

**Rachunek prawdopodobieństwa 1B.**

Egzamin

13:15 – 16:00

Imię i Nazwisko.....

Nie wolno korzystać z książek i notatek.

Brudnopsis

Zad. 1. Losowo rozdano 52 karty do gry w brydża pomiędzy 4 graczy (po 13 kart). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

a) (5 pt.) każdy gracz otrzymał króla;

b) (5 pt.) któryś z graczy ma wszystkie karty tego samego koloru.

Cd. zad. 1.

Zad. 2. Niech  $N, X_1, X_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi,  $X_1, X_2, \dots$  są o jednakowym rozkładzie z funkcją charakterystyczną  $\phi_X(t)$  oraz  $N$  ma rozkład Poissona  $\text{Poi}(\lambda)$ . Niech

$$Y = \sum_{j=1}^N X_j .$$

(i)(5pt) Znaleźć funkcję charakterystyczną  $Y$ . Wsk. Rozbić przestrzeń zdarzeń względem wartości  $N$  – wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

(ii)(5pt) Niech  $F_\lambda$  będzie rozkładem  $Y$ . Pokazać, że  $F_\lambda * F_\mu = F_{\lambda+\mu}$ .

cd zad 2:

Zad. 3. (8pt.) Przy pomiarze boku prostokąta o długości  $m$  otrzymujemy wynik o rozkładzie normalnym  $\mathcal{N}(m, 0.01m^2)$ . Zakładamy, że kolejne pomiary dają wyniki niezależne. Niech boki prostokąta wynoszą odpowiednio  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ). Interesuje nas oszacowanie pola tego prostokąta. Mierzmy oba boki 100 razy i otrzymujemy wyniki  $(X_1Y_1), \dots, (X_{100}Y_{100})$ . Oszacować prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z 100 pomiarów różni się od prawdziwej wartości  $m_1m_2$  co najwyżej o  $0.01m_1m_2$ .

Cd.zad. 3

Zad. 4:

a. (5pt) Niech  $X_1, X_2$  będą zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie  $\mathcal{N}((0, 0), \Sigma)$  gdzie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dla jakiego  $a$ ,

$$Y_1 = aX_1 + X_2 + 1, \quad Y_2 = X_1 + aX_2 + 2$$

są niezależne.

b. (5pt) Dla jakiego  $a > 1$

$$P(Y_1 < Y_2 - 3)$$

jest największe. Podać tę wartość.

Cd zad 4:

Zad. 5 Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi, o jednakowym rozkładzie jednostajnym na odcinku  $[0, a]$  gdzie  $a > 0$  jest nieznane.

(i) (6pt.) Pokazać, że  $\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow a$  p.n.

b) (6pt.) Znaleźć gęstość zm. losowej  $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Obliczyć  $\mathcal{E} \max(X_1, \dots, X_n)$  i  $\mathcal{D}^2 \max(X_1, \dots, X_n)$

cd zad 5:

Zad 6. Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi, o jednakowym rozkładzie i  $\mathcal{E}|X_1| = \infty$ . Pokazać, że

a) (5pt) dla każdego  $a$  mamy  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq na) = \infty$ ,

b) (5pt)  $\sup_{n \geq 1} n^{-1}|X_n| = \infty$  p.n.

cd zad 6:

Zad. 7. (10pt) Niech  $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$  i

$$Y_1 = \mathbf{1}_{\{X < 3\}}, \quad Y_2 = \mathbf{1}_{\{X > -1\}} .$$

a) (4pt) Podaj liczbową wartość

$$p_1 = P(Y_1 = 1), \quad p_2 = P(Y_2 = 1), \quad p_{11} = P(Y_1 = 1, Y_2 = 1).$$

b) (6pt) Oblicz  $\mathcal{E}Y_i$ ,  $\mathcal{D}^2Y_1$  oraz  $\text{cov}(Y_1, Y_2)$  oraz funkcję charakterystyczną  $(Y_1, Y_2)$  w punkcie  $(1, 2)$  tj.

$$\mathcal{E}e^{i(Y_1 + 2Y_2)} .$$

(wystarczy podać wzory w terminach  $p_i, p_{ij}$ , nie trzeba obliczeń liczbowych prowadzić do końca).

Cd zad 7:

Brudnopsis.

Tablica 1: Tablice dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego  $\Phi(u)$ .

| $u$ | 0.00  | 0.01  | 0.02  | 0.03  | 0.04  | 0.05  | 0.06  | 0.07  | 0.08  | 0.09  |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7290 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8078 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8340 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9779 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |