

Rachunek prawdopodobieństwa 1B.

Egzamin

14:15 – 15:00

Imię i Nazwisko.....

Nie wolno korzystać z książek i notatek.

Brudnopsis

Zad. 1. (10 pkt) Rzucono 1000 razy sześcienna kostką. Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że suma oczek będzie między 3410 a 3590. Wsk. Oczekiwana wartość oczek wynosi 3.5 a odchylenie standardowe 1.7. Pokazać skąd się biorą te liczby, ale nie trzeba wykonywać rachunków w celu policzenia wartości oczekiwanej i wariancji! $\sqrt{1000} = 31.6$. Natomiast należy wykonać rachunki potrzebne do skorzystania z załączonych tablic rozkładu normalnego.

Cd zad 1:

Zad 2. Błąd pomiaru długości boków prostopadłościanu jest

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}),$$

gdzie

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6pt. Koszt związany z popełnieniem błędu jest $Y = X_1 + X_2 - X_3$. Obliczyć prawdopodobieństwo

$$P(Y > \sqrt{10}).$$

4pt. Obliczyć kowariancję $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_3)$.

cd. 2

Zad 3. (10 pkt.) Niech $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją mierzalną oraz

$$Z_j = \mathbf{1}_{\{f(X_j) > Y_j\}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Udowodnić

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{p.n.}$$

Cd. zad 3.

Zad 4. (10 pkt.) Niech $(X_n)_{n=1}^\infty$ będzie rodziną zmiennych losowych o rozkładzie Poissona $X_n \sim \text{Poi}(n)$. Pokazać, że

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$$

cd zad 4:

Zad 5. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, o jednakowym rozkładzie i $\mathbf{E}|X_1| = \infty$. Pokazać, że

- a) (5pt) dla każdego a mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| \geq na) = \infty$,
- b) (5pt) $\sup_{n \geq 1} n^{-1}|X_n| = \infty$ p.n.

cd zad 5:

Zad 6 (10 pkt). Niech $\xi_1, \xi_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie; $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = 0) = 1/2$. Definiujemy

$$X_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_{2j-1}}{2^j}, \quad X_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_{2j}}{2^j}.$$

Udowodnić, że X_1, X_2 są niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$.

Cd zad 6.

Brudnopsis.

Tablica 1: Tablice dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego $\Phi(u)$.

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7290	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8078	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8340	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9779	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986