu 5 lat dokonano wpłat/wypłat według tabeli:

| rok | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| wpłata | 2 | 0 | -2 | 1 | 0 | 4 |

Obliczyć obecną wartość oraz zakumulowaną wartość tych wpłat gdy $i = 4\%$.

1.2 Obliczyć zakumulowane wartości po trzech latach dla przepływów kapitału A, B i C danych tabelą

| wariant | 0 rok | 1 rok | 2 rok |
|---|---|---|---|
| A | 100 | 110 | 120 |
| B | 110 | 110 | 110 |
| C | 120 | 110 | 100 |

Który wariant jest najlepszy ? Przeprowadzić dowód, że obliczanie obecnej wartości i zakumulowanej wartości prowadzi do tego samego uporządkowania. Dla obliczeń przyjąć $i = 6\%$.

1.3 (i) Obliczyć obecną wartość następującego przepływu pieniądza:
w latach parzystych (tj. $n = 0, 2, \ldots$) wpłaty w wysokości 1,
w latach nieparzystych (tj. $n = 1, 3, \ldots$) wypłaty w wysokości $1/2$. Zapisz powyższą obecną wartość przy użyciu symboli renty oraz czynnika dyskonta.
(ii) Rozpatrzmy przepływ pieniadza z punktu (i), ale w okresie 2 lat tj. gdy $n = 0, 1, 2$. Obliczyć zakumulowaną wartość po dwóch latach.

1.4 Obliczyć efektywną stopę procentową jeśli stopa nominalna wynosi 5% oraz

(i) kapitalizacja jest kwartalna,

(ii) kapitalizacja jest półroczna,

(iii) kapitalizacja jest ciągła.

1.5 Przypuśćmy, ze składamy pieniądze w banku, gdy siła stopy procentowej $\delta = 0.05$. Po jakim okresie podwoimy nasz wkład? A jeśli siła stopy procentowej wynosi $\delta = 0.1$? Zakładamy model kapitalizacji ciągłej.

1.6 Przepływy pieniądza pewnej inwestycji są

Czy ta inwestycja jest opłacalna dla kogoś kto może pożyczać i oszczędzać przy rocznej stopie procentowej $i = 6\%$. Przy jakiej stopie procentowej przestaje się opłacać?

| 0 rok | 1 rok | 2 rok | 3 rok | 4 rok |
|---|---|---|---|---|
| -500 | -600 | 400 | 450 | 400 |

1.7 [EdA5.04.97] Z tytułu renty bezterminowej dokonywane są następujące płatności:

- 1 na końcu pierwszego roku i później co 4 lata,
- 3 na końcu drugiego roku i później co 4 lata,
- 5 na końcu trzeciego roku i później co 4 lata,
- 7 na końcu czwartego roku i później co 4 lata.

Stopa procentowa wynosi $i = 5\%$. Znaleźć obecną wartość renty - podać najbliższą wartość. Odpowiedź: A: 70,25, B: 73,68, C: 76,58, D: 77,56, E: 80,40.

1.8 Bank proponuje następujący kontrakt. Osoba (55)-letnia wpłaca przez 10 lat składkę roczną $\Pi$ z góry i następnie od 65 roku otrzymuje roczną rentę bezterminową w wysokości 1. Znaleźć $\Pi$, jeśli $\Pi$ jest składką netto, tzn. obliczoną przy warunku, że obecna wartość całego przepływu wynosi 0. Przyjąć $i = 5\%$.

1.9 Podany jest przepływ pieniądza $0 = C_0 = \ldots = C_9$, $5 = C_{10} = C_{11} = \ldots$.
(i) Obliczyć OW tego przepływu.
(ii) Zapisać OW przy użyciu symboli rent.

1.10 [EdA16.11.96] Przewidując stałą stopę inflacji 22 % ustalono, że jednorazowa spłata długu 100 jp po dwóch latach wyniesie 190 jp. Realna roczna stopa kosztu długu wyniosła: (i) 15.84%, jeśli poziom inflacji był zgodny z przewidywaniami; (ii) 10.30%, jeśli w pierszym roku stopa inflacji wyniosła 22%, a w drugim 28%; (iii) 9.40%, jeśli średnia roczna stopa inflacji wyniosła 26%. Prawdziwe są jedynie A: (i)(ii), B: (ii)(iii), C: (iii), D: (i)(ii)(iii), E: żadne.
**Wsk.:** w przypadku występowania inflacji wszelkie obliczenia należy prowadzić w tzw. *stałym pieniądzu.* Można więc na przykład kwotę wartą nominalnie $R$ w chwili $n$ wyrazić w „obecnym" pieniądzu posługując się zależnością

$$\tilde{R} = \frac{R}{(1 + i_{\text{infl}})^n},$$

gdzie $i_{\text{infl}}$ jest stopą inflacji. Wówczas $\tilde{R}$ jest realną wartością w chwili $n$ kwoty nominalnej $R$, wyrażoną w stałym pieniądzu. Inaczej: kwota $R$ w chwili $n$ ma siłę nabywczą równą $\tilde{R}$ obecnych jednostek pieniężnych.

1.11 Obliczyc, przy jakiej rocznej stopie procentowej dana kwota podwoiłaby swą wartość po 10 latach, jeżeli bank stosuje roczną kapitalizacje złożoną a) z dołu, b) z góry.

1.12 Wyznaczyć wartość kapitału $C_1$ po roku, jesli bank stosuje miesieczna kapitalizację złożoną z góry, zaś miesięczna nominalna stopa procentowa wynosi $i_{12}$.

## Zadania teoretyczne

1.13 Udowodnić

$$1 - v^{1/m} = \frac{1}{m} d^{(m)}$$

oraz

$$\frac{i^{(m)}}{m} = \frac{1 - v^{1/m}}{v^{1/m}}.$$

1.14 Sprawdzić, że

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (1+i)^{k/m} = \frac{i}{i^{(m)}} \ .$$

1.15 Przez *rentę pewną malejącą z góry* rozumiemy rentę w której wypłaty następują w odwrotnej kolejności niż przy rencie rosnącej, przez kolejnych $n$ lat. To znaczy

| Czas | | | | Wypłata |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/m$ | $\cdots$ | $1-1/m$ | $n/m$ |
| 1 | $1+1/m$ | $\cdots$ | $2-1/m$ | $(n-1)/m$ |
| 2 | $2+1/m$ | $\cdots$ | $3-1/m$ | $(n-2)/m$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n-1$ | $n-1+1/m$ | $\ldots$ | $n-1/m$ | $1/m$ |
| $n$ | | | | 0 |

. (1.1)

Wtedy obecna wartość renty malejącej oznaczamy przez $(D^{(n)}\ddot{a})_{\overline{m|}}$. Pokazać, że

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} + (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n|}} = (n+1)\, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} \ . \tag{1.2}$$

1.16 Wyprowadzić

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = (I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty|}} - v^n\, (I\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty|}} - v^n n \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{d^{(m)}} \ . \tag{1.3}$$

$$(Ia)^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i^{(m)}} \ . \tag{1.4}$$

1.17 Pokazać, że

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{s_{\overline{n|}}} + i \ .$$

1.18 Wyprowadzić wzór na $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}$ oraz $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}}$.

1.19 Obliczyć bieżącą wartość renty pewnej (bezterminowej) z góry i z dolu oraz renty pewnej (bezterminowej) ciągłej.

1.20 Wyprowadzić wzór na obecną, bieżącą i zakumulowaną wartość ciągłego przepływu pieniądza $c(t)$. Czy ma sens mówić o zakumulowanej wartości w przypadku nieskończonego horyzontu czasowego.

1.21 Udowodnić, że ciąg zakumulowanych wartości $S_k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ dany wzorem

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} C_j (1+i)^{n-j}$$

spełnia tzw. prospektywną zależność

$$S_{k+1} = (1+i)S_k + C_{k+1}\,,$$

podczas gdy ciąg rezerw $U_k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ dany wzorem

$$U_k = \sum_{j=k+1}^{n} C_j v^{j-k}$$

spełnia tzw. retrospektywną zależność

$$U_k = v(U_{k+1} + C_{k+1})\,.$$

## Zadania dodatkowe

1.22 [EdA16.11.96] Przez $i(k)$, $i(k) > 0$, oznaczono roczną nominalną stopę procentową z $k$-krotną kapitalizacją odsetek w ciągu roku, przez $i_{\mathrm{ef}}$ oznaczono odpowiadającą jej stopę efektywną, zaś przez $i_{\mathrm{c}}(k)$ równoważną stopę oprocentowania ciągłego (siłę stopy procentowej).

(i) Jeśli $k > 1$, to $i(k) < i_{\mathrm{ef}}(k)$.

(ii) Jeśli $k_1 > k_2$ oraz $i(k_1) = i(k_2)$, to $i_{\mathrm{c}}(k_1) < i_{\mathrm{c}}(k_2)$.

(iii) Jeśli $i_{\mathrm{ef}}(k_1) = i_{\mathrm{ef}}(k_2)$, to $i_{\mathrm{c}}(k_1) = i_{\mathrm{c}}(k_2)$.

(iv) Jeśli $i(k) = i_{\mathrm{ef}}(k)$, to $i(k) = i_{\mathrm{ef}}(k) = i_{\mathrm{c}}(k)$.

Prawdziwe są jedynie: A: (i), B: (i)(ii), C: (i)(iii), D: żadne, E: wszystkie.

1.23 [EdA5.04.97] Dokonujemy na przemian w odstępach 2 tygodniowych wpłat i wypłat w wysokości 1000 do/z funduszu (pierwszą operacją jest w chwili obecnej wpłata). Po 2 latach skumulowana wartość kapitału zgromadzonego w funduszu wynosi 1051 (uwzględniamy ostatnią wpłatę na koniec 2-go roku). Znaleźć roczną efektywną stopę oprocentowania funduszu. Podać najbliższą wartość. (1 rok=12 miesięcy=48 tygodni). Odpowiedź: A: odpowiedź nie jest jednoznaczna, B: 3%, C: 4%, D: 5%, E: 6%. [Wsk. Napisać OW strumienia wpłat/wypłat. Przyrównać do OW zgromadzonego kapitału tj. do $v^2 1051$. Równanie albo rozwiązać numerycznie, albo przez odgadnięcie sprawdzić, że poprawna odpowiedź jest D.]

1.24 [EdA5.04.97] Inwestujemy kapitał równy 1 w funduszu oprocentowanym w sposób ciągły z roczną intensywnością oprocentowania w $n$-tym roku równą $n\delta$. Znaleźć zakumulowaną watośc kapitału na koniec 3-go roku.

1.25 [EdA5.04.97] Podaj które z poniższych tożsamości są prawdziwe:

(i)
$$\frac{1}{s_{\overline{1}|}} + \frac{2}{s_{\overline{2}|}} + \frac{3}{s_{\overline{3}|}} + 3i = \frac{1}{a_{\overline{1}|}} + \frac{2}{a_{\overline{2}|}} + \frac{3}{a_{\overline{3}|}}.$$

[Wsk. Nie. Skorzystać z zadania 1.17.

(ii)
$$\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)\left(1 - \frac{d^{(12)}}{12}\right) = (1+i)^{1/6}.$$

[Wsk. Nie. Lewa strona równa się 1.]

(iii)
$$108 + i(Is)_{\overline{107}|} = s_{\overline{108}|}.$$

[Wsk. Tak. Przeniść 108 na prawą stronę i podzelić stronami przez $i$. Następnie rozpisać renty w jawnej postaci.]

(iv)
$$\frac{s_{\overline{2n}|}}{s_{\overline{n}|}} - \frac{s_{\overline{3n}|}}{s_{\overline{2n}|}} = 1 - \frac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{2n}|}}\ .$$

[Wsk. Nie. Dla $i = 0$ mamy $s_{\overline{n}|} = n$.]

Odpowiedź: A: tylko (i)(ii), B: tylko (iv), C: tylko (iii), D: tylko (ii),(iv), E: żadna spośród odpowiedzi A,B,C,D nie jest prawdziwa.

1.26 Udowodnić, że jeśli siła stopy procentowej $\delta(t)$ jest funkcją czasu oraz intensywność wypłaty renty pewnej w chwili $t$ wynosi $c(t)$, to obecna wartość tej renty wynosi
$$\int_0^\infty c(t) e^{-\int_0^t \delta(s)\ \mathrm{d}s}\, \mathrm{d}t\ .$$

# 2 Zadania MUŻ; lista 2

W zadaniach 2.8–2.22 przyjąć, jeśli potrzeba, że spełniona jest odpowiednio hipoteza HA lub HJP.

2.1 Przyszły czas życia osoby nowourodzonej jest wykładniczy z parametrem 0.01. Obliczyć

(i) prawdopodobieństwo śmierci nie później niż w 45 roku życia,

(ii) prawdopodobieństwo dożycia 80 lat,

(iii) prawdopodobieństwo śmierci między 45 a 80 rokiem życia.

Użyć oznaczeń aktuarialnych.

2.2 Zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \geq 50$ oraz $\mathring{e}_{50} = 40$ obliczyć $p_{60}$.

2.3 Wyznacz ${}_{17}p_{19}$ i ${}_{15|13}q_{36}$, jeśli $s(x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}$, dla $0 \leq x \leq 100$.

2.4 Niech $\mu_{[x]+t} = 1/(100 - x - t)$. Obliczyć ${}_{10}p_{[50]+10}$, ${}_{10|10}q_{[50]+10}$ oraz $\mathring{e}_{50}$.

2.5 Obliczyć $e_x$ oraz $\mathring{e}_x$ gdy

(i) $T_0$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu$,

(ii) $T_0$ spełnia prawo de Moivre'a.

2.6 Niech $\mu_{20} = 0.0056044$ oraz $\mu_{30} = 0.0132678$ i $T_0$ spełnia prawo Gompertza. Obliczyć ${}_{10}p_{25}$.

2.7 Obliczyć $p_{10}$, $p_{20}$, $p_{30}$, $p_{40}$ przyjmując, że rozkład trwania życia osoby nowourodzonej podlega prawu Gompertza z parametrami $B = 0.00026155$ i $c = 1.07826$. Porównać z tablicami TTŻ-PL97m.

1. Rozważmy populację z ${}_{k|}q_0 = \frac{1}{80}$, $k = 0, \ldots, 79$. Zakładając hipotezę HU znajdź $\mathring{e}_0$. Wyznacz prawdopodobieństwo, zakładając ponadto HJP, że osoba w wieku $x = 10$ dożyje wieku $\mathring{e}_0$.

2.8 Przyjąć HU i obliczyć ${}_{10|1.5}q_{30}$ wiedząc, że $l_{30} = 523$, $l_{40} = 436$, $l_{41} = 427$, $l_{42} = 417$ (dane pochodzą z tablic Halleya).

2.9 Oszacować $e_0$ jeśli czas życia jest opisany przez TTŻ Halley'a. Jaki jest możliwy błąd spowodowany urwaniem się tablic na $x = 83$, jeśli przyjmiemy, że $\omega = 100$?

2.10 Wiedząc, że zachodzi HCFM znaleźć korzystając z TTŻ-PL97k

(i) ${}_{0.5}q_{56}$,

(ii) $\mu_{58.75}$.

2.11 Na podstawie TTŻ-PL97m obliczyć ${}_{0.5}p_{23}$ i ${}_{15|13}q_{40}$ (przyjąć HU).

2.12 Obliczyć

- $d_{20}$, $p_{20}$ i $q_{20}$,
- prawdopodobieństwo, że (20)-latek umrze pomiędzy 30 i 50-tym rokiem życia
  jeśli przyszły czas życia podlega:
  TTŻ-PL97m,
  TTŻ-PL97k,
  TTŻ-HALLEY.

2.13 Znaleźć $\mu_{65.25}$ przy założeniu:
– HU,
– HCFM,
– HB,
jeśli rozkład czasu obciętego czasu życia jest dany przez TTŻ-PL97k.

2.14 Znajdź $l_x$ jeśli $l_0 = 1000$ i:

(i) $\mu_t = at$,

(ii) $\mu_t = \dfrac{1}{(a_0 + a_1 t)(b_0 + b_1 t)}$.

2.15 Obliczyć prawdopodobieństwo, że (70)-latek umrze pomiędzy 70.5 i 71.5-tym rokiem życia jeśli $q_{70} = 0.04$, $q_{71} = 0.05$ oraz zachodzi

(i) HU,

(ii) HB.

2.16 Obliczyć ${}_{0.5}q_{56}$, ${}_{2}p_{56.5}\ {}_{2|1}q_{56.5}$ zakładając, że prawo życia dane jest z TTŻ-PL97k oraz

(i) HU,

(ii) HCFM.

Zaobserwować niewielkie różnice wyników obliczonych przy różnych hipotezach.

2.17 Korzystając z tablic TTŻ-PL97m podaj oszacowanie na $l_{58}, l_{58\frac{1}{3}}, l_{58\frac{2}{3}}$, ${}_{\frac{1}{3}}q_{58}$, ${}_{\frac{2}{3}}q_{58}$ oraz ${}_{\frac{2}{3}}d_{58}$. Uzasadnij z jakich hipotez korzystałeś.

2.18 Uzasadnij dlaczego można używać przybliżenia $\mu_x \approx q_x$. Założyć HCFM.

2.19 Uzupełnij następującą tablicę trwania życia przy założeniu HU wiedząc, że $p_{20} = 0.99969$, $q_{21} = 0.00032$:

| $x$ | $l_x$ |
|---|---|
| 20 | 98597 |
| 20.5 | |
| 21 | |
| 21.5 | |
| 22 | |

2.20 Na podstawie tabelki i przy założeniu HU obliczyć ${}_{5}p_{25}$ i ${}_{5.3}p_{24}$

| $x$ | $q_x$ |
|---|---|
| 24 | 0.00133 |
| 25 | 0.00132 |
| 26 | 0.00131 |
| 27 | 0.00130 |
| 28 | 0.00130 |
| 29 | 0.00131 |
| 30 | 0.00133 |

2.21 Obliczyć $\overset{\circ}{e}_x$ dla $x = 107$; skorzystać z kolumny podającej $l_x$ z tablicy TTŻ-PL97m.

2.22 Korzystając z tablic TTŻ-PL97k oraz TTŻ-PL97m obliczyć ${}_{0.5}q_{55}$ oraz ${}_{2.5}q_{50}$.

2.23 Na podstawie tablicy TTŻ-PL97m zaprojektuj następujące tablice kwartalne i wyjaśnij metodę.

| wiek $x$ | liczba dożywających $\ell_x$ | liczba zmarłych ${}_{1/4}d_x$ |
|---|---|---|
| 10 | 98624 | |
| $10\frac{1}{4}$ | | |
| $10\frac{1}{2}$ | | |
| $10\frac{3}{4}$ | | |
| 11 | | * |

(Przez ${}_{t}d_x$ oznaczamy liczbę $x$-latków, którzy zmarli w przeciągu $t$ lat.)

2.24 Medianą przyszłego czasu życia $(x)$-latka nazywamy rozwiązanie równania ${}_{t}q_x = 0.5$. Pokazać, że medianą jest rozwiązanie równania $l_{x+t} = 0.5 l_x$. Przedyskutować warunki jednoznaczności rozwiązania. Przy założeniach HU, HCFM i HB odpowiednio obliczyć medianę przyszłego czasu życia (30)-latka przy użyciu TTŻ-PL97m.

2.25 Przy założeniu hipotezy HU napisać wzór na $\mu_{40.5}$ w terminach $l_{40}, l_{41}$.

2.26 Rodzice (25) i (35) wykupili dziecku (0) polisę posagową, dającą dziecku w wieku 20 lat wypłatę (jednostki) tylko wtedy, gdy będzie on zupełną sierotą. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że dojdzie do wypłaty posagu, jeśli natężenie zgonów jest w tej populacji stałe i wynosi $\mu > 0$.

## Zadania teoretyczne

2.27 Udowodnić, że $f_x(t) = {}_tp_x\, \mu_{[x]+t}$.

2.28 Pokazać, że przy założeniu stałego natężenia zgonów $\mu_t = \mu$ $(t \geq 0)$ i HJP mamy $q_x = 1 - \exp(-\mu)$.

2.29 Udowodnić, że przy założeniu HJPs ${}_{x+t}p_0 = {}_xp_0\, {}_tp_x$.

2.30 Udowodnić, że $\mathrm{d}({}_tp_x)/\mathrm{d}x = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$ (przyjąć HJP).

2.31 Niech $T_0$ spełnia prawo de Moivrea. Wyprowadzić wzór na ${}_tp_x$ oraz $\mu_{x+t}$ (HJP).

2.32 Wyprowadzić wzory na prawdopodobieństwo przeżycia $s(x)$ oraz ${}_tp_x$ dla praw Gompertza, Makehama i Weibulla.

2.33 Pokazać, że przy HA, dla całkowitych, nieujemnych $k, n, x$

$$ {}_{k+n}p_x = {}_kp_x \cdot {}_np_{x+k} = {}_np_x \cdot {}_kp_{x+n} \ . $$

2.34 Pokazać, że przy HA, dla każdego $n = 1, 2, \ldots$

$$ {}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} \ . $$

2.35 Zdefiniujmy

$$ S^{(m)} = \frac{1}{m} \lfloor mS + 1 \rfloor, \tag{2.1} $$

czyli zaokrąglenie $S$ do najmniejszej większej wielokrotności $1/m$. Zmienna $S^{(m)}$ przyjmuje zatem wartości $1/m, 2/m, \ldots, 1$. Pokazać, że przy HU zmienne $K$ i $S^{(m)}$ są niezależne oraz $S^{(m)}$ ma dyskretny jednostajny rozkład

$$ \Pr(S^{(m)} = k/m) = 1/m \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.2} $$

2.36 Pokazać, że $S_x$ ma rozkład ciągły z gęstością $\sum_{n=0}^{\infty} f_x(t+n)$. Znaleźć rozkład $S_x$ gdy $T_x$ ma: (i) rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda_x$ (ii) rozkład jednostajny na $[0, \omega_x]$. (iii) Czy jest możliwe aby $S$ miał rozkład jednostajny na $[0, 1]$?

2.37 Udowodnić, przy założeniu HU

$$ {}_vq_{[x]+u} = \frac{vq_x}{1 - uq_x}\,, \tag{2.3} $$

$$ {}_up_x\mu_{[x]+u} = q_x\,, \tag{2.4} $$

$$ {}_{k+u}p_xq_{[x]+k+u} = (1-u)\,{}_kp_xq_{[x]+k} + u\,{}_{k+1}p_xq_{[x]+k+1}\,. \tag{2.5} $$

dla $x = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \leq v, u \leq 1, v + u \leq 1$. (Wskazówka: dotyczyczy (2.5); lewa strona wyraża $\Pr(k + u < T_x \leq k + u + 1)$, składniki prawej strony zinterpretować jako $\Pr(k + u < T_x \leq k + 1)$, $\Pr(k + 1 < T_x \leq k + u + 1)$.)

2.38 Niech $x \in \mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że
(i) przy założeniu HU

$$ {}_{n+u}p_x = {}_{n+1}p_x \frac{1 - uq_{[x]+n}}{1 - q_{[x]+n}} , \tag{2.6} $$

(ii) przy założeniu HCFM

$$ {}_{n+u}p_x = {}_{n+1}p_x (p_{[x]+n})^{u-1} , \tag{2.7} $$

2.39 Wprowadza się *centralne natężenie śmiertelności* lub *roczny współczynnik natężenia zgonów dla wieku* $x$ wzorem

$$ m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 l_{x+t}\,\mathrm{d}t} = \frac{d_x}{L_x} , $$

gdzie $L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,\mathrm{d}t$. Udowodnić, że przy HU

$$ m_x = \frac{q_x}{1 - q_x/2} . $$

## Zadania dodatkowe

2.40 [EdA16.11.96] W populacji A natężenie zgonów dane jest wzorem

$$ \mu_x^A = \frac{1}{100 - x} \qquad \text{dla} \quad x < 100, $$

a w populacji B wzorem

$$ \mu_x^B = \frac{n}{100 - x} \qquad \text{dla} \quad x < 100, $$

gdzie $n$ jest parametrem. Wiadomo ponadto, że osobniki z populacji A mają przed sobą przeciętnie o 10% więcej życia, niż osobniki z B w tym samym wieku. [Odp. (A) $n = 1.1$, (B) $n = 1.15$, (C) $n = 1.2$, (D) $n = 1.21$, (E) żadna z powyższych.]

2.41 [EdA21.07.96] Natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_{x+t} = be^{x+t}$, gdzie parametr $b > 0$. Dla jakiej wartości parametru $b$ prawdopodobieństwo tego, że 30-latek przyżyje następnych 10 lat, po czym umrze w ciągu kolejnych 5 lat, wynosi $r$, oraz prawdopodobieństwo ${}_{10}p_{30} = 5r$. [Odp. (A) $\log 5/(\log 2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$, (B) $\log 5/(2 \log 2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$, (C) $(\log 5 - \log 2/(2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$, (D) $\log 5/(\log 2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$ (E) $(\log 5 - \log 2)/2 \cdot (\exp(45) - \exp(40))$.

2.42 [EdA5.04.97] Natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_x = x/100$. Oblicz prawdopdobieństwo tego, że osoba w wieku 15 lat umrze między trzydziestym piątym a czterdziestym piątym roku życia. [Odp. (A) $(\exp(4)-1)/\exp(8)$, (B) $(\exp(5)-1)/\exp(8)$, (C) $(\exp(6)-1)/\exp(8)$, (D) $(\exp(4)-1)/\exp(9)$, (E) $(\exp(5) - 1)/\exp(9)$.]

2.43 [EdA05.12.1998] W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega$. O wieku $x$ wiadomo, że osoby w tym wieku umierają w ciągu doby dwa razy rzadziej niż osoby dwukrotnie starsze. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba w wieku $x$ dożyje wieku $2x$. [Odp. (A) 1/4, (B) 1/3, (C) 1/2, (D) 2/3, (E) 3/4.]

2.44 [EdA5.04.97] Jaka jest oczekiwana liczba osób z populacji miliona 35-latków, które umrą po ukończeniu 36 lat i 4 mięsięcy życia i przed ukończeniem 37 lat i 8 miesięcy? Przyjmujemy założenie Balducciego dotyczące umieralności w okresach ułamkowych. Dane są również:

$$q_{35} = 3 \cdot 10^{-3} \qquad q_{36} = 6 \cdot 10^{-3}, \qquad q_{37} = 9 \cdot 10^{-3}.$$

Przyjmij, że 1 miesiąc to 1/12 roku. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 9934, (B) 9944, (C) 9954, (D) 9966, (E) 9976.]

2.45 [EdA9.12.2000] Który z poniższych wzorów na $\mathrm{E}(T(x))$ ($x$ – całkowity wiek) jest prawdziwy przy założeniu o stałym natężeniu wymierania osób z danego rocznika ($\mu_{x+k+0.5}$ oznacza poziom natężenia wymierania w przedziale wiekowym $(x+k, x+k+1)$)?

(A)
$$\mathrm{E}(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}_kp_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}} + \frac{1}{2}\,,$$

(B)
$$\mathrm{E}(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}_kp_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}} - \frac{1}{2}\,,$$

(C)
$$\mathrm{E}(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}_kp_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}} + \log 2\,,$$

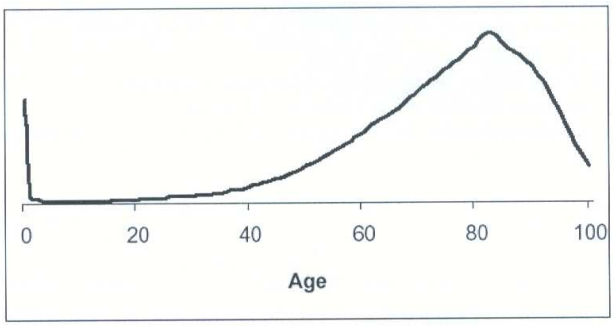
(D)
$$\mathrm{E}(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}_kp_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}}\,.$$

(E) Żaden z wzorów nie jest prawdziwy.

2.46 [EdA26.10.96] Wyznacz prawdopodobieństwo przeżycia przez osobę 55 letnią co najmniej 10 lat, jeśli analogiczne prawdopodobieństwo dla osoby 25 letniej wynosi 0.8 oraz natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_x = kx$ dla $x > 0$. [Odp. (A) 0.40, (B) 0.64, (C) 0.80, (D) 0.81, (E) 0.90.]

2.47 [SAE05.2001/14][1] Wykres poniżej jest związany z ludzką śmiertelnością. Którą z następujących funkcji od wieku $x$ najprawdopodobniej prezentuje ? (A) $\mu_x$, (B) $l_x\mu_x$, (C) $l_xp_x$, (D) $l_x$, (E) $l_x^2$ .

[1] SAE oznacza zadanie egzaminacyjne Society of Actuaries; 05.2001 oznacza datę natomiast 14 numer zadania.




Rysunek 2.1: Wykres do zad. 2.47

2.48 [SAE05.2001/27] Aktuariusz modeluje śmiertelność grupy 1000 osób, każdej w wieku 95 lat, w horyzoncie 3 lat. Korzystając z założenia HU cześciowo wypełniona tablica śmiertelnośc wygląda następująco; patrz tablica 2.48. Jak zwykle liczy się $l_{95+k} = 1000\,{}_kp_{95}$, dla $k = 1, 2, 3$. Połówkowe miejsca wypełnia się korzystając z hipotezy HU. Uzupełnij na tej podstawie brakujace miejsca a następnie oblicz oczekiwaną liczbę przeżywających wiek 97.5, przy załozeniu, że $p_k$ dla $k = 1, 2, 3$ jak wyżej, ale przy założeniu hipotezy HCFM dla miejsc połówkowych. (A) 270, (B) 273, (C) 276, (D) 279, (E) 282.

| $x$ | $l_x$ |
|---|---|
| 95 | 1000 |
| 95.5 | 800 |
| 96 | 600 |
| 96.5 | 480 |
| 97 | — |
| 97.5 | 288 |
| 98 | — |

Tablica 2.1: Tablica śmiertelności do zad. 2.48

2.49 [SAE05.2001/28] Zakładamy o populacji, że
(i) każda osoba ma stałe natężenie śmiertelności,
(ii) indiwidualna wielkość natężenia śmiertleności jest losowa o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba wylosowana z populacji umrze w przeciągu najbliższego roku.

2.50 [SAE11.2002/35] Dane są $S = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}}$ i $R = 1 - e^{-\int_0^1 (\mu_{x+t}+k)}$. Wiedząc, że $S = 0.75R$ obliczyć $k$. (A) $\log \frac{1-q_x}{1-0.75q_x}$, (B)$\log \frac{1-0.75q_x}{1-p_x}$, (C) $\log \frac{1-0.75p_x}{1-p_x}$, (D) $\log \frac{1-p_x}{1-0.75p_x}$, (E) $\log \frac{1-0.75p_x}{1-q_x}$ .

# 3 Zadania MUŻ; lista 3

3.1 Przyjmując TTŻ-PL97m oraz wiedząc, że $A_{40:\overline{4}|}^{\ \ 1} = 0.8$ oblicz obowiązującą stopę procentową.

3.2 Obliczyć drugi moment obecnej wartości ubezpieczenia Z terminowego na 2 lata dla (65)-latka na sumę ubezpieczenia 10 gdy

śmiertelność: TTŻ-PL97m,

stopa procentowa: $i = 5\%$.

3.3 Obliczyć $A_{40:\overline{3}|}^{\ \ 1}$ zakładając TTŻ-PL97m oraz przy

(i) $i = 4\%$,

(ii) $i = 12\%$.

Przeprowadzić powyższe obliczenia również zakładając TTŻ-HALLEY.

3.4 Obliczyć wariancję obecnej wartości ubezpieczenia terminowego na 3 lata na sumę ubezpieczenia 20 000, dla (40)-latka, zakładając TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

3.5 Jeśli $l_x = 100 - x$, dla $0 \leq x \leq 100$ oraz $i = 0.05$ oblicz $(IA)_{40}$. Zakładamy potrzebne hipotezy.

3.6 Zakładając prawo de Moivre'a przeżycie dla $(x)$-latka z $\omega - x = 4$, obliczyć JSN dla ubezpieczenia na dożycie $\bar{A}_{x:\overline{2}|}$. Przeprowadzić obliczenia dla $\delta = 0.06$.

3.7 Pokazać, że ${}^2\bar{A}_x$ równa się $\bar{A}_x$ obliczonej przy stopie procentowej $i^2 + 2i$.

3.8 Obliczyć $A_{30:\overline{10}|}$ przy $i = 4\%$ gdy

(i) przyszły czas życia podlega TTŻ-PL97m,

(ii) przyszły czas życia podlega TTŻ-HALLEY.

3.9 Rozpatrzmy następujące ubezpieczenie rosnące, w którym suma ubezpieczenia rośnie kolejno w przedziałach długości $1/m$ o $1/m$ począwszy od $1/m$ w przedziale $[0, 1/m)$. Wypłata jest na koniec roku śmierci. Pokazać, że JSN dla tego ubezpieczenia, przy założeniu HU wynosi

$$(IA)_x - \frac{m-1}{2m} A_x.$$

3.10 Zakładając TTŻ-PL97k znaleźć aproksymacje dla $\bar{A}_{30}$ oraz $\bar{A}_{40:\overline{10}|}^{\ \ 1}$, przy stopie procentową $i = 4\%$.

3.11 [Egz98] Portfel składa się z 1000 polis na na czyste dożycie dla 40-latków, na sumę ubezpieczenia 1. Jaki musi być zabezpieczony fundusz w chwili $t = 0$ aby były możliwe wypłaty w najbliższym roku z prawdopodobieństwem .95; w ciągu roku nie wpływają składki i nie bierzemy pod uwagę stopy procentowej. Skorzystaj z tablic TTŻ-PL97m.

3.12 Rozpatrzmy polisę dla osoby nowourodzonej na życie, płatną na koniec roku śmierci według skali:

| wiek | korzyść |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 1 | 2000 |
| 2 | 4000 |
| 3 | 6000 |
| 4 | 8000 |
| 5 – 20 | 10000 |
| powyżej 21 | 50 000 |

Obliczyć JSN.

Napisać JSN w terminach funkcji komutacyjnych.

3.13 Produkt jest sprzedawany z 5-letnią gwarancją, obiecującą zwrot $(100 - 20x)\%$ ceny produktu, jeśli się on popsuje w ciągu $x$ lat. Z doświadczenia wiadomo, że produkt uszkadza się w pierwszym roku z prawdopodobieństwem 0.2, w drugim, trzecim i czwartym roku z prawdopodobieństwem 0.1 i w piątym roku z prawdopodobieństwem 0.2. Ponadto zakłada się jednostajny moment uszkodzenia w przeciągu roku. Obliczyć jaką część ceny produktu stanowi cena gwarancji, która jest wyliczona według reguły JSN przy $i = 0.10$.

Przprowadzić obliczenia uwzględniające następujące trzy warianty:
(i) gwarancja płatna na koniec roku w którym uszkodził się produkt w wysokości $(100 - 20 \times x)\%$, gdy $x = 0, 1, \ldots, 4$ jest całkowitą liczbą lat pracy produktu.
(ii) gwarancja płatna w momencie uszkodzenia w wysokości $(100 - 20 \times x)\%$, gdy $x = 0, \ldots, 4$.
(iii) gwarancja płatna w chwili uszkodzienia w wysokości $(100 - 20 \times t)\%$, $t \in (0, 5)$.

3.14 30-latek kupuje ubezpieczenie emerytalne płacac składkę 1000 na początek każdego roku życia, do ukończenia 60 roku. Ubezpieczenie to gwarantuje wypłatę emerytury, której wartość w momencie ukończenia 60 lat wynosi 100000, pod warunkiem, że ubezpieczony dożyje do 60 roku. Jeżeli natomiast umrze nie osiągnawszy 60 lat życia, to ubezpieczyciel zwróci całą wpłaconą składkę na koniec roku śmierci, bez naliczania procentów. Jaka jest wartość oczekiwana obecnej wartości sumy wypłat tego ubezpieczenia. Przeprowadzić obliczenia zakładając TTŻ-PL97k oraz $i = 4\%$.

3.15 Rozpatrujemy 100 członków klubu w wieku $(x)$, którzy wpłacają kwotę $w$ zł na fundusz, zobowiązujący do wypłaty 1000 zł w momencie śmierci każdego z członków. Obliczyć $w$, jeśli firma powinna się wywiązać z obowiązku z prawdopodobieństwem 0.95, i jeśli $\bar{A}_x = 0.06$ i ${}^2\bar{A}_x = 0.01$. Przyjmujemy, że przyszłe czasy życia członków są niezależne.

3.16 Obliczyć $\bar{A}_x$ jeśli $\mu_x = \mu$ dla każdego $x > 0$. Wykonać obliczenia dla $\mu = 1/100$ i przy rocznej stopie procentowej $i = 11\%$.

3.17 Oblicz obecną wartość aktuarialną [2] 1000 do wypłacenia 50-latkowi po 15 latach. Obliczenia wykonaj dla $i = 6\%$ oraz tablic TTŻ-PL97m.

3.18 $(x)$-latek zawarł ubezpieczenie na całe życie płatne na koniec roku śmierci i z sumą ubezpieczenia według tabeli przedstawionej poniżej.

| Rok śmierci $k$ | Suma ubezpieczenia $b_k$ |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 10 |
| 3 | 9 |
| 4 | 9 |
| 5 | 9 |
| 6 | 8 |
| 7 | 8 |
| 8 | 8 |
| 9 | 8 |
| 10 | 7 |
| każdy następny rok | 7 |

Podaj wzór na jednorazową składkę netto tej polisy w terminach funkcji komutacyjnych. Przeprowadź też obliczenia dla $x = 33$ jeśli rozkład przeżycia jest zadany przez TTŻ-PL97k.

3.19 Dla ciągłego ubezpieczenia na całe życie $\mathrm{E}\,[v^{2T}] = 0.25$. Załóżmy, że natężenie śmiertelności i stopa procentowa są stałe. Oblicz $\mathrm{E}\,[v^T]$.

3.20 Została wypisana polisa dla $(x)$-latka:

- jeśli ubezpieczony umrze w przeciągu 10 lat, ubezpieczyciel wypłaci 100 000 zł na koniec roku śmierci,
- jeśli ubezpieczony przeżyje 10 lat, ubezpieczyciel wypłaci 50 000 zł na koniec roku śmierci.

(i) Pokazać, że jednorazowa składka netto dla tego ubezpieczenia jest

$$50000 \times (A_x + A_{\substack{1 \\ x:\overline{10|}}}) \,.$$

(ii) Obliczyć wzór na wariancję obecnej wartości tego ubezpieczenia. Przeprowadzić obliczenia z $x = 40$ korzystając z tablic TTŻ-PL97m.

[2] t.j. wartość oczekiwaną obecnej wartości

3.21 Obliczyć JSN dla polisy dla (40)-latka z której się wypłaca $2C$ na koniec roku śmierci do wieku 65 lat, natomiast $C$ gdy śmierć nastąpiła po 65 roku życia.

Zapisać JSN w terminach funkcji komutacyjnych.

## Zadania teoretyczne

3.22 Udowodnić, że jeśli funkcja korzyści $b(t)$ przyjmuje wartości tylko w zbiorze $\{0,1\}$, to $n$-ty moment wartości obecnej sumy ubezpieczenia $\mathrm{E}[Z^n]$ jest równy jednorazowej składce netto tego ubezpieczenia $A = \mathrm{E}[Z]$ wyliczonej przy danym czynniku dyskonta $v$ podniesionym do $n$-tej potęgi, albo też przy danym natężeniu oprocentowania pomnożonym przez $n$; tj.

$$\mathrm{E}[Z^n] = {}^nA,$$

gdzie ${}^nA@v = A@v^n$ lub ${}^nA@\delta = A@n\delta$.

3.23 Pokazać

$${}_{m|}\bar{A}_x = {}_mp_x\, v^m \bar{A}_{x+m}.$$

3.24 Pokazać przy założeniu hipotezy HJP, że

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^\infty \int_s^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty {}_{s|}\, \bar{A}_x\, \mathrm{d}s\ .\end{aligned}$$

3.25 Udowodnić, że

$$\lim_{m\to\infty} (I^{(m)}\bar{A})_x = (\bar{I}\bar{A})_x.$$

3.26 Pokazać, że ${}^2\bar{A}_x$ równa się wartości $\bar{A}_x$ obliczonej przy stopie procentowej $i^2 + 2i$.

3.27 Udowodnić

$${}_{m|}A_x = {}_mp_x v^m A_{[x]+m}$$

3.28 Udowodnić

$$\begin{aligned}(IA)_x &= \sum_{m=0}^{\infty} {}_{m|}A_x, \\ (IA)^{\ 1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{m=0}^{n} {}_{m|}A_x - n\,{}_{x|}A_n \\ &= nA^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - \sum_{k=1}^{n-1} A^{\ 1}_{x:\overline{k}|}\ .\end{aligned}$$

3.29 Udowodnić

$$(IA)_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}(IA)_x.$$

oraz

$$\begin{aligned}(DA)_{x:\overline{n}|}^{1} &= \mathrm{E}\left[(n-K)v^{K+1}1(K<n)\right] \\ &= (n+1)A_{x:\overline{n}|}^{1} - (IA)_{x:\overline{n}|}^{1}.\end{aligned}$$

3.30

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} = \frac{i}{\delta}A_{x:\overline{n}|}^{1}, \tag{3.1}$$

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\delta}\right)A_x\right], \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

3.31 Udowodnić

$$\bar{A}_x \approx \sqrt{(1+i)}A_x\,. \tag{3.4}$$

oraz

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} \approx \sqrt{(1+i)}A_{x:\overline{n}|}^{1}, \tag{3.5}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \approx \sqrt{(1+i)}A_{x:\overline{n}|}^{1} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}. \tag{3.6}$$

3.32 Udowodnić, przyjmując hipotezę HA,

$${}^2A_x = v^2\,q_x + v^2\,p_x\,{}^2A_{x+1}\,.$$

3.33 Udowodnić, przyjmując hipotezę HA, wzór rekurencyjny:

$$(IA)_x = vq_x + v\cdot p_x(A_{x+1} + (IA)_{x+1})\,.$$

3.34 Pokazać, przy założeniu hipotezy HCFM

$$\bar{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\mu_{[x]+k}\frac{i+q_{[x]+k}}{\delta+\mu_{[x]+k}},$$

gdzie $\mu_{[x]+k} = -\log p_{[x]+k}$.

## Zadania dodatkowe

3.35 Udowodnić, przy HU, że dla $0 \le u < 1$

$$A_{[x]+u} = \frac{1-u}{1-uq_x}A_x + \frac{up_x}{1-uq_x}A_{[x]+1}\,.$$

(**Wsk.:** Przyjąć jako definicję $A_{[x]+u} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{[x]+u}q_{[x]+k+u}$. Por. też zad. 3.36.)

3.36 Udowodnić następującą zależność uogólniającą tezę zadania 3.35: przy HU, dla dowolnej funkcji $h$ i $0 \leq u < 1$, warunkowa wartość oczekiwana jest równa

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[h(\lfloor T_x - u \rfloor) | T_x \geq u\right] &= \frac{\mathrm{E}\left[h(\lfloor T_x - u \rfloor) 1(T_x \geq u)\right]}{\Pr(T_x \geq u)} \\ &= \frac{1-u}{1-uq_x} \mathrm{E}\left[h(K_x)\right] + \frac{up_x}{1-uq_x} \mathrm{E}\left[h(K_{[x]+1})\right], \end{aligned}$$

gdzie $\mathrm{E}\left[h(K_{[x]+1})\right] = \mathrm{E}\left[h(K_x - 1) 1(K_x \geq 1)\right]$. W tym celu zauważyć, że

$$\lfloor T_x - u \rfloor = \begin{cases} K_x & \text{gdy } S_x \geq u\,, \\ K_x - 1 & \text{gdy } S_x < u. \end{cases}$$

3.37 Udowodnić

$$A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\,, \tag{3.7}$$

$$_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}\,, \tag{3.8}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\,. \tag{3.9}$$

3.38 [EdA26.10.96] Na życie pięćdziesięciolatka wystawiono bezterminową polisę dającą wypłatę 1 na koniec roku, w którym nastąpi śmierć. Wyznacz jednorazową składkę netto (podaj najbliższą wartość), jeśli wiadomo że: (i) analogiczna składka dla osoby o rok młodszej wynosi 0.6, (ii) stopa procentowa $i = 10\%$, (iii) dane są wartości funkcji komutacyjnych $D_{49} = 850$ oraz $D_{50} = 765$. [Odp. (A) 0.651, (B) 0.654, (C) 0.657, (D) 0.660, (E) 0.663.]

3.39 [EdA18.01.97] Rozważmy dwa rodzaje polis:

- polisa I, wystawiona na 40-latka, jest 9-letnim ubezpieczeniem terminowym na życie ze świadczeniem rosnącym z roku na rok o 1000 zł, począwszy od sumy ubezpieczenia 1000 w pierwszym roku. Świadczenia są wypłacane na koniec roku śmierci,
- polisa II ma te same parametry, z tym że świadczenie maleje co roku o 1000 począwszy od kwoty wyjściowej 9000 zł.

Kowariancja wartości obecnej wypłat z pary polis I i II sprzedanych tej samej osobie wynosi $0.005 \cdot 10^6$. Wiadomo ponadto, że

$$A^{\,1}_{40:\overline{9}|} = 0.025 \qquad {}^2A^{\,1}_{40:\overline{9}|} = 0.006\,.$$

Oblicz $\mathrm{E}\left[S\right]$ oraz $\mathrm{Var}\left[S\right]$ dla portfela 100 niezależnych polis, w których występuje po 50 polis obydwu typów. [Odp.

(A) $\mathrm{E}(S) = 12\,500$, $\mathrm{Var}(S) = 24\,525\,000$,
(B) $\mathrm{E}(S) = 16\,200$, $\mathrm{Var}(S) = 24\,525\,000$,
(C) $\mathrm{E}(S) = 17\,900$, $\mathrm{Var}(S) = 25\,615\,000$,
(D) $\mathrm{E}(S) = 16\,200$, $\mathrm{Var}(S) = 26\,375\,000$,
(E) $\mathrm{E}(S) = 12\,500$, $\mathrm{Var}(S) = 26\,375\,000$,]

3.40 [EdA18.01.97] Na osobę w wieku $x$-lat wystawiono 30-letnią polisę na życie, dającą przez pierwszych 10 lat wypłatę 15 000, przez następne 10 lat kwotę 10 000 oraz 5 000 przez ostatnie 10 lat ważności polisy. Świadczenie pośmiertne jest płatne na koniec roku śmierci. Wyznacz składkę $\mathrm{E}(Z) + \mathrm{SD}(Z)$ dla tej polisy (SD oznacza odchylenie standardowe), jeśli wiadomo że:

- $Z_1, Z_2, Z_3$ to wartości obecne wypłat z 10-letnich polis wystawionych na $x$-latka, dających wypłatę 1 na koniec roku śmierci, i odroczonych odpowiednio o 0 lat, 10 lat oraz 20 lat,
- dla zmiennych $Z_1, Z_2, Z_3$ znane są:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z_1) &= 0.007225, & \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) &= -0.0033 \\ \mathrm{Var}(Z_2) &= 0.0036, & \mathrm{Cov}(Z_1, Z_3) &= -0.003 \\ \mathrm{Var}(Z_3) &= 0.003025, & \mathrm{Cov}(Z_2, Z_3) &= -0.00275. \end{aligned}$$

Podaj najbliższą wartość wyznaczonej składki. [Odp. (A) 2230, (B) 2245, (C) 2260, (D) 2275, (E) 2290.]

3.41 [EdA7.12.96] Wyznacz jednorazową składkę netto w bezterminowym ubezpieczeniu na życie 25-latka z sumą ubezpieczenia 10 000 zł, płatną na koniec roku, w którym nastąpiła śmierć, jeśli wiadomo że:

1. $v = 0.9$,
2. $q_{24} = 0.00180$ oraz $q_{25} = 0.00160$,
3. $(IA)_{24} = 0.64610$ oraz $(IA)_{25} = 0.68180$.

Wynik zaokrąglij do 10 groszy. [Odp. (A) 325.60, (B) 354.40, (C) 355.80, (D) 356.40, (E) 357.80.]

3.42 [EdA7.12.96] Na $x$-latka wystawiono polisę, która po 10 latach odroczenia daje 40-letnie ubezpieczenie na życie ze świadczeniem w wysokości 10, płatnym w momencie śmierci. Wyznacz wariancję wypłat z tej polisy według ich wartości na moment wystawienia polisy, jeśli:

1. natężenie zgonów jest stałe: $\mu_{x+t} = 0.05$,
2. natężenie oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$.

[Odp. (A) $25 \cdot ((4/3)e^{-1.5} - e^{-2} + 2e^{-6} - (4/3)e^{-7.5} - e^{-10})$,
(B) $50 \cdot ((4/3)e^{-1.5} - e^{-2} + 2e^{-6} - (4/3)e^{-7.5} - e^{-10})$,
(C) $25 \cdot ((4/3)e^{-2} - e^{-6} + (4/3)e^{-8} - e^{-10})$,
(D) $50 \cdot ((4/3)e^{-2} - e^{-6} + (4/3)e^{-8} - e^{-10})$,
(E) $25 \cdot ((4/3)e^{-1.5} - 2e^{-6} + (4/3)e^{-7.5} - e^{-10})$.]

3.43 [EdA16.11.96] Dla zabezpieczenia 10-letniego kredytu zawarto 10-letnie ubezpieczenie na życie. Wyznacz jednorazową składkę netto, jeśli:

1. świadczenie jest płatne na moment śmierci,
2. suma ubezpieczenia maleje jednostajnie wraz z upływem czasu od 1000 do zera,
3. natężenie oprocentowania $\delta = 0.04$,
4. natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_{x+t} = (1/50)$.

[Odp. (A) $(2500/3)(\exp(-3/5) - (1/5))$,
(B) $(2500/3)(\exp(-3/5) - (4/9))$,
(C) $(5000/9)(\exp(-3/5) - (1/5))$,
(D) $(5000/9)(\exp(-3/5) - (2/5))$,
(E) $(5000/9)(\exp(-3/5) - (4/9))$.]

3.44 [EdA16.11.96] Niech $Z_1, Z_2, Z_3$ oznaczają odpowiednio wartości obecne wypłat z następujących polis wystawionych dla 40-latka: terminowej 20-letniej na życie, 20-letniej na dożycie oraz 20-letniej na życie i dożycie. Oblicz $\mathrm{E}[Z_1]$ oraz $\mathrm{E}[Z_2]$, jeśli wiadomo, że

1. $\mathrm{Var}(Z_1) = 0.0081$; $\mathrm{Var}(Z_2) = 0.0625$; $\mathrm{Var}(Z_3) = 0.0106$,
2. $A_{40:\overline{20|}} = 0.4$.

[Odp. (A) $\mathrm{E}(Z_1) = 0.1$, $\mathrm{E}(Z_2) = 0.3$,
(B) $\mathrm{E}(Z_1) = 0.15$, $\mathrm{E}(Z_2) = 0.3$,
(C) $\mathrm{E}(Z_1) = 0.15$, $\mathrm{E}(Z_2) = 0.25$,
(D) $\mathrm{E}(Z_1) = 0.1$, $\mathrm{E}(Z_2) = 0.35$,
(E) $\mathrm{E}(Z_1) = 0.12$, $\mathrm{E}(Z_2) = 0.28$.]

3.45 [EdA05.12.98] Dana jest liczba całkowita $x$ oraz

$$A_x = 0.5, \qquad p_x = 0.6 \qquad v = 0.95\,.$$

Oblicz $A_{x+\frac{1}{2}}$ korzystając z założenia o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku. [Odp. (A) 0.360, (B) 0.375, (C) 0.390, (D) 0.405, (E) 0.420.]

3.46 [EdA05.12.1998] W dziesięcioletnim ubezpieczeniu na życie i dożycie suma ubezpieczenia wynosi w pierwszym roku 10 000 zł i rośnie o 1 000 zł po każdej rocznicy wystawienia polisy. Świadczenie śmiertelne płatne jest na koniec roku śmierci. Wyznacz jednorazową składkę netto dla ubezpieczonego w wieku 50 lat, jeśli dane są:

$$\begin{aligned} A_{50} &= 0.1831 \qquad (IA)_{50} = 2.3686 \qquad D_{50} = 7475 \\ A_{60} &= 0.2922 \qquad (IA)_{60} = 2.9000 \qquad D_{60} = 2450 \end{aligned}$$

Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) – 7 480, (B) – 7 690, (C) – 7 900, (D) – 8 110, (E) – 8 330.]

3.47 [EdA16.11.96] W związku z koniecznością obniżenia technicznego natężenia oprocentowania o jeden punkt procentowy, wyznacz nowy poziom składki $\bar{A}_x$, jeśli dotychczasowe $A_x = 0.15$, a dotychczasowe $(\bar{I}\bar{A})_x = 2.2$.[Odp. (A) 0.161, (B) 0.172, (C) 0.183, (D) 0.194, (E) Żadna z powyższych.]

3.48 [EdA3.10.98] Osoba w wieku (x) rozważa kupno jednego z dwóch beztermінowych ubezpieczeń na życie. W obydwu ubezpieczeniach płaci się jednorazową składkę netto. Pierwsze ubezpieczenie daje świadczenie 1 zł na koniec roku śmierci, a drugie ubezpieczenie świadczenie 1 zł na koniec półrocza śmierci. Składka za drugie ubezpieczenie jest o 1.72% wyższa od pierwszej składki. Zakładając jednostajny rozkład zgonów w ciągu roku, wyznacz techniczną (roczną) stopę procentową $i$, przy której skalkulowano obydwie składki. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 6%, (B) 7%, (C) 8%, (D) 9%, (E) 10%.]

# 4 Zadania MUŻ; lista 3 dodatkowa

4.1 W ubezpieczeniu na życie i dożycie obecna wartość

$$Z = v^T 1(T \le n) + v^n 1(T > n) = Z_1 + Z_2.$$

Pokazać, że

$$\operatorname{Var} Z \le \operatorname{Var} Z_1 + \operatorname{Var} Z_2.$$

4.2 W odroczonym ubezpieczeniu na całe życie

$${}_{m|}\bar{A}_x = {}_m p_x \, v^m \bar{A}_{[x]+m}$$

oraz

$${}_{m|}A_x = A_x - A^{\ 1}_{x:\overline{m}|}\,.$$

4.3 Przy założeniu hipotezy HU dla całkowitych $n$

$$\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$$

oraz

$$(I\bar{A})^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}(IA)^{\ 1}_{x:\overline{n}|}.$$

4.4 Dla malejącego ubezpieczenia na życie

$$(DA)^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \mathrm{E}\left[(n-K)v^{K+1}1(K<n)\right] = (n+1)A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - (IA)^{\ 1}_{x:\overline{n}|}\,.$$

# 5 Zadania MUŻ; lista 4

5.1 Obliczyć JSN dla następującej renty dla (30)-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 1000, jeśli żyje pod koniec drugiego roku wypłata wynosi 3000, jeśli żyje on pod koniec trzeciego roku wypłata wynosi 6000. Obliczenia zrobić dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

5.2 Obliczyć, zakładając TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$

(i) $a_{40}$

(ii) $a_{40:\overline{20}|}$

(iii) ${}_{20|}\ddot{a}_{40}$

(iv) aproksymację dla $\bar{a}_x$ (założyć HU)

(v) $\bar{a}_{40:\overline{20}|}$.

**Wsk.:** w celu uniknięcia obliczeń można użyć funkcji komutacyjnych.

5.3 Obliczyć $(Ia)_{30:\overline{20}|}$ oraz $(I\ddot{a})_{30:\overline{20}|}$ dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

5.4 Podać wzór na aktuarialną zakumulowaną wartość

Rozpatrzyć następującego ubezpieczenia rentowe dla dla (30)-latka:

(i) 1000 na koniec każdego miesiąca w wieku 30 do 40 lat,

(ii) 2000 na koniec każdego miesiąca w wieku 40 do 50 lat,

(iii) 5000 na koniec każdego miesiąca w wieku 50 do 60 lat,

Podać JSN.

Podać aktuarialną zakumulowaną wartość.

Przprowadzić obliczenia dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

5.5 Rozpatrzmy następujący portfel rent z góry:

| wiek | liczba rent |
|---|---|
| 60 | 36 |
| 70 | 49 |
| 80 | 64 |

Każda renta wypłaca 1 tak długo jak rentobiorca żyje. Zakładamy $i = 4\%$ oraz TTŻ-PL97m. Dla obecnej wartości tych zobowiązań obliczyć

- wartość oczekiwaną,
- wariancję
- kwantyl 5% rozkładu.

Należy założyć, że długości żyć są niezależne. Do obliczenia wariancji wykorzystać następującą tablicę funkcji komutacyjnych obliczonych przy nowe stopie procentowej $i = 8.16\%$:

| wiek | $M_x$ | $D_x$ |
|---|---|---|
| 60 | 232.093 | 678.143 |
| 70 | 105.770 | 220.633 |
| 80 | 30.825 | 49.092 |

Wsk. Skorzystać z funckji komutacyjnych. Pamiętać, że: $A_x = M_x/D_x$, oraz, że $\operatorname{Var} Y = ({}^2A_x - A_x)/d^2$.

5.6 Jeśli przyszły czas życia spełnia prawo Makehama, to

$$\bar{A}_x = A\bar{a}_{\overline{x}|} + (\mu_x - A)\bar{a}^{\,i}_{\overline{x}|}$$

gdzie $A$ jest stałą z wzoru na prawo Makehama oraz $\bar{a}^{\,i}_{\overline{x}|}$ obliczone jest przy specjalnej stopie procentowej.

5.7 Zakładając HU, obliczyć $\bar{A}_{45}$, wiedząc, że
$\ddot{a}_{45} = 19.864$ oraz $A_{45} = 0.42143$.

5.8 Korzystając z tablic trwania życia TTŻ-PL97m, przy rocznej stopie procentowej $i = 4\%$, obliczyć *jednorazową składkę netto czasowej renty na życie* na 3 lata, osoby w wieku $x = 40$, wypłacanej w wysokości $C = 1000$ na początku każdego roku życia.

5.9 Zakładając prawo de Moivre'a przeżycia z $\omega = 4$ obliczyć jednorazową składkę netto dla następującego ubezpieczenia życiowo-rentowego: jeśli ubezpieczony $x = 0$ umrze przed upływem 2 lat to wypłata 10 jednostek jest płatna na koniec roku śmierci, po upływie 2 lat wypłacana jest renta wysokości 1 na początek każdego roku życia. Przeprowadzić obliczenia przy $\delta = 0.2$.

5.10 Dane są następujące wartości przy $i = 0.03$:

| $x$ | 72 | 73 | 74 | 75 |
|---|---|---|---|---|
| $\ddot{a}_x$ | 8.06 | 7.73 | 7.43 | 7.15 |

Oblicz $p_{73}$.

5.11 Pokazać, że $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ obliczone dla stałego natężenie śmiertelności $\mu$ i sile stopy procentowej $\delta$ jest równe $\bar{a}_{\overline{n}|}$ obliczone przy sile stopy procentowej $\delta + \mu$.

5.12 Załóżmy, że $Y$ jest obecną wartością renty z góry na całe życie dla $(x)$-latka wypłacającą 1. Dane jest $\ddot{a}_x = 10$ przy $i' = 1/24 = e^{\delta} - 1$, $\ddot{a}_x = 6$ przy $i = e^{2\delta} - 1$. Oblicz wariancję $Y$.

5.13 Grupa (30)-latków płaci po 1000 złdo funduszu na koniec każdego roku przez 20 lat. Znajdź kwotę przypadającą dla jednego przeżywającego. Obliczenia przeprowadź dla TTŻ-PL97m przy $i = 4\%$. **Wsk.:** można skorzystać z tablicy funkcji komutacyjnych.

## Zadania teoretyczne

5.14 Udowodnij oraz powiedz przy jakich założeniach jest prawdziwa równość

(i)
$$ {}_nE_x = {}_tE_x \, {}_{n-t}E_{x+t} $$
dla wszystkich $t, n \in Z_+$ i $t \leq n$

(ii)
$$ {}_nE_x = {}_tE_x \, {}_{n-t}E_{x+t} $$
dla wszystkich $n \in Z_+$, $t \geq 0$ oraz $t \leq n$.

5.15 Pokazać przy HJP, że wariancja obecnej wartości $Y$ ciągłej renty odroczonej wynosi

$$ \mathrm{Var}\,[Y] = v^{2m} \, {}_mp_x(1 - {}_mp_x)(\bar{a}_{x+m})^2 + v^{2m} \, {}_mp_x \frac{{}^2\bar{A}_{x+m} - (\bar{A}_{x+m})^2}{\delta^2} \, . $$

5.16 Udowodnić

$$ {}_{m|n}\bar{a}_x = v^m \, {}_mp_x \, \bar{a}_{[x]+m:\overline{n}|} \, , $$

gdzie $\bar{a}_{[x]+m:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_{[x]+m}$ oraz przy HJP

$$ {}_{m|n}\bar{a}_x = v^m \, {}_mp_x \, \bar{a}_{x+m:\overline{n}|} \, . $$

5.17 Udowodnić zależność

$$ v\ddot{a}_x = a_x + A_x \, . $$

5.18 Udowodnić następujące związki dotyczące jednorazowej składki netto terminowej renty z dołu

$$ \begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \, , \\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 + a_{x:\overline{n-1}|} \, , \\ a_{x:\overline{n}|} &= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \, , \\ a_{x:\overline{n-1}|} &= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|} \, . \end{aligned} $$

5.19 Przy założeniu HA, wyprowadzić wzór na wariancję obecnej wartości odroczonego ubezpieczenia na całe życie

$$ \mathrm{Var}\,[Y] = v^{2n} \, {}_np_x(1 - {}_np_x)(a_{x+n})^2 + v^{2n} \, {}_np_x \frac{{}^2A_{x+n} - (A_{x+n})^2}{d^2} \, , $$

gdzie

$$ Y = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } K = 0, 1, \ldots, m-1, \\ v^m + v^{m+1} + \ldots + v^K & \text{jeśli } K = m, m+1, \ldots . \end{cases} $$

5.20 Pokazać, że jednorazowa składka netto rosnącej renty na życie z dołu, tzn. o wypłatach $c_k$=k (k=0,1,...) w okresie $0 \leq k \leq K$ wynosi

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k v^k \, {}_k p_x \, .$$

5.21 Wyprowadzić następujące wzory na jednorazowe składki netto rosnących rent terminowych z góry i z dołu

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} k v^{k-1} \, {}_{k-1} p_x \, , \tag{5.1}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} k v^k \, {}_k p_x \, . \tag{5.2}$$

5.22 Udowodnić następującą zależność:

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &= m(v^{1/m} \ddot{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)}) \\ &= 1 - d^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} \, . \end{aligned}$$

5.23 Udowodnić następującą zależność dotyczącą renty zupełnej

$$1 = i^{(m)} \mathring{a}_x^{(m)} + \bar{A}_x \, .$$

5.24 Rozważając przepływ kapitału dla portfela $l_x$ rent terminowych, udowodnić że zakumulowane wartości odpowiednich rent dyskretnych na koniec okresu dane są wzorami

$$\begin{aligned} s_{x:\overline{n}|} &= \frac{a_{x:\overline{n}|}}{{}_n E_x} \, , \\ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_n E_x} \, . \end{aligned}$$

oraz, że analogicznie dla renty ciągłej mamy

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_n E_x} \, .$$

5.25 Dlaczego nie rozważa się zakumulowanych wartości rent na całe życie?

5.26 Przyjmijmy następującą definicję ciągłej funkcji komutacyjnej

$$\bar{N}_x = \int_0^{\infty} D_{x+t} \, \mathrm{d}t \, .$$

Udowodnić, że

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x} \, .$$

5.27 Udowodnić przy założeniu HU, że

$$\bar{N}_x = \frac{id}{\delta^2} N_x - \frac{i-\delta}{\delta^2} D_x \,.$$

5.28 Pokazać, że

$$\begin{aligned} s_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \,, \\ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \,, \\ {}_n k_x &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+n}} \,. \end{aligned}$$

## Zadania dodatkowe

5.29 [FAM] Obliczyć $\ddot{a}^{(2)}_{45:\overline{10}|}$, $a^{(12)}_{30:\overline{20}|}$, $\bar{a}_{30:\overline{20}|}$ przy założeniu TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$ korzystając z

(i) z aproksymacji DL,

(ii) zakładając HU.

5.30 Dla (65)-latka zakładając TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$ obliczyć aktuarialną obecną wartość renty na całe życie płatnej miesięcznie z góry.

5.31 [EdA16.11.1996] Niech $Y$ będzie obecną wartością renty dożywotniej dla 70-latka, dającej mu wypłatę 100 na początek każdego roku. Oblicz $\mathrm{Var}[Y]$ jeśli dane są $A_{69} = 0.55211$, ${}^2A_{69} = 0.34022$, $p_{69} = 0.97$ oraz $v = 0.95$ (podaj najbliższą wartość). [Odp. (A) 119 151, (B) 129 252, (C) 139 353, (D) 149 454, (E) 159 555.]

5.32 Obliczyć $A_{20}$, $\ddot{a}_{20}$, $P_{20}$ przy $i = 6\%$ oraz TFK-PL97m.

5.33 [EdA26.10.96] Czterdziestoletnia osoba zaciągnęła kredyt na 10 lat, z roczną ratą w wysokości $r$ spłacaną w formie renty ciągłej z oprocentowaniem $\delta$. Dla pokrycia długu wystawiono polisę dającą w momencie śmierci dłużnika wypłatę równą pozostałej kwocie długu. Przyjmując tę samą stopę procentową $\delta$ wskaż formułę wyznaczającą jednorazową składkę netto za tę polisę.
[Odp. (A) $(r/\delta)(\bar{A}^{1}_{40:\overline{10}|} + v^{10} \cdot {}_{10}p_{40})$,
(B) $(r/\delta)(\bar{A}_{40:\overline{10}|} - v^{10} \cdot {}_{10}p_{40})$,
(C) $(r/\delta)(\bar{A}^{1}_{40:\overline{10}|} - v^{10} \cdot {}_{10}q_{40})$,
(D) $(r/\delta)(A^{\ \ 1}_{40:\overline{10}|} - v^{10} \cdot {}_{10}q_{40})$,
(E) $(r/\delta)(A^{\ \ 1}_{40:\overline{10}|} + v^{10} \cdot {}_{10}q_{40})$.]

5.34 [EdA26.10.96] Osobie czterdziestoletniej wystawiono polisę na rentę dożywotnią, odroczoną na 20 lat, płatną w wysokości 1 na początek roku. Wyznacz jednorazową składkę netto za tę polisę, jeśli wiadomo, że:

$$A_{40} = 0.112 \qquad \ddot{s}_{40:\overline{20}|} = 77.7 \qquad {}_{20}p_{40} = 0.78 \qquad i = 0.1\ .$$

[Odp. (A) 0.76, (B) 0.80, (C) 0.84, (D) 0.88, (E) 0.92.]

5.35 [EdA5.10.96] Dane są trzy formuły:

(i) $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} - \frac{d\cdot\ddot{a}_x}{\delta}$ ,

(ii) $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + (\frac{i}{\delta} - 1)A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$ ,

(iii) $(\overline{IA})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x$ .

Która z nich jest poprawna przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku?
[Odp. (A) tylko (i), (B) tylko (ii), (C) tylko (iii), (D) tylko (ii) oraz (iii), (E) żadna.]

5.36 [EdA5.10.96] Dane są:

$$\ddot{a}_{x:\overline{3}|} = 2.70 \qquad i = 0.1 \qquad {}_3p_x = 0.9.$$

Przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku $\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{3}|}$ wynosi (podaj najbliższą wartość):
[Odp (A) 2.40, (B) 2.45, (C) 2.50, (D) 2.55, (E) 2.60.]

5.37 [EdA7.12.96] Osobie 35-letniej wystawiono polisę na rentę dożywotnią, odroczoną na 30 lat, płatną w wysokości 100 złotych na początku miesiąca. Przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku wyznacz jednorazową składkę netto, płatną w momencie wystawienia tej polisy, jeśli dane są:

(i) $A^{(12)}_{35} - A_{35} = 0.004212$,

(ii) $A^{\ \ 1}_{35:\overline{30}|} = 0.06519$,

(iii) $\ddot{a}_{35:\overline{30}|} = 11.425$,

(iv) $d = 7.407\%$, $d^{(12)} = 7.672\%$, $\alpha(12) = 1.0005$, $\beta(12) = 0.4713$.

Wynik zaokrąglij do liczby całkowitej.
[Odp. (A) 513, (B) 660, (C) 807, (D) 954, (E) 1101.]

5.38 [EdA21.06.97] Znajdź wariancję zmiennej losowej $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$ przy stałej intensywności oprocentowania $\delta > 0$, wiedząc że:
$\bar{a}_x = 9$ przy intensywności oprocentowania $\delta$,
$\bar{a}_x = 6$ przy intensywności oprocentowania $2\delta$ oraz ${}^2\bar{A}_x/\bar{A}_x = 2/3$.
[Odp. (A) 3/2, (B) 3, (C) 9, (D) 27/2, (E) 27.]

5.39 [EdA3.10.98] W pewnej populacji śmiertelnością rządzi prawo Weilbulla z intensywnością wymierania $\mu_x = x/400$. Ponadto intensywność oprocentowania $\delta = 0.05$ oraz $\Phi(u)$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Wyznacz $\bar{a}_{20}$.
[Odp. (A) $20\sqrt{2\pi}e^2(1-\Phi(2))$,
(B) $40\sqrt{2\pi}e^2(1-\Phi(2))$,
(C) $\frac{1}{20}\sqrt{2\pi}e^2(1-\Phi(2))$,
(D) $\frac{1}{20}\sqrt{2\pi}e^4(1-\Phi(2))$,
(E) $\frac{1}{400}\sqrt{2\pi}e^4(1-\Phi(2))$.]

5.40 Pokazać, że

$$\alpha(m) = 1 + \frac{m^2-1}{12m^2}\delta^2 + \frac{2m^4-5m^2+3}{720m^4}\delta^4 + \dots$$

oraz

$$\beta(m) = \frac{m-1}{2m}[1 + \frac{m+1}{3m}\delta + \frac{m(m+1)}{12m^2}\delta^2 + \frac{(m+1)(6m^2-4)}{360m^3}\delta^3 + \dots].$$

# 6 Zadania MUŻ; lista 5

6.1 Trzyletni kredyt został zabezpieczony ubezpieczeniem, wypłacanym na koniec roku śmierci. Poniżej dane są informacje o tym ubezpieczeniu zawartym przez $(x)$-latka:

| $k$ | $b_{k+1}$ | ${}_{k\|}q_x$ |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 0.010 |
| 1 | 2 | 0.010 |
| 2 | 1 | 0.020 |

(i) Napisz OW sumy tego ubezpieczenia.
(ii) Oblicz JSN dla tego ubezpieczenia (najlepiej bezpośrednio z definicji).
(iii) Oblicz roczną składkę netto płaconą w jednakowej wysokości $P$ tak długo jak ubezpieczony żyje.
(iv) Oblicz rezerwę netto po drugim roku (najlepiej bezpośrednio z definicji).
Do obliczeń przyjąć $i = 1/9$.

6.2 Poniżej dane są informacje o 3-letnim ubezpieczeniu na dożycie płatnym na koniec roku śmierci zawartym przez $(x)$-latka:

| $k$ | $b_{k+1}$ | ${}_{k\|}q_x$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0.20 |
| 1 | 3 | 0.20 |
| 2 | 4 | 0.3 |

Składka płacona jest na początku ubezpieczenia i $i = 1/9$. W przypadku przeżycia wypłacana jest kwota $b_3 = 4$.
(i) Napisz OW sumy tego ubezpieczenia. Czy można Napisać JSN $A$ dla tego ubezpieczenia przy użyciu standardowych oznaczeń?
(ii) Oblicz JSN dla tego ubezpieczenia (najlepiej bezpośrednio z definicji).
(iii) Oblicz roczną składkę netto płaconą w jednakowej wysokości $P$ tak długo jak ubezpieczony żyje.
(iv) Oblicz rezerwę netto po pierwszym roku (najlepiej bezpośrednio z definicji). Rozważyć dwa przypadki: (1°) składka netto jest płacona jednorazowo w momencie wypisania polisy, (2°) składka jest płacona corocznie.
Do obliczeń przyjąć $i = 1/9$.

6.3 Wykupiono polisę dla 30-latka na całe życie z składką roczną netto płatną na początku każdego roku jak długo ubezpieczony żyje i wynoszącą 100 zł. Znajdź na jaką sumę ubezpieczenia została wypisana polisa, jeśli $x = 30$, $i = 4\%$ oraz przyjęto śmiertelność wg TTŻ-PL97m. Obliczyć rezerwę netto po pierwszym roku.

6.4 Napisać obecną wartość całkowitej straty $L$ dla renty z góry na całe życie, odroczonej na 2 lata, sfinansowanej składką netto płaconą w pierwszych

dwóch latach; w chwili wypisania polisy w wysokości $P$ oraz, jeśli ubezpieczony dożyje, w następnym roku w wysokości $kP$.
Ile wynosi $P$ jeśli $k = 1$ (przyjąć HJP)?

6.5 Rozpatrzmy następującą rentę z góry na całe życie. Co roku wypłacana jest kwota równa 1 i jeśli rentobiorca zmarł przed upływem 5 lat, a na koniec roku śmierci rentobiorcy zostaje zwrócona połowa pobranej na początku JSN $P$.
(i) Napisać wzór na całkowitą stratę ubezpieczyciela $L$.
(ii) Podać wzór, w terminach standardowych oznaczeń aktuarialnych, na JSN.

6.6 (50)-latek nie może płacić dalej składek rocznych ubezpieczenia na całe życie i chce zamienić swoje ubezpieczenie na bezskładkowe. Obliczyć nową sumę ubezpieczenia jeśli konwersja nastąpi po 10.

6.7 Po 5 latach (30)-latek nie chce płacić dalej składek rocznych w wykupionyn ubezpieczeniu terminowym na 10 lat i chce zamienić swoje ubezpieczenie na bezskładkowe. Przyjąć TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

6.8 Na życie wystawiono bezterminową polisę dającą wypłatę 1 w momencie śmierci z składką płaconą w formie ciągłej.
(a) Pokazać, że składka netto $\bar{P}_x = \mu$, jeśli przyjmuje się stałe natężenie zgonów $\mu_x = \mu$ oraz natężenie stopy procentowej $\delta$.
(b) Podaj wzór na stratę ubezpieczyciela $L$.
(c) Pokaż, że wariancja $L$ jest równa $\mu/(\mu + 2\delta)$.

6.9 Obliczyć składkę netto płaconą na początek każdego roku życia w ubezpieczeniu na dożycie po 3 latach dla (50)-latka. Obliczenia przeprowadzić przy $i = 6\%$ oraz dla TTŻ-PL97k.

6.10 [EdA5.10.96] Na życie $(x)$ wystawiono bezterminową polisę dającą wypłatę 1 w momencie śmierci, ze składką płatną w formie renty ciągłej. Jeśli stratę ubezpieczyciela na polisie opisuje

$$L = v^T - \bar{P}(\bar{A}_x) \cdot \bar{a}_{\overline{T}|}$$

to przy założeniu stałego natężenia zgonów $\mu_x = \mu$ wariancja $L$ wynosi: [Odp. (A) – $\mu/(\mu + 2\delta)$, (B) – $\mu/(\mu + \delta)$, (C) – $(\mu + \delta)/(\mu + 2\delta)$, (D) – $(\mu + 2\delta)/(2\mu + 2\delta)$, (E) – $(2\mu + \delta)/(2\mu + 2\delta)$.]

6.11 [EdA26.10.96] W pełni ciągłym modelu składki netto przyjmij stałe natężenie zgonów $\mu_x = \mu$ dla wszystkich $x > 0$ oraz daną sumę $\mu + \delta = 0.1$. Składka $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{10}|})$ w dziesięcioletnim ubezpieczeniu na życie i dożycie dla osoby w wieku $(x)$ wynosi: [Odp. (A) – $e/(0.1e - 1) - \delta$, (B) – $(e-1)/(0.1e) - \delta$, (C) – $(e-1)/(0.1e) - (0.1 - \delta)$, (D) – $(0.1e-1)/(e-1) - \delta$, (E) – żadne z powyższych.]

6.12 Obliczyć składkę netto $P$ dla następującego czystego ubezpieczenia na dożycie, na $n$ lat. W przypadku śmierci przed ustalonym w umowie czasem $n$ suma pobranych składek jest zwracana w wysokości $h\%$ (*ubezpieczenie na dożycie z refundacją składek*).

6.13 Rozważyć ubezpieczenie terminowe dla $(x)$-latka na $n$ lat, w którym składka netto w wysokości ${}_nk_x$ jest płacona w chwili $n$ jeśli ubezpieczony dożyje. Podać wzór na całkowitą stratę $L$ oraz pokazać, że

$$ {}_nk_x = \frac{1}{{}_xE_n} A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}. $$

Zastanowić się nad interpretacją aktuarialną.

## Zadania teoretyczne

6.14 Udowodnić

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} $$

oraz

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. $$

Dane jest ${}_{10}V_{25} = 0.1$, ${}_{10}V_{35} = 0.2$. Oblicz ${}_{20}V_{25}$.

6.15 W przypadku jednostkowej polisy całkowicie ciągłej na całe życie dla $(x)$-latka, opłacanej składką o stałej intensywnowści (powiedzmy $\bar{P}$ i nie jest ważne ile ona wynosi), całkowita strata ubezpieczyciela w przypadku gdy ubezpieczony umrze w chwili $t$ wynosi

$$ l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t}|}. $$

Pokazać, że $l(t)$ jest funkcją malejącą dla $t \geq 0$, $l(0) = 1$, $\lim_{t\to\infty} l(t) = -\bar{P}/\delta$. Wywnioskować stąd, że istnieje dokładnie jeden moment $t_0$ taki, że całkowita strata ubezpieczyciela jest równa zero jeśli $T_x = t_0$, dodatnia jeśli $T_x < t_0$ oraz ujemna gdy $T_x > t_0$.

6.16 Udowodnić bezpośrednim rachunkiem, że wyrażenia

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \frac{\mathrm{E}\left[{}_tL\right]}{{}_tp_x} = \frac{1}{v^t\,{}_tp_x}({}_{t|}\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\,{}_{t|}\bar{a}_x). \tag{6.1} $$

oraz

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) \;=\; \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{s}_{x:\overline{t}|} - \frac{\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} \;=\; \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} - \frac{\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}. \tag{6.2} $$

są równoważne.

6.17 Wyprowadzić, następujące wzory na rezerwę składki netto ${}_t\bar{V}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|})$ oraz wariancję straty ${}_tL$ dla całkowicie ciągłej polisy ubezpieczenia na dożycie na $n$ lat opłacanej składką netto o stałej intensywności $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ (nie ma tu znaczenia ile ona wynosi) przez czas $0 \le t \le n$

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|}\left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\right)-\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\,,\\
\mathrm{Var}\,[{}_tL|T_x \ge t] &= \left({}^2\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|}-(\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|})^2\right)\left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\right)^2.
\end{aligned}
$$

6.18 Dla polisy o której mowa w zadaniu 6.17 wyprowadzić następujące wyrażenie na intensywność składki netto

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.3}$$

oraz wzory: przy $t \le n$

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= (\bar{P}(\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|})-\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}))\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}\,, && (6.4)\\
{}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left(1-\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|})}\right)\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|}\,. && (6.5)
\end{aligned}
$$

6.19 Pokazać, że wariancja całkowitej straty $L$ w ubezpieczeniach płatnych na koniec roku śmierci, ze składką płatną rokrocznie z góry wynosi:
(a) dla ubezpieczenia na całe życie

$$\mathrm{Var}\,[L] = \frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2}\,,$$

(b) dla ubezpieczenia terminowego na życie

$$\mathrm{Var}\,[L] = \frac{{}^2A^{\,1}_{x:\overline{n}|}-(A^{\,1}_{x:\overline{n}|})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2}\,,$$

(c) dla ubezpieczenia na dożycie

$$\mathrm{Var}\,[L] = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|}-(A_{x:\overline{n}|})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2}\,.$$

6.20 Rozważyć ubezpieczenie terminowe dla $(x)$-latka na $n$ lat, w którym składka netto w wysokości ${}_nk_x$ jest płacona w chwili $n$ jeśli ubezpieczony dożyje. Podać wzór na całkowitą stratę $L$ oraz pokazać, że

$${}_nk_x = \frac{1}{{}_xE_n}A^{\,1}_{x:\overline{n}|}.$$

6.21 Obliczyć składkę netto $P$ dla następującego czystego ubezpieczenia na dożycie, na $n$ lat. W przypadku śmierci przed ustalonym w umowie czasem $n$ suma pobranych składek jest zwracana w wysokości $h\%$ (*ubezpieczenie na dożycie z refundacją składek*).

6.22 Udowodnić następującą wersję wzoru rekurencyjnego, zwaną wzorem Facklera:

$$ {}_{k+1}\mathcal{V} = ({}_k\mathcal{V} + P_k)\frac{1+i}{p_{[x]+k}} - b_{k+1}\frac{q_{[x]+k}}{p_{[x]+k}} \,. $$

6.23 Wyprowadzić następujący wzór, określający równoważną postać zmiennych losowych $\Lambda_k$

$$ \Lambda_k = \begin{cases} -P_k^r & \text{dla } k < K, \\ -P_k^r + (b_{k+1} - {}_{k+1}V) & \text{dla } k = K, \\ 0 & \text{dla } k > K, \end{cases} \tag{6.6} $$

gdzie $P_k^r$ jest tzw. składką na ryzyko określoną wzorem $P_k^r = v(b_{k+1} - {}_{k+1}\mathcal{V})q_{[x]+k}$.

6.24 Pokazać na przykładzie bezterminowego ubezpieczenia na sumę 1 opłacanego składką netto w równych ratach, że zmienne losowe $\Lambda_k$ nie są niezależne. Rozważyć np. zdarzenia $\Lambda_k = 0$ i $\Lambda_h = 0$ dla $k \neq h$.

6.25 Korzystając z twierdzenia Hattendorffa wyprowadzić następujący wzór na warunkową wariancję straty ${}_kL$

$$ \mathrm{Var}\,[{}_kL] = \sum_{h=0}^{\infty}(b_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2 v^{2h+2}\, {}_{h+1}p_{[x]+k}\, q_{[x]+k+h} \,. $$

6.26 Pokazać, że dla $h \leq n$:

$$ \begin{aligned} {}_hP_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}} \,, \\ {}_hP_x &= \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}} \,. \end{aligned} $$

6.27 Zbadać na przykładzie ubezpieczenia na dożycie prawdziwość nastepującego twierdzenia zwanego twierdzeniem L: "dla każdego $k$ $i$ oraz $x$, wielkość rezerwy ${}_kV_{x:\overline{n}|}$ jest rosnącą (??) funkcją $i$". Przy jakich założeniach twierdzenie jest prawdziwe. Zbadać prawdziwość twierdzenie dla innych typów ubezpieczeń.

6.28 Dla ubezpieczenia na dożycie porównać rezerwy liczone metodą Zillmera ze względu na $I > 0$,

6.29 a) Wyprowadzić wzór na składkę netto Zillmera dla ubezpieczenia na całe życie i następnie wyprowadzić wzór na rezerwę Zillmerowską.

b) Wyprowadzić wzór na składkę netto Zillmera dla terminowego ubezpieczenia na życie na okres $n$ odroczonego na $m$ lat i następnie wyprowadzić wzór na rezerwę Zillmerowską.

6.30 Pokazać, że jeśli

$$\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \leq \ddot{a}_{x:\overline{n}|},$$

to

$${}_kV^{\mathrm{Z}}_{x:\overline{n}|} \leq {}_kV_{x:\overline{n}|}, \qquad \text{dla } k = 1, \ldots .$$

## Zadania dodatkowe

6.31 [EdA16.11.96] Osoba w wieku 40 lat zakupiła rentę dożywotnią w wysokości 100, płatną raz w roku, od 65 roku życia. Wyznacz (podaj najbliższą wartość) roczną składkę płatną z góry na kolejny rok ubezpieczenia, aż do wypłaty pierwszej renty (ostatnia składka w 64 roku życia), jeśli wiadomo, że:

1. $i = 0.05$,
2. $\ddot{a}_{40:\overline{25}|} = 13.51$,
3. $\ddot{a}_{65} = 9.15$,
4. $M_{40} - M_{65} = 2\,100$,
5. $D_{40} = 13\,215$.

[Odp. (A) – 13.20, (B) – 13.40, (C) – 13.60, (D) – 13.80, (E) – 14.00.]

6.32 [EdA26.10.96] Uprość wyrażenie:

$$\frac{(P_{40:\overline{10}|} - {}_{10}P_{40}) \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|}}{v^{10} \cdot {}_{10}p_{40}},$$

gdzie *duże* $P$ oznaczają roczne (płatne na początku roku) składki netto w pełni dyskretnym modelu, a mianowicie:

- $P_{40:\overline{10}|}$ składkę w terminowym ubezpieczeniu na życie i dożycie,
- ${}_{10}P_{40}$ 10-letnią składkę w bezterminowym ubezpieczeniu na życie.

[Odp. (A) – $A_{40}$, (B) – $1 - A_{40}$, (C) – $A^{1}_{40:\overline{10}|}$, (D) – $A_{50}$, (E) – $1 - A_{50}$.]

6.33 [EdA07.12.1996] Bezterminowa polisa na życie $x$-latka daje wypłatę 10 000 zł na koniec roku śmierci. Kupując tę polisę $x$-latek ma do wyboru dwa ekwiwalentne sposoby płacenia dożywotniej składki:

(i) na początku każdego roku w wysokości 500 zł,

(ii) na początku każdego miesiąca w wysokości $\pi$ zł.

Wyznacz wysokość (podaj najbliższą wartość) $\pi$ przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku oraz stopie procentowej $i = 4\%$. [Odp. (A) 41.43, (B) 42.44, (C) 43.45, (D) 44.46, (E) 45.47.]

6.34 [EdA28.02.98] W pewnym ubezpieczeniu rentowym dla osoby w wieku $x$ lat ubezpieczony płaci aż do wieku $x + w(x)$ lat składki netto w formie renty ciągłej ze stałą intensywnością $\bar{P}$ na rok, a następnie otrzymuje dożywotnią rentę ciągłą z tą samą intensywnością wypłat $\bar{P}$ na rok. Oblicz $w(x)$ jeśli wiadomo, że długość życia w tej populacji ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu$, a techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta$. [Odp. (A) $-1/(\mu+\delta)$, (B) $-(\ln 2)/((\mu+\delta)$, (C) $-(\ln 2)/((\mu+2\delta)$, (D) $-1/(2(\delta+\mu))$, (E) $-1/(2\mu)$.]

6.35 [EdA18.01.97] Kupując bezterminowe ubezpieczenie, 35-latek ma do wyboru dwie równoważne formuły rocznych składek netto, płaconych dożywotnio na początku roku:

- roczna składka rosnąca według wzoru $20+5\cdot(k+1)$, gdzie $k = 0, 1, \ldots$,
- roczna składka rosnąca według wzoru $1+b\cdot(k+1)$, gdzie $k = 0, 1, \ldots$.

Wyznacz wartości parametru $b$, jeżeli znane są:

$$D_{35} = 12\,260 \qquad N_x = 176\,410 \qquad S_{35} = 2\,165\,170$$

[Odp. (A) – 6.05, (B) – 6.55, (C) – 7.05, (D) – 7.55, (E) – 8.05.]

6.36 [EdA18.01.97] Osobie 40-letniej wystawiono 10-letnią polisę na życie ze świadczeniem w wysokości 10 000 płatnym na koniec roku śmierci. Kontrakt przewiduje ponadto zwrot składek netto bez odsetek w formie renty 10-letniej w przypadku dożycia do wieku 50 lat (składki będą zwracane co miesiąc, nie dłużej niż do 60 roku życia). Oblicz (podaj najbliższą wartość) miesięczną składkę netto dla tego ubezpieczenia, jeśli zgony mają jednostajny rozkład w ciągu roku, a ponadto wiadomo, że

$$D_{40} = 9\,000 \qquad D_{50} = 4\,800 \qquad D_{60} = 2\,500 \qquad N_{40} = 135\,000$$

$$N_{50} = 64\,500 \quad N_{60} = 27\,700 \quad d = 0.05 \quad \alpha(12) \approx 1 \quad \beta(12) \approx 11/24$$

[Odp. (A) – 14.90, (B) – 15.65, (C) – 16.40, (D) – 17.15, (E) – 17.90.]

6.37 [EdA16.11.96] W ubezpieczeniu na całe życie pięćdziesięciolatka ze świadczeniem w wysokości 1 wypłacanym w momencie śmierci, stała roczna składka opłacana jest w formie renty ciągłej. Wyznacz poziom rezerwy składek netto po 25 latach ubezpieczenia, jeśli dane są:

1. natężenie oprocentowania $\delta = 0.1$,
2. ${}_tp_{50} = 1 - \frac{t}{50}$ , dla $0 < t \leq 50$ ,
3. ${}_tp_{75} = 1 - \frac{t}{25}$ , dla $0 < t \leq 25$ .

[Odp. (A) $(\exp(-5) - 2\exp(-5/2) + 1)/(\exp(-5) + 5)$, (B) $(\exp(-5) - 2\exp(-5/2)+1)/(\exp(-5)+4)$, (C) $(\exp(-5)-2\exp(-5/2)+1)/(\exp(-5)+3)$, (D) $(\exp(-5)-2\exp(-5/2)+2)/(\exp(-5)+5)$, (E) $(\exp(-5)-2\exp(-5/2)+12)/(\exp(-5) + 4)$]

6.38 Na 35-latka wystawiono 25-letnią polisę na życie i dożycie z wypłatą 10 000 zł w momencie śmierci lub dożycia do 60 lat. Przez cały okres ubezpieczenia płacone są raz w roku, na początku roku, składki netto w wysokości 250 zł. Wyznacz (podaj najbliższą wartość) rezerwę netto składek netto na koniec 10 roku tego ubezpieczenia, jeśli dane są

$$A^{1}_{45:\overline{15}|} = 0.1 \qquad A^{\ \ 1}_{45:\overline{15}|} = 0.3 \qquad i = 5\%$$

oraz obowiązuje założenie o jednostajnym rozkładzie zgonów w ciągu roku. [Odp. (A) 850, (B) 875, (C) 920, (D) 945, (E) 1010.]

6.39 W bezterminowym ubezpieczeniu na życie osoby trzydziestoletniej w piętnastym roku ubezpieczenia składka płatna na początku roku wynosi 50, a świadczenie śmiertelne płatne na koniec roku wynosi 3000. Rezerwa netto liczona przy 10% stopie wyniosła na koniec czternastego roku ubezpieczenia 550. Przy jakim poziomie współczynnika zgonów rezerwa netto na koniec piętnastego roku powinna osiągnąć 600. [Odp. (A) – 0.0143, (B) – 0.0167, (C) – 0.0200, (D) – 0.0250, (E) – 0.0333.]

6.40 W ubezpieczeniu na całe życie czterdziestolatka ze świadczeniem 10 000 zł, płatnym na koniec roku, w którym nastąpiła śmierć, roczna składka opłacana jest w czterech kwartalnych ratach po 30 zł. Składkę tę wyznaczono przy stopie procentowej $i = 0.1$ oraz przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku. Wyznacz poziom rezerwy składek netto po dziesięciu latach ubezpieczenia (podaj najbliższą wartość), jeśli wiadomo, że $A_{50} = 0.19$ oraz $\ddot{a}_{50} = 8.90$. [Odp. (A) – 0.19, (B) – 915, (C) – 1288, (D) – 1525, (E) – 1645.]

6.41 [EdA18.01.1997] Osoba 33-letnia kupiła bezterminowe ubezpieczenie na życie ze świadczeniem 10000 płatnym na koniec roku śmierci, płacąc na początku każdego roku składkę netto w wysokości $P$. Po 21 latach osoba ta przerywa płacenie składek i otrzymuje propozycję ekwiwalentnych aktuarialnie rozwiązań:

- zamiany polisy na bezskładkową ze świadczeniem zredukowanym do 6 000,
- albo wypłaty rezerwy netto w formie dożywotniej renty w wysokości 300, płatnej na początku każdego roku.

Dysponując tymi informacjami wyznacz składkę netto $P$. [Odp. (A) 200, (B) 250, (C) 300, (D) 350, (E) 400.]

# 7 Zadania MUŻ; lista 6

7.1 Obliczyć składkę brutto dla ubezpieczenia na dożycie dla osoby 30-letniej o okresie ubezpieczenia 10 lat. Przyjmujemy, że

- suma ubezpieczenia wynosi 1 zł,
- roczne koszty inkasa wynoszą 10% składki brutto,
- roczne koszty administracyjne wynoszą 0.002,
- koszt pozyskania ubezpieczenia wynosi 0.025,
- techniczna stopa procentowa wynosi 5%.

## Zadania dodatkowe

7.2 [EdA05.12.1998] W 20-letnim ubezpieczeniu na dożycie z sumą ubezpieczenia 10 000 na początku każdego roku płacona jest składka w stałej wysokości. Umowa przewiduje, że w przypadku śmierci ubezpieczonego w okresie ważności ubezpieczenia ubezpieczyciel zwraca uposażonemu (na koniec roku śmierci) bez oprocentowania wpłacone składki w ilości:

- 5 rocznych składek w przypadku śmieci po 10 a przed 16 rokiem ubezpieczenia,
- 10 rocznych składek w przypadku śmierci po 16 roku lub w następnych latach ubezpieczenia.

Wiadomo, że płacona składka jest wyższa o 20 % od składki netto. Wyznacz roczną składkę netto mając dane:

$$i = 10\% \qquad {}_{20}p_x = 0.6$$

$$A^{1}_{x:\overline{10|}} = 0.087 \qquad A^{1}_{x:\overline{15|}} = 0.120 \qquad A^{1}_{x:\overline{20|}} = 0.145\ .$$

Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 106.50 (B) 109.50 (C) 112.50 (D) 115.50 (E) 118.50.]

7.3 [EdA07.12.96] W bezterminowym ubezpieczeniu na życie $x$-latka świadczenie w wysokości 1 zł wypłacane jest na koniec roku, w którym nastąpiła śmierć, a roczna składka $\pi_x = 0.02$ płatna jest dożywotnio na początku roku. Składkę tę skalkulowano tak, że zawiera ona, oprócz składnika netto, pewien narzut na ryzyko. Ilu co najmniej $x$-latkom należy sprzedać to ubezpieczenie, by z prawdopodobieństwem co najmniej 0.95 ubezpieczenie tej grupy $x$-latków nie przyniosło strat. Uwzględnij następujące informacje:

**(i)** $A_x = 0.2$ oraz ${}^2A_x = 0.1$,

**(ii)** d=0.05.

[Odp. (A) 20, (B) 21, (C) 22, (D) 23, (E) 24]

7.4 Wyznaczyć jednorazową składkę dla ubezpieczenia na całe życie w wysokości 10 000, przy uwzględnienie wydatków firmy na polisę (liczonych na początek roku) wynoszących 10. Skorzystać z tablicy składek netto.

7.5 [EdA09.12.2000] W 20–letnim ubezpieczeniu na życie ($x$) składka brutto $P = 2500$ zł jest płacona przez cały okres ubezpieczenia na początku roku. Roczne koszty administracyjne, według wartości na początek roku, wynoszą w pierwszych 10 latach ubezpieczeniach 10% składki brutto, a następnie 20% składki brutto w pozostałym okresie. Wyznacz (podaj najbliższą wartość) rezerwę na koszty administracyjne po 5 latach ubezpieczenia. Dane są:

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 8.425, \quad \ddot{a}_{x+5:\overline{15}|} = 7.460, \quad \ddot{a}_{x+10:\overline{10}|} = 6.078,$$

$${}_5E_x = 0.582, \qquad {}_5E_{x+5} = 0.563.$$

[Odp. (A) 474, (B) 445, (C) 415, (D) 460, (E) 430]

7.6 [EdA18.01.1997] Składka brutto w 20–letnim ubezpieczeniu na życie i dożycie dla 40–latka (świadczenie pośmiertne płatne na koniec roku śmierci, składka płatna rocznie na początku roku) jest powiązana ze składką netto wzorem:

$$P_{40:\overline{20}|}^{\text{brutto}} = \frac{11}{9} \cdot P_{40:\overline{20}|} + 0.061111\ldots$$

Koszt inkasa składki wynosi $\beta = 10\%$ składki brutto. Jednorazowe wydatki związane z wystawieniem polisy w wysokości $\alpha\%$ sumy ubezpieczenia są rezerwowane metodą Zillmera. Koszty bieżące obsługi polisy w każdym roku jej ważności wynoszą $\gamma\%$ sumy ubezpieczenia i sa ponoszone na początku roku. Wyznacz (podaj najbliższą wartość) rezerwę składek brutto po 10 latach tego ubezpieczenia, jeśli wiadomo, że

$$d = 0.05, \quad D_{50} = 4900, \quad D_{60} = 2500,$$

$$M_{40} = 1500, \quad M_{50} = 1200, \quad D_{60} = 2500,$$

$$N_{40} = 135000, \quad N_{50} = 65000, \quad n_{60} = 30000.$$

[Odp. (A) 0.21, (B) 0.24, (C) 0.27, (D) 0.30, (E) 0.33]

7.7 [EdA16.11.1996] W terminowym, 25–letnim ubezpieczeniu na życie i dożycie dla czterdziestolatka z sumą ubezpieczenia 1000, świadczenie śmiertelne płatne jest na koniec roku. Równa składka płacona jest na początku pierwszych 15 lat ubezpieczenia. Jednorazowe koszty wystawienia polisy wynoszą $\alpha = 5\%$ sumy ubezpieczenia i są rezerwowane metoda Zillmera. Koszty administracyjne, również uwzględniane w rezerwie brutto, wynoszą $\gamma = 1\%$ sumy ubezpieczenia i są ponoszone na początku każdego roku ważności polisy. Wyznacz (podaj najbliższą wartość) rezerwę brutto po 10 latach ubezpieczenia, jeśli rezerwa netto po 10–latach wynosi 600, a ponadto znane są:

$$\ddot{a}_{40:10:\overline{=}|} 6.60, \qquad \ddot{a}_{50:\overline{5}|} = 4.05,$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{15}|} = 8.05, \qquad \ddot{a}_{50:\overline{15}|} = 7.70, \quad \ddot{a}_{40:\overline{25}|} = 9.35.$$

[Odp. (A) 604.80, (B) 610.90, (C) 621.30, (D) 634.60, (E) 640.20]

7.8 [EdA26.10.1996] W terminowym, dwudziestoletnim, ubezpieczeniu na życie i dożycie dla osoby 45–letniej z sumą ubezpieczenia 1000 świadczenie śmiertelne płatne jest na koniec roku. Wyznacz składkę brutto płatną raz w roku (na początek roku) przez pierwszych 10 lat ubezpieczenia, jeśli wiadomo że:

**(i)** $A_{45:\overline{20}|} = 0.4266$,

**(ii)** $\ddot{a}_{45:\overline{10}|} = 8.30$,

**(iii)** $\ddot{a}_{45:\overline{20}|} = 12.10$,

**(iv)** jednorazowe koszty związane z wystawieniem polisy wynoszą 5% sumy ubezpieczenia,

**(v)** okresowe koszt (ponoszone na początku rok) zbierania składek wynoszą 10% składki brutto,

**(vi)** okresowe koszty administracyjne (ponoszone na początku każdego roku przez okres ważności ubezpieczenia) wynoszą 1% sumy ubezpieczenia.

[Odp. (A) 65, (B) 70, (C) 75, (D) 80, (E) 85]

# 8 Zadania

8.1 Załóżmy, że życia $(x)$ i $(y)$ są niezależne. Wyrazić za pomocą ${}_np_x$ i ${}_np_y$:
(a) prawdopodobieństwo, że $(x:y)$ przeżyje $n$ lat,
(b) prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna osoba $(x)$ lub $(y)$ przeżyje $n$ lat,
(c) prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna z osób, $(x)$ lub $(y)$, przeżyje $n$ lat
(d) prawdopodobieństwo, że oboje $(x)$ i $(y)$ umrą w przeciągu $n$ lat.

8.2 Wyznaczyć $A_{x:y}$ przy pomocy $A_{x+1:y+1}$.

8.3 Dwie osoby w wieku $(x)$ oraz $(y)$ zakupiły ubezpieczenie wypłacające świadczenie w wysokości 20 000 zł na koniec roku pierwszej śmierci oraz 10 000 zł na koniec roku drugiej śmierci. Oblicz JSN w tym ubezpieczeniu mając dane $A_x = 0.07$, $A_y = 0.4$, $A_{x:y} = 0.03$.

8.4 Osoby $(x)$ i $(y)$ chcą wykupić ubezpieczenie dla 2-ch osób, które ma być wypłacone w wysokości $C = 2000$, na koniec roku pierwszej śmierci oraz $D = 1000$ na koniec roku drugiej śmierci. Mając dane $A_x = 0.04, A_y = 0.05$ oraz $A_{x:y} = 0.03$ obliczyć JSN tego ubezpieczenia.

8.5 Małżonkowie $(x)$ i $(y)$ chcą wykupić rentę, która ma być wypłacana w wysokości $C = 1000$, począwszy od śmierci jednego z nich, na początek każdego kolejnego roku życia drugiego. Mając dane $\ddot{a}_x = 4$, $\ddot{a}_y = 5$ oraz $\ddot{a}_{x:y} = 3$ obliczyć JSN tej renty wdowiej.

8.6 Zakładając, ze mąż (45) oraz żona (40) mają życia niezależne, oraz że ich rozkłady są zgodne odpowiednio z tablicami TTŻ-PL97m i TTŻ-PL97k obliczyć ${}_3p_{\overline{45:40}}$.

8.7 Niech $X$ i $Y$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym odpowiednio z parametrami $\alpha$ i $\beta$. Pokazać, że
(i) $\Pr(X < Y) = \alpha/(\alpha+\beta)$,
(ii) $\Pr(\min(X,Y) > x) = e^{-(\alpha+\beta)x}, \qquad x \geq 0.$

8.8 Natężenie zgonów dla żony (30) i męża (40) są stałe i wynoszą odpowiednio $\mu_x^{(\dot{z})} = 1/40$ i $\mu_x^{(m)} = 1/30$. Oblicz wartość oczekiwaną długości życia (całego życia) tej osoby, która umrze wcześniej (podaj najbliższą wartość). [Odp. (A) 47.143, (B) 48.571, (C) 50, (D) 51.429, (E) 52.857.]

8.9 Wyrazić ${}_tp_u$ przez ${}_tp_{x_i}$, ${}_tp_{x_i:x_j}$, ${}_tp_{x_i:x_j:x_k}$, ${}_tp_{x_1:x_2:x_3:x_4}$ $(i,j,k = 1,\ldots,4)$ gdy

- $u = \overline{(x_1:x_2)} : \overline{(x_3:x_4)}$,
- $u = \overline{(x_1:x_2)} : (x_3:x_4)$,
- $u = \overline{\overline{(x_1:x_2)} : (x_3:x_4)}$.

Napisać $T(u)$ w języku $\max, \min$ i równoważnie $\vee, \wedge$.

8.10 Obliczyć JSN dyskretnej renty wdowiej $a_{x|y}$, która zaczyna wypłaty w wysokości 1 od końca roku śmierci $(x)$ i kończy się z momentem śmierci $(y)$.

8.11 Pokazać, że

$$\bar{a}_{\overline{x:y}:z} = \bar{a}_{x:z} + \bar{a}_{y:z} - \bar{a}_{x:y:z}.$$

8.12 Ojciec $(x)$ i matka $(y)$ wykupują rentą ciągła wypłacającą z intensywnością 1 przez całe życie dziecku $(z)$ od momentu śmierci drugiego z rodziców aż do jego śmierci. Obliczyć JSN $\bar{a}_{\overline{x:y}|z}$ tego ubezpieczenia. **Wsk.:** skorzystać z Zad. 8.9 oraz z tego, że

$$\bar{a}_{\overline{x:y}|z} = \bar{a}_z - \bar{a}_{\overline{x:y}:z}.$$

8.13 Obliczyć $\bar{a}_{x|y}$ dla niezależnych żyć $(x)$ i $(y)$ jeśli wiadomo, że $\mu_{[x]+t} = 0.05$ oraz $\mu_{[y]+t} = 0.04$.

8.14 Zadanie o skojarzeniach formułuje się następująco. Zakłada się, że $m$ uczestników przyjęcia przy wyjściu losowo zabiera swoje parasole. Niech $N$ będzie liczbą parasoli, które wróciły do swojego właściciela. Pokazać, że

$$\mathrm{E}\, s^N = \sum_{j=0}^{m} \frac{(s-1)^j}{j!}.$$

## Zadania dodatkowe

8.15 [EdA05.04.1997]Bezterminowe ubezpieczenie na życie dwojga osób w wieku $x$ oraz $y$ lat daje wypłatę w wysokości 5 000 po śmierci pierwszej osoby oraz wypłatę 2 000 po śmierci drugiej osoby. Świadczenia pośmiertne płatne są na koniec roku śmierci. Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli dane są: $\ddot{a}_x = 18.5$, $\ddot{a}_y = 8.5$, $A_{x:y} = 2A_{\overline{x:y}}$, $v = 0.95$. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 2 600 (B) 2 625 (C) 2 650 (D) 2 800 (E) 2 825.]

8.16 [EdA05.12.1998]Polisa grupowa ubezpiecza na życie czterech osób określona jest w następujący sposób. Świadczenie wypłacane jest na koniec roku każdej z trzech pierwszych śmierci, wszystkim pozostającym przy życiu w chwili tej śmierci (ewentualnie innej osobie uprawnionej w przypadku nie dożycia końca roku), każdemu po 1 zł. Jednoczesna śmierć dwojga lub więcej osób nie jest możliwa. Nie ma żadnej wypłaty za śmierć ostatniej osoby. Śmiertelność w tej populacji ma stałą intensywność wymierania $\mu_x = 0.04$, natomiast $\delta = 0.05$. Oblicz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 3.3 (B) 3.4 (C) 3.5 (D) 3.6 (E) 3.7.]

8.17 [EdA18.01.1997]Mąż ($x$-lat) i żona ($x$-lat) mają do wyboru:

- kupić bezterminowe ubezpieczenie na życie męża, ze świadczeniem w wysokości 10 000 zł płatnym na koniec roku śmierci,
- kupić bezterminowe ubezpieczenie na życie obojga, ze świadczeniem 10 000 zł płatnym na koniec roku śmierci.

Jeśli wybiorą pierwszy sposób ubezpieczenia, to roczna składka netto, płatną na początku roku, będzie wynosić 100 zł. Wyznacz roczną składkę netto, płatna na początek roku, dla drugiego typu ubezpieczenia, jeśli wiadomo, że śmiertelnością w tej populacji rządzi prawo Gompertza, z natężeniem zgonów

$$\mu_{x+t} = B \cdot 2^{x+t}$$

oraz $p_x = 0.995$, $v = 0.95$. Wskaż najbliższą wartość. [Odp. (A) 103.20, (B) 103.35, (C) 103.50, (D) 103.65, (E) 103.80.]

8.18 [EdA28.02.1998]Mąż $(x)$ i żona $(y)$ rozważają zakup ubezpieczenia rentowego typu $A \to B$. Wypłaca ono $A$ tysięcy złotych w każdą rocznice polisy (od zaraz) aż do pierwszej śmierci, a potem dożywotnio $B$ tysięcy złotych w każdą rocznicę polisy owdowiałej osobie. Dla pary małżeńskiej równoważne są dwa przypadki takiego ubezpieczenia: $12 \to 7$ $14 \to 4$. Oblicz jednorazową składkę netto w takim ubezpieczeniu, jeśli: $\ddot{a}_x = 11$ oraz $\ddot{a}_y = 13$. [Odp. (A) 130 tys., (B) 135 tys., (C) 140 tys., (D) 145 tys., (E) 150 tys.]

8.19 Rozpatrujemy rentę wdowią dla pary $(x)$ i $(y)$. Renta wypłaca w następujący sposób:

1. gdy $(x)$ umrze jako pierwszy, $(y)$ zaczyna otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 2 na rok,
2. gdy $(y)$ umrze jako pierwsza, $(x)$ zaczyna otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 1 na rok.

Składki za to ubezpieczenie są płacone w postaci renty ciągłej aż do pierwszej śmierci z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto $\bar{P}$. Podaj rezerwę ${}_{10}\bar{V}$ obliczoną na jedną polisę. Dane są:

$$\bar{a}_{\overline{x}|} = 13, \qquad \bar{a}_{\overline{y}|} = 17, \bar{a}_{\overline{x:y}|},$$

$$\bar{a}_{\overline{x+10}|} = 10.5, \qquad \bar{a}_{\overline{y+10}|} = 15, \qquad \bar{a}_{\overline{x+10:y+10}|} = 6,$$

$${}_{10}p_x = 0.85, \qquad {}_{10}p_y = 0.97.$$

Wskaż najbliższą odpowiedź. [Odp. () 11.6, (B) 12.2, (C) 12.8, (D) 13.4, (E) 14.0.]

8.20 [EdA15.01.2000]Trzy osoby w wieku $(x)$, $(y)$, $(z)$ zakupiły bezterminowe ubezpieczenie na życie, wypłacające 20 000 zł na koniec roku pierwszej śmierci oraz 10 000 zł na koniec roku drugiej śmierci. Roczna składka płacona jest w stałej wysokości na początku każdego roku ubezpieczenia

do drugiej śmierci. Podaj roczną składkę w tym ubezpieczeniu. Dane są: $\ddot{a}_{x:y} = 7$, $\ddot{a}_{x:z} = 10$, $\ddot{a}_{y:z} = 11$, $\ddot{a}_{x:y:z} = 8$, $d = 6\%$. [Odp. (A) 472, (B) 660, (C) 1 100, (D) 1 220, (E) 1 533.]

8.21 [EdA08.04.2000]Ubezpieczenie dla dwóch niezależnych osób (z tej samej populacji) w wieku $(x)$ oraz $(x+1)$ płaci 1 000 zł na koniec roku pierwszej śmieci. Wyznacz składkę netto dla tego ubezpieczenia, płatną w stałej kwocie na początku każdego roku aż do pierwszej śmierci, jeśli wiadomo, że $p_x = 0.9$, $p_{x+1} = 0.85$, $A_{x+1,x+2} = 0.24$, $v = 0.95$. [Odp. (A) 29, (B) 31, (C) 33, (D) 35, (E) 37.]

8.22 [EdA14.010.2000]Żona (30) i mąż (35) rozważają zawarcie umowy ubezpieczenia ich wspólnego życia, z sumą ubezpieczenia 1 zł, wypłacaną na koniec roku pierwszej śmierci osobie pozostającej przy życiu lub innym uprawnionym. Regularna składka roczna $P_{30:35}$ płatna do pierwszej śmierci jest o 1% mniejsza niż odpowiednia składka $P_{31:36}$, którą musieliby płacić, jeśli się ubezpieczą za rok. Dane ponadto: $q_{30} = 0.00055$, $q_{35} = 0.003$, $v = 0.95$. Obliczyć $P_{30:35}$. [Odp. (A) 0.003, (B) 0.004, (C) 0.005, (D) 0.006, (E) 0.007.]

8.23 [EdA03.10.2000]

- ${}_tp_x = 1 - t^2 q_x$, $t \in [0, 1]$
- ${}_tp_y = 1 - t^3 q_y$, $t \in [0, 1]$
- $q_x = 0.2$
- $q_y = 0.4$
- $T(x)$ i $T(y)$ są niezależne.

Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba $(x)$ umrze w ciągu 9 miesięcy oraz jej śmierć będzie poprzedzona przez śmierć osoby $(y)$. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 0.001, (B) 0.003, (C) 0.005, (D) 0.007, (E) 0.009.]

8.24 [EdA24.11.1997]Mąż (30) wykupuje dla żony (20) rentę wdowią ciągłą, płacącą z intensywnością 12 000 zł na rok od momentu jego śmierci. Składki płacone są do momentu pierwszej śmierci w formie renty ciągłej z intensywnością $P$ na rok. Oblicz $P$ jeśli dane są

$$\mu_{30+t}^{(\mathrm{m})} = 0.02 \qquad \mu_{20+t}^{(\dot{\mathrm{z}})} = 0.01 \qquad \delta = 0.05.$$

[Odp. (A) 3800, (B) 4000, (C) 4200, (D) 4400, (E) 4600.]

8.25 [EdA07.12.1996]Rodzice (25) i (35) wykupili dziecku (0) polisę posagową, dającą dziecku w wieku 20 lat wypłatę tylko wtedy, gdy będzie ono całkowitą sierotą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dojdzie do wypłaty posagu, jeśli natężenie zgonów jest w tej populacji stałe i wynosi $\mu > 0$. [Odp. (A) $\exp(-45\mu) + \exp(-55\mu) - 1$, (B) $(\exp(-45\mu) + \exp(-55\mu))/2$, (C) $\exp(-20\mu) - 2\exp(-40\mu) + \exp(-60\mu)$, (D) $(\exp(-20mu) - 2\exp(-40\mu) + \exp(-60\mu))/2$, (E) $(\exp(-45\mu) + \exp(-55\mu) + \exp(-100\mu))/3$.]

8.26 [EdA214.10.2000]Oblicz $\mathring{e}_{40:50}$, jeśli wiadomo że:

- osoba w wieku 50 lat jest niepaląca,
- osoba w wieku 40 lat jest paląca,
- $\mu_x^p = 2 \cdot \mu_x^n$,
- $l_x^n = 100 \cdot (100 - x)$ dla $0 \leq x \leq 100$,

gdzie indeks górny $n$ oznacza osobę niepalącą, natomiast $p$ osobę palącą. [Odp. (A) 11, (B) 14, (C) 17, (D) 20, (E) 24.]

# 9 Zadania

9.1 W następującym fragmencie tablicy szkodowości dla obu płci łącznie TSZ-PL99 z dodatku dla $x = 50, \ldots, 54$ uzupełnić brakujące kolumny.

| $x$ | $l_x^{(\tau)}$ | $d_x^{(1)}$ | $d_x^{(2)}$ | $q_x^{(1)}$ | $q_x^{(2)}$ | $q_x^{(\tau)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 91708 | 661 | 85 | | | |
| 51 | 90961 | 656 | 85 | | | |
| 52 | 90221 | 650 | 84 | | | |
| 53 | 89487 | 645 | 83 | | | |
| 54 | 88759 | 640 | 83 | | | |
| 55 | 88037 | 991 | 80 | | | |

Korzystając z tej tablicy policzyć ${}_kp_{50}^{(\tau)}$, dla $k = 2, 3, 4$, ${}_2q_{52}^{(1)}$, ${}_{2|}q_{52}^{(1)}$. Ile wynosi $l_{56}^{\tau}$?

9.2 Na podstawie tablicy 9.1 obliczyć (i) prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku z powodu przyczyny 1 w wieku 24 lat, (ii) prawdopodobieństwo, że (25)-latek umrze w ciągu roku z dowolej przyczyny, (iii) prawdopodobieństwo, że (26)-latek umrze w ciągu dwóch lat z powodu przyczyny 2.

Tablica 9.1: Tablica na 2 ryzyka

| $x$ | $l_x^{(\tau)}$ | $d_x^{(1)}$ | $d_x^{(2)}$ |
|---|---|---|---|
| 24 | 97526 | 33 | 102 |
| 25 | 97391 | 35 | 105 |
| 26 | 97251 | 37 | 110 |
| 27 | 97104 | 39 | 115 |
| 28 | 96950 | 39 | 122 |
| 29 | 96789 | 42 | 126 |

9.3 [EdA13.04.2002] Osoba, która 1 stycznia kończy 50 lat, należąca do populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 80 lat będzie 1 października uczestniczyła wraz z grupą osób w krótkotrwałej imprezie (ekstremalny sport), którą przeżywa 90 % uczestników. Obliczyć $q_{50}^{(1)}$ i $q_{50}^{(2)}$, gdzie 1 oznacza śmierć naturalną, a 2 śmierć podczas wspomnianej imprezy.

9.4 Obliczyć o ile procent wzrośnie składka na ubezpieczenie jednoroczne dla osoby, kończącej 1 stycznia 40 lat, planującej 1 października uczestniczyć wraz z grupą osób w krótkotrwałej imprezie (ekstremalny sport), którą przeżywa 90 % uczestników. Przyjąć czas rozkład przyszłego czasu życia tej osoby jest dany przez TTŻ-PL97m oraz $i = 3\%$. Z polisy jest wypłacona suma ubezpieczenia 1 jedynie z powodu śmierci nie będącej następstwem branie udziału w imprezie.

9.5 Osoba, która 1 stycznia kończy 50 lat, należąca do populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 80 lat będzie 1 lipca oraz 1 października uczestniczyła wraz z grupą osób w krótkotrwałych imprezach (ekstremalny sport), każdą z nich przeżywa 80 % uczestników. Obliczyć $q_{50}^{(1)}$ i $q_{50}^{(2)}$, gdzie 1 oznacza śmierć naturalną, a 2 śmierć podczas wspomnianej imprezy.

9.6 Rozważmy ubezpieczenie od śmierci, której natężenie jest stałe i równe 0.05 oraz od nieszczęśliwego wypadku powodującego trwałe kalectwo, którego natężenie wystąpienia równa się 0.01. W chwili śmierci wypłacona jest suma ubezpieczenia 1, natomiast od momentu inwalidztwa aż do śmierci płacona jest ciągła renta z intensywnością 1. Obliczyć JSN.

9.7 Dla 1000 osób w wieku 25 lat obliczyć oczekiwaną liczbę osób które umrą w przeciągu roku z powodu przyczyny 1. Również policzyć oczekiwaną liczbę osób, które przeżywszy pierwszy rok umrą w następnym z powodu przyczyny 1. Obliczenia przeprowadzić dla dwuszkodowej tablicy 9.1.

9.8 Odejścia z pracy mogą być z dwóch powodów: śmierć (1) lub zmiana pracy (2). Zmiana pracy może następować jedynie w dniu 1 października. Zakładając, że w ciągu roku śmiertelność jest jednostajna oraz TTŻ-PLm97 oraz z powodu zmiany pracy opuscza 5% pracowników, obliczyć prawdopodobieństwo $q_{50}^{(\tau)}$, że (50)-latek w ciągu roku przestanie pracować (przyjąć, że 1 stycznia jest dniem urodzin pracowników).

## Zadania teoretyczne

9.9 Opisać przy pomocy $T_x$ i $J_x$ dopełnienie zdarzenia $\{T_x \leq t, J_x = j\}$. Zauważyć, że ogólnie $1 - {}_tq_x^{(j)} \neq \Pr(T_x > t, J_x = j)$. Czy znając historię życia $(x)$-latka od chwili zawarcia umowy do czasu $t$ da się rozstrzygnąć, czy w jego przypadku zaszło zdarzenie $\{\, T_x > t, J_x = j \,\}$? A zdarzenia $\{\, T_x \leq t, J_x = j \,\}$, $\{\, T_x > t \,\}$?

9.10 Udowodnić, że

$$\Pr(J_x = j | T_x = t) = \frac{f_x(t,j)}{f_x(t)} = \frac{\mu_{[x]+t}^{(j)}}{\mu_{[x]+t}^{(\tau)}}.$$

(Formalna definicja tego warunkowego prawdopodobieństwa, którego warunek ma prawdopodobieństwo 0, wymaga aby była to funkcja dwu zmiennych $j, t$ spełniająca

$$\Pr(J_x = j, a < T_x \leq b) = \int_a^b \Pr(J_x = j | T_x = t)\, f_x(t)\, \mathrm{d}t$$

dla każdego $j = 1, \ldots, m$, $0 \leq a \leq b$.)

9.11 Udowodnić tożsamość

$$ {}_tq_x^{(j)} = \frac{{}_td_x^{(j)}}{{}_td_x^{(\tau)}}\ {}_tq_x^{(\tau)}. $$

9.12 Udowodnić przy założeniu HCFM-D

$$ {}_sp_x^{'(j)} = \left({}_sp_x^{(\tau)}\right)^{{}_rq_x^{(j)}/\,{}_rq_x^{(\tau)}}, \quad 0 \le s \le 1,\ 0 < r < 1. \tag{9.1} $$

Stąd przechodząc z $r \to 1$ mamy

$$ {}_sp_x^{'(j)} = \left({}_sp_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/\,q_x^{(\tau)}}, \quad 0 \le s \le 1. \tag{9.2} $$

Pokazać, że (9.2) jest również prawdziwe przy HU-D. Przekształcając udowodnić, że

$$ {}_sq_x^{(j)} = \frac{\log\ {}_rp_x^{'(j)}}{\log\ {}_rp_x^{(\tau)}}\ {}_sq_x^{(\tau)}. \tag{9.3} $$

9.13 Udowodnić, że przy założeniu HU$'$-D mamy

$$ {}_tq_x^{(1)} = q_x^{'(1)}(t - q_x^{'(2)}\frac{t^2}{2}), \qquad 0 \le t \le 1, $$

skąd wywnioskować, że HU-D nie może wtedy być prawdziwa.

9.14 Udowodnić, że jeśli $T_x$ jest skończone, to warunek $\int_0^\infty \mu_{[x]+s}^{(\tau)}\,\mathrm{d}s = \infty$ musi być spełniony. Podać przykład i intepretację gdy nie zachodzi $\int_0^\infty \mu_{[x]+s}\ \mathrm{d}s = \infty (j = 1, \ldots, m)$.

## Zadania dodatkowe

9.15 [EdA14.10.2000] W modelu o *dwóch ryzykach współbieżnych [double decrement model]* niech $q_x^{(i)}$, $\mu_x^{(i)}$ oznaczają odpowiednio prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia oraz natężenie zdarzenia w *stowarzyszonym modelu pojedynczego ryzyka [associated single decrement model]*. Przyjmijmy następujące oznaczenia: $s$ – śmierć oraz $n$ – śmierć w wyniku nieszczęśliwego wypadku. Dane jest:

1. $q_x^{(s)} = 0.6$ oraz jest równomiernie rozłożone w ciągu roku,
2. $\mu_{x+t}^{(n)} = 0.04$ dla $0 \le t \le 1$.

Wyznacz składkę netto za ubezpieczenie na okres 1 roku (bez uwzględnienia oprocentowania) z którego w przypadku zajścia zdarzeń objętych umową wypłacane są następujące świadczenia:
– 1000 w przypadku śmierci naturalnej (zajście zdarzenia s),
– 2000 w przypadku śmierci w wyniku wypadku (zajście zdarzenia n). Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 133, (B) 134, (C) 135, (D) 136, (E) 137.]

9.16 [EdA05.12.1998] Mąż, obecnie w wieku $x$, ubezpiecza się na wypadek śmierci i na wypadek inwalidztwa. Natężenia obu rodzajów szkodowości wynoszą odpowiednio $\mu_{x+t}^{(\text{mś})} = 0.015$, $\mu_{x+t}^{(\text{mi})} = 0.005$. Jeśli mąż zostanie inwalidą, to nie ma szans na wyjście z inwalidztwa i przechodzi do podpopulacji o wyższej śmiertelności $\mu_{x+t}^{(\text{miś})} = 0.04$. Natężenie wymierania kobiet wynosi $\mu_{x+t}^{(\dot{z})}$. Jeśli mąż umrze (nie będąc inwalidą), to jego żona, obecnie w wieku $y$, będzie pobierać dożywotnio rentę ciągłą z intensywnością roczną $\bar{P}$. Jeśli natomiast mąż zostanie inwalidą, to do końca życia będzie pobierał rentę ciągłą z intensywnością roczną $2\bar{P}$. Mąż płaci składki w formie renty ciągłej z intensywnością roczną $\bar{\pi}$, aż do wystąpienia jednego ze zdarzeń: własnej śmierci, inwalidztwa lub śmierci żony. Intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Oblicz $\bar{\pi}/\bar{P}$. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 0.377, (B) 0.431, (C) 0.452, (D) 0.486, (E) 0.547.]

9.17 [EdA26.10.1996] W ubezpieczeniu na życie z terminem 20 lat świadczenie jest płatne w momencie śmierci i wynosi:
(1) 1.50 zł, gdy przyczyną śmierci był wypadek,
(2) 1 zł, gdy śmierć spowodowała inna przyczyna.
Natężenie zgonów według obydwu przyczyn opisują odpowiednio:

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{60}, \qquad \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{t}{40}.$$

Wyznacz jednorazową składkę netto za tę polisę przy zerowej stopie procentowej. [Odp. (A) $1 - \exp(-5)$, (B) $\frac{5}{6}(1 - \exp(-20/3)$, (C) $\frac{3}{2}(1 - \exp(-20/3))$, (D) $\frac{6}{5}(1 - \exp(-25/3))$, (E) $\frac{3}{2}(1 - \exp(-25/3))$.]

9.18 Pokazać, że jeśli $b(t) = \bar{s}_{\overline{n}|}$ i $\bar{\Pi}$ jest stała intensywnością składki netto, to ${}_t\bar{\mathcal{V}} = \bar{\Pi}\bar{s}_{\overline{n}|}$.[3]

[3] Za Bowers et al, str. 253.