

Wstęp do matematyki finansowej i aktuarialnej

Lista 1

Zbigniew Palmowski i Tomasz Rolski

1. Przypuśćmy, że X jest całkowalną zmienną losową a $\{\mathcal{F}_t\}$ - ustaloną filtracją. Udowodnij, że $M(t) = E[X|\mathcal{F}_t]$ jest jednostajnie całkowalnym martyngałem.
2. Udowodnij, że ruch Browna jest martyngałem.
3. Znajdź różniczkę stochastyczną dZ_t kiedy:

(i)

$$Z_t = e^{\alpha W_t};$$

(ii) $Z_t = X_t^2$, gdzie X rozwiązuje następujące równanie różniczkowe:

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

4. Funkcję $h(x_1, \dots, x_n)$ nazywamy harmoniczną jeśli $\Delta h = 0$ dla Laplasjanu Δ . Udowodnij, że dla harmonicznego funkcji h proces $X_t = h(W_1(t), \dots, W_n(t))$ jest martyngałem.
5. Znajdź EW_t^4 .
6. Znajdź $\int_0^t W_s dW_s$.
7. Używając reguły Feynmana-Kaca rozwiąż następujące cząstkowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) &= 0; \\ F(T, x) &= x^2. \end{aligned}$$

8. Udowodnij, że

$$X_t = e^{\alpha t} x_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dW_s$$

rozwiązuje stochastyczne równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t dt + \sigma dW_t, \\ X_0 &= x_0. \end{aligned}$$

9. Rozważmy standardowy model Blacka-Scholesa. Innowacyjna firma, Z & P, produkuje instrument pochodny 'złoty logarytm' (w skrócie ZL). Wypłata wynosi $\log S_T$, gdzie T jest terminem wygaśnięcia. Oczywiście jeśli $S_T < 1$, to nabywca musi zapłacić Z & P ściśle dodatnią kwotę. Znajdź arbitrażową cenę tego instrumentu pochodnego.

10. Rozważmy standardowy model Blacka-Scholesa. Znajdź arbitrażową cenę $X = (S_T)^\beta$.
11. W binarnej opcji wypłata następuje jeśli cena akcji w momencie wygaśnięcia T znajduje się w danym z góry przedziale $[\alpha, \beta]$. W przeciwnym przypadku nic nie jest wypłacane. Znajdź cenę arbitrażową tego instrumentu pochodnego.
12. Znajdź cenę arbitrażową w modelu Blacka-Scholesa $X = S_T/S_{T_0}$, gdzie termin wygaśnięcia jest równy T .
13. Zrób to samo dla $X = \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T S_u du$.

14. Rozważmy niemiecką korporację Ideal inc., której cena akcji w Euro opisana następująco:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Kurs wymiany Y_t PLN/Euro ma dynamikę:

$$dY_t = \beta S_t dt + \delta Y_t dW_t^*,$$

gdzie W^* i W są niezależnymi procesami Wienera. Broker Ideal Inc. tworzy instrument pochodny

$$X = \log [Z_T^2]$$

z terminem wygaśnięcia T , gdzie Z jest ceną akcji Ideal Inc. w złotych. Znajdź arbitrażową cenę X (w PLN) zakładając ustalone warunki początkowe oraz oznaczając przez r stałą krótkoterminową stopę procentową złotych.

15. Rozważmy rynek, w którym instrumenty finansowe są opisane następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} dB_t &= r B_t dt, & B_0 &= 1, \\ dS(t) &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW(t) + \delta S_{t-} dN_t, \end{aligned}$$

gdzie N jest niezależnym od procesu Wienera W procesem Poissona z intensywnością λ .

- (i) Czy powyższy model jest wolny od arbitrażu ?
- (ii) Czy ten rynek jest zupełny ?
- (iii) Czy istnieje jedyna cena arbitrażowa opcji europejskiej kupna na tym rynku ?
- (iv) Przypuśćmy, że chcemy zreplikować opcję europejską kupna z terminem wygaśnięcia: styczeń 2012. Czy jest możliwa (teoretyczna) replikacja przy użyciu portfela składającego się z instrumentu bezryzykownego, instrumentu podstawowego oraz opcji europejskiej kupna z terminem wygaśnięcia: grudzień 2012 ?

16. Udowodnij następujące twierdzenie.

Rozważmy następujący model:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, & B_0 &= 1, \\ dS(t) &= \alpha(t, S_t)S_t dt + \sigma(t, S_t)S_t dW(t) + \delta S_{t-} dN_t \end{aligned}$$

oraz instrument pochodny

$$X = \Phi(S_T, Z_T)$$

z terminem wygaśnięcia T , gdzie

$$Z_t = \int_0^t g(u, S_u) du.$$

Wtedy X może być zreplikowane za pomocą rozważanego portfela w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \phi_t^1 &= \frac{F(t, S_t, Z_t) - S_t F_s(t, S_t, Z_t)}{F(t, S_t, Z_t)}, \\ \phi_t^1 &= \frac{S_t F_s(t, S_t, Z_t)}{F(t, S_t, Z_t)}, \end{aligned}$$

gdzie F rozwiązuje problem brzegowy:

$$\begin{cases} F_t + srF_s + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 F_{ss} + gF_z - rF &= 0, \\ F(T, s, z) &= \Phi(s, z). \end{cases}$$

Proces wartości jest równy

$$F(t, s, z) = e^{-r(T-t)} E_{t,s,z}^Q [\Phi(S_t, Z_t)],$$

gdzie Q -dynamika jest opisana równaniami:

$$\begin{aligned} dS_u &= rS_u du + S_u \sigma(u, S_u) dW_u, \\ S(t) &= s, \\ dZ_u &= g(u, S_u) du, \\ Z(t) &= z. \end{aligned}$$

17. Rozważmy standardowy model Blacka-Scholesa i instrument pochodny

$$X = \begin{cases} K & S_T \leq A, \\ K + A - S_T & A < S_T < K + A, \\ 0 & S_T > K + A. \end{cases}$$

Zreplikuj ten instrument używając portfela złożonego z instrumentu bezryzykownego, akcji oraz opcji europejskiej kupna, który jest stały w czasie. Znajdź cenę arbitrażową X .

18. Zrób to samo dla

$$X = \begin{cases} K - S_T & 0 < S_T \leq K, \\ S_T - K & K < S_T. \end{cases}$$

19. Zrób to samo dla

$$X = \begin{cases} B & S_T > B, \\ S_T & A \leq S_T \leq B, \\ A & S_T < A. \end{cases}$$

20. Zrób to samo dla

$$X = \begin{cases} 0 & S_T < A, \\ S_T - A & A \leq S_T \leq B, \\ C - S_T & B \leq S_T \leq C, \\ 0 & S_T > C, \end{cases}$$

gdzie $B = (A + C)/2$.

21. Przypuśćmy, że mamy portfel P taki, że $\Delta_P = 2$ i $\Gamma_P = 3$. Chcemy zabezpieczyć ten portfel używając instrumentów F i G , dla których $\Delta_F = -1$, $\Gamma_F = 2$, $\Delta_G = 5$ i $\Gamma_G = -2$. Znajdź to zabezpieczenie.

22. Znajdź zabezpieczenie powyższego portfela używając instrumentu podstawowego.

23. Rozważmy model Blacka-Scholesa i samofinansujący się Markowski portfel o wartości $P(t, s)$. Udowodnij, że

$$\Theta_P + rs\Delta_P + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \Gamma_P = rP.$$

24. Użyj powyższej tożsamości aby udowodnić, że jeśli portfel jest delta i gamma neutralny, to replikuje on bezryzykowny instrument finansowy.

25. Udowodnij, że dla europejskiej opcji kupna mamy:

$$\Delta = N(d_1) - 1, \\ \Gamma = \frac{\phi(d_1)}{s\sigma\sqrt{T-t}}.$$

26. Zabezpiecz P tak aby był jednocześnie delta i vega neutralny.