

Rozdział X

Ubezpieczenia na wiele ryzyk

1

Wypłatę sumy ubezpieczenia i okres pobierania renty można związać nie tylko ze śmiercią osoby ubezpieczonej, ale także z innym zdarzeniem, jak na przykład nieszczęśliwy wypadek czy kalectwo. Można też rozróżniać przyczyny zgonu. Mamy wtedy do czynienia z tak zwanym *ubezpieczeniem na wiele ryzyk*. Używa się też pojęcia *ubezpieczenie wieloubytkowe* [*multiple decrement*] lub *ubezpieczenie wielopcyjne*. Ubezpieczenie na wiele ryzyk dotyczy więc jednego (x)-latka ale bierze pod uwagę różne „zdarzenia losowe” w jego życiu.

W tym rozdziale będziemy rozważali tylko sytuację, w której *w życiu osoby ubezpieczonej może zajść raz jeden, jedno z określonych w umowie zdarzeń losowych, na zakończenie trwania polisy*. Jest to więc bezpośrednio uogólnienie ubezpieczeń lub rent na życie, w których jedynym takim zdarzeniem brany pod uwagę była śmierć. Dodajmy na marginesie, że istnieje też teoria ubezpieczeń na wiele ryzyk, w których dopuszcza się w trakcie trwania polisy *wielokrotne zmiany stanu*, jak na przykład przechodzenie między różnymi stopniami niesprawności, które nie mają charakteru trwałego, z możliwościami wyzdrowień zanim ubezpieczony umrze. Analizowaniem takich ubezpieczeń będziemy się zajmować w następnym rozdziale.

¹17.03.2016

1 Podstawowe wielkości probabilistyczne

W tym paragrafie wyłożymy probabilistyczne podstawy ubezpieczeń na wiele ryzyk. Będziemy przy tym nawiązywać do materiału wyłożonego w rozdziale III. Jak zobaczymy, w teorii pojawiają się odpowiednie adaptacje hipotez agregacyjnych i interpolacyjnych, a także tablic trwania życia.

1.1 Czas i przyczyna wyjścia ze statusu

Jak już powiedziano, ubezpieczenie wieloopcyjne związane jest ze zbiorem określonych, opisanych w umowie, potencjalnych zdarzeń losowych (w potocznym tego słowa znaczeniu), zwanych *ryzykami*, *opcjami*, *przyczynami* lub *ubytkami*, które będziemy numerować od 1 do m . Na przykład 1 – *śmierć naturalna*, 2 – *śmierć na skutek nieszczęśliwego wypadku*, 3 – *trwała niezdolność do pracy z powodu nieszczęśliwego wypadku*. Będziemy rozpatrywać model, w którym w życiu (x) -latka może zajść tylko jeden raz, jedno z wymienionych zdarzeń.

Oznaczmy przez T_x czas do zajścia tego zdarzenia (mówi się też o *czasie trwania statusu* lub o czasie do *wyjścia ze statusu*, nawiązując do terminologii z poprzedniego rozdziału), a przez J_x jego rodzaj (czyli numer opcji, ubytku). W ujęciu probabilistycznym mamy więc wektor losowy (T_x, J_x) , gdzie $T_x \geq 0$, podobnie jak poprzednio przyszedł czas życia, jest nieujemną zmienną losową o wartościach rzeczywistych, a J_x jest dyskretną zmienną losową o wartościach w zbiorze $\{1, \dots, m\}$. Rozkład tego wektora opisać można podając łączną gęstość $f_x(t, j)$ $t \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, przy pomocy której obliczamy prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia w przedziale czasu $(a, b]$ z określoną opcją $j = 1, \dots, m$

$$\Pr(a < T_x \leq b, J_x = j) = \int_a^b f_x(t, j) \, dt.$$

Stąd w szczególności funkcja prawdopodobieństwa opcji J_x jest równa

$$\Pr(J_x = j) = \int_0^\infty f_x(t, j) \, dt,$$

a dystrybuanta czasu T_x do zajścia zdarzenia

$$\Pr(T_x \leq t) = F_x(t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t f_x(v, j) \, dv,$$

oraz jej gęstość

$$f_x(t) = \sum_{j=1}^m f_x(t, j).$$

Wielkości te mają swoje oznaczenia aktuarialne. Mamy więc:

- prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu dla (x) -latka przed upływem czasu t

$${}_tq_x^{(\tau)} = \Pr(T_x \leq t),$$

- prawdopodobieństwo pozostania w statusie dla (x) -latka przez czas t

$${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)},$$

- prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu dla (x) -latka przed upływem czasu t z przyczyny j ,

$${}_tq_x^{(j)} = \Pr(T_x \leq t, J_x = j),$$

- prawdopodobieństwa warunkowe wyjścia z statusu przez (x) -latka w czasie kolejnych t lat, całkowite oraz z przyczyny j , pod warunkiem, że po czasie s był on jeszcze w statusie

$${}_tq_{[x]+s}^{(\tau)} = \Pr(T_x \leq s + t \mid T_x > s),$$

$${}_tq_{[x]+s}^{(j)} = \Pr(T_x \leq s + t, J_x = j \mid T_x > s).$$

Zauważmy, że nie występuje oznaczenie ${}_tp_x^{(j)}$ (dlaczego? — por. zadanie 1.2).

Odpowiednikiem natężenia zgonów w przypadku wektora (T_x, J_x) jest pojęcie *natężenia (intensywności) wyjścia ze statusu* [force of decrement]. Podobnie jak w podrozdziale III.1.2 można to wprowadzić się jako

$$\Pr(T_x \leq t + h, J_x = j \mid T_x > t) = \frac{\int_t^{t+h} f_x(s, j) \, ds}{1 - F_X(t)}.$$

Teraz t jest punktem ciągłości $f_x(t, j)$, to

$$\frac{\int_t^{t+h} f_x(s, j) \, ds}{1 - F_X(t)} = \mu_{[x]+t}^{(j)} h + o(h).$$

To rozumowanie uzasadnia wprowadzenie pojęcia *natężenia (intensywności) wyjścia ze statusu z powodu przyczyny j* lub *crude force of mortality* jako²

$$\mu_{[x]+t}^{(j)} = \frac{f_x(t, j)}{1 - F_x(t)}. \quad (1.1)$$

Natomiast *całkowite natężenie (intensywność) wyjścia ze statusu* definiujemy jako

$$\mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)}.$$

Łatwo zauważyć, że zachodzą następujące własności

$$\mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_{[x]+t}^{(j)}, \quad (1.2)$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds}. \quad (1.3)$$

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{[x]+s}^{(j)} ds, \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{{}_t q_x^{(j)}} = f_x(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{[x]+t}^{(j)}, \quad (1.5)$$

Z powyższych tożsamości widzimy, że znajomość wszystkich intensywności wyjścia ze statusu $\mu_{[x]+t}^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$ pozwala wyznaczyć takie charakterystyki jak ${}_t p_x^{(\tau)}$, oraz ${}_t q_x^{(j)}$. Co więcej możemy wyznaczyć łączną gęstość $f_x(t, j)$ przez

$$f_x(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{[x]+t}^{(j)}. \quad (1.6)$$

Dowody zostawiamy czytelnikowi do sprawdzenia w zadaniu 1.3. Wskazówką niech będzie następujący przykład z dwoma ryzykami.

Przykład 1.1 Rozpatrzmy dwuopcynny model dla (x) -latka w którym

$$\mu_{[x]+t}^{(1)} = 0.01, \quad \mu_{[x]+t}^{(2)} = 0.02,$$

dla wszystkich $t \geq 0$. Pokażemy jak z tych danych można policzyć łączną gęstość $f_x(t, j)$. Wpierw obliczamy

$$\mu_{[x]+t}^{(\tau)} = \mu_{[x]+t}^{(1)} + \mu_{[x]+t}^{(2)} = 0.03,$$

²crude hazard rate

skąd, korzystając z (1.3)

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-0.03t}.$$

Teraz (1.5) daje dla $t \geq 0$

$$f_x(t, j) = \begin{cases} 0.01 e^{-0.03t}, & \text{dla } j = 1, \\ 0.02 e^{-0.03t}, & \text{dla } j = 2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Będziemy mówić, że spełniona jest *hipoteza jednorodnej populacji* dla modelu na wiele ryzyk ($\text{HJP}^{(\tau)}$) jeśli

$$\Pr(T_x \leq t, J_x = j) = \Pr(T_0 - x \leq t, J_0 = j \mid T_0 > x),$$

dla wszystkich $j = 1, \dots, m$, $x, t \geq 0$. Oczywiście wtedy T_x spełnia HJP z rozdziału III, tzn. zależność (III.2.1), ponieważ

$$\begin{aligned} \Pr(T_x > t) &= 1 - \sum_{j=1}^m \Pr(T_x \leq t, J_x = j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^m \Pr(T_0 - x \leq t, J_0 = j \mid T_0 > x) \\ &= \Pr(T_0 - x > t \mid T_0 > x). \end{aligned}$$

Przy założeniu $\text{HJP}^{(\tau)}$ mamy

$$\mu_{[x]+t}^{(j)} = \mu_{x+t}^{(j)}, \quad (1.8)$$

$${}_t q_{[x]+s}^{(j)} = {}_t q_{x+s}^{(j)}. \quad (1.9)$$

Wprowadza się *obcięty czas do wyjścia ze statusu* $K_x = \lfloor T_x \rfloor$. Funkcja prawdopodobieństwa w konwencji aktuarialnej zapisujemy

- ${}_k q_x^{(j)} = \Pr(K_x = k, J_x = j)$ – prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu z powodu ryzyka j jeśli całkowita liczba ukończonych lat wynosi j ($j = 0, \dots$).

Niech x będzie całkowite. Będziemy mówili, że jest spełniona *hipoteza agregacji dla modelu wieloopcyjnego* ($\text{HA}^{(\tau)}$) dla jeśli

$$\Pr(K_x = k, J_x = j) = \Pr(K_0 - x = k, J_0 = j \mid K_0 \geq x),$$

dla $k = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, m$. Założenie $HA^{(\tau)}$ dla (K_x, J_x) pociąga założenie HA dla K_x z rozdziału III, to znaczy zależność (III.2.11), ponieważ

$$\begin{aligned} \Pr(K_x = k) &= \sum_{j=1}^m \Pr(K_x = k, J_x = j) \\ &= \sum_{j=1}^m \Pr(K_0 - x = k, J_0 = j | K_0 \geq x) \\ &= \Pr(K_0 - x = k | K_0 \geq x). \end{aligned}$$

Przy założeniu $HA^{(\tau)}$ możemy korzystać z zależności

$$\Pr(K_x = k, J_x = j) = {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}, \quad (1.10)$$

$${}_k p_x^{(\tau)} = p_x^{(\tau)} p_{x+1}^{(\tau)} \cdots p_{x+k-1}^{(\tau)}. \quad (1.11)$$

Dodajmy, że bez założenia $HA^{(\tau)}$, w powyższych zależnościach występują prawdopodobieństwa warunkowe sygnalizowane nawiasem $[x]$ w odpowiednim indeksie. Zwróćmy też uwagę, że w bloku III oznaczeń pominięto indeks 1.

1.2 Hipotezy interpolacyjne

Omówimy teraz dwie podstawowe hipotezy interpolacyjne dla modelu na wiele ryzyk. Niech x będzie całkowite. Podobnie jak w sekcji III.3.1 powiemy, że rozkład (T_x, J_x) spełnia *hipotezę jednostajności dla modelu wieloopcyjnego* (piszemy $HU^{(j)}$). Jeśli $HU^{(j)}$ dla wszystkich $j = 1, \dots, m$ to piszemy HU^τ . jeśli dla $n = 0, 1, \dots$

$${}_{n+u}q_x^{(j)} = (1-u) {}_nq_x^{(j)} + u {}_{n+1}q_x^{(j)}, \quad 0 \leq u < 1. \quad (1.12)$$

W szczególnym przypadku, dla $n = 0$ mamy więc interpolację

$${}_uq_x^{(j)} = u q_x^{(j)} \quad 0 \leq u < 1. \quad (1.13)$$

Równość (1.12) implikuje oczywiście, sumując stronami po $j = 1, \dots, m$,

$${}_{n+u}q_x^{(\tau)} = (1-u) {}_nq_x^{(\tau)} + u {}_{n+1}q_x^{(\tau)}, \quad 0 \leq u < 1$$

co jest równoważne (III.3.1). Zatem $HU^{(\tau)}$ dla (T_x, J_x) pociąga HU dla T_x . Można też udowodnić następujący odpowiednik wzoru (III.3.2).

Fakt 1.2 Przy założeniu HU^τ mamy

$$\mu_{[x]+n+u}^{(j)} = \frac{q_{[x]+n}^{(j)}}{1 - u \frac{q_{[x]+n}^{(\tau)}}{q_{[x]+n}^{(\tau)}}} = \frac{q_{[x]+n}^{(j)}}{1 - u + u \frac{p_{[x]+n}^{(\tau)}}{p_{[x]+n}^{(\tau)}}}. \quad (1.14)$$

Dowód pozostawiamy czytelnikowi jako zadanie 1.8.

Analogicznie do HCFM z paragrafu III.3.2 powiemy, że rozkład (T_x, J_x) spełnia hipotezę stałego natężenia wyjścia ze statusu ($HCFM^{(j)}$). Jeśli $HCFM^{(j)}$ dla wszystkich $j = 1, \dots, n$ to piszemy $HCFM^{(\tau)}$ jeśli

$$\mu_{[x]+n+u}^{(j)} = \mu_{[x]+n}^{(j)}, \quad 0 \leq u < 1,$$

dla $n = 0, 1, \dots$ i $j = 1, \dots, m$. Oczywiście $HCFM^\tau$ dla (T_x, J_x) pociąga HCFM dla T_x , ponadto mamy następującą zależność.

Fakt 1.3 Przy założeniu $HCFM^{(\tau)}$

$${}_u q_x^{(j)} = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} {}_u q_x^{(\tau)} \quad 0 \leq u < 1.$$

Dowód Założenia faktu pociągają oczywiście $\mu_{[x]+u} = \mu_x$ dla $0 \leq u < 1$. Dalej mamy dla $0 \leq u < 1$

$$\begin{aligned} {}_u q_x^{(j)} &= \int_0^u f_x(t, j) \, dt \\ &= \int_0^u {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{[x]+t}^{(j)} \, dt \\ &= \mu_x^{(j)} \int_0^u {}_t p_x^{(\tau)} \, dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} \int_0^u {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)} \, dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} {}_u q_x^{(\tau)}. \end{aligned}$$

□

1.3 Model ryzyk konkurujących

Punktem wyjścia jest zadany rozkład $f_x(t, j)$ w modelu na wiele ryzyk rozpatrywanym w sekcji 1. W wielu wypadkach można taki model w sposób *naturalny* zaprezentować w terminach ryzyk konkurujących, chociaż od razu zauważmy, że z rozważań poniżej zobaczymy, że model ryzyk konkurujących można matematycznie zdefiniować zawsze. Dla każdego ryzyka j niech $T_x^{(j)}$ będzie czasem do wystąpienia tego ryzyka. Ustalmy ryzyko j dla którego zdefiniujemy *stowarzyszony model na jedno ryzyko* przez napisanie wzoru ma ogon dystrybuanty

$$\Pr(T_x^{(j)} > t) = e^{-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} ds} \quad t \geq 0, \quad (1.15)$$

gdzie $\mu_{[x]+t}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, m$) jest natężeniem wyjścia ze statusu z powodu ryzyk j zdefiniowanego w (1.1). Użyjemy oznaczenia $\text{minarg}_j(a_j)$ na określenie argumentu j dla którego a_j przyjmuje wartość minimalną (w naszym przypadku z prawdopodobieństwem 1 nie będzie niejednoznaczności). Określmy (T_x, J_x) wzorami

$$T_x = \min_{j=1, \dots, m} T_x^{(j)}, \quad (1.16)$$

$$J_x = \text{minarg}_{j=1, \dots, m} T_x^{(j)}. \quad (1.17)$$

Pokażemy teraz jak określić rozkład $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$ aby (T_x, J_x) miał rozkład $f_x(t, j)$. Jeśli to się uda to otrzymamy reprezentację w postaci *ryzyk konkurujących* [associated single decrement model]. Będziemy dalej postulować aby $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$ były **niezależne** oraz z ogonem dystrybuanty $T_x^{(j)}$ danym przez (1.15).³

Jest to pewien teoretyczny model związany z rozkładem zmiennych (T_x, J_x) czasu i przyczyny wyjścia ze statusu, w którym *do każdej z m przyczyny przypisany jest pewien (fukcyjny) czas jej trwania*. Dystrybuanty $T_x^{(j)}$ i ich dopełnienia mają swoje tradycyjne oznaczenia aktuarialne

$${}_t p_x^{(j)} = \Pr(T_x^{(j)} > t) = 1 - {}_t q_x^{(j)}.$$

Zauważmy też, że ${}_t p_x^{(j)}$ niekoniecznie zmierza do zera gdy $t \rightarrow \infty$, co oznacza, że zmienne $T_x^{(j)}$ mogą przyjmować wartości nieskończone (z prawdopodobieństwem $1 - \exp(-\int_0^\infty \mu_{[x]+s}^{(j)} ds)$); proponujemy czytelnikowi to sprawdzić

³konkurujący – współlistniejących

przez skonstruowanie odpowiedniego przykładu.)⁴ Wielkość ${}_tq_x^{(j)}$ będziemy nazywali *absolutnym wskaźnikiem wychodzenia ze statusu z przyczyny (ryzyka) j* lub też *prawdopodobieństwem netto wyjścia ze statusu z przyczyny (ryzyka) j*.

Aby udowodnić, że rzeczywiście (T_x, J_x) mają rozkład $f_x(t, j)$ będziemy potrzebować następujący lemat. Dowód jego jest podobny do dowodu przypadku gdy $m = 2$, który będzie podany w sekcji 1.5.

Lemat 1.4 *Niech (T_x, J_x) będzie określony przy pomocy (1.16)–(1.17). Wtedy*

$$\Pr(T_x \leq t, J_x = j) = \int_0^t f_x^{(j)}(s) \prod_{\ell \neq j} {}_s p_x^{(\ell)} ds,$$

gdzie $f_x^{(j)}(t) = -\frac{d}{dt} {}_t p_x^{(j)}$ jest gęstością $T^{(j)}$.

Fakt 1.5 *Wektor losowy (T_x, J_x) określony przy pomocy (1.16)–(1.17) ma łączną gęstość $f_x(t, j) = \frac{d}{dt} \Pr(T_x \leq t, J_x = j)$*

Dowód Z lematu 1.4 oraz (1.15) mamy

$$\begin{aligned} \Pr(T_x \leq t, J_x = j) &= \int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} e^{-\int_0^s \mu_{[x]+v}^{(j)} dv} e^{-\int_0^s \sum_{\ell \neq j} \mu_{[x]+v}^{(\ell)} dv} ds \\ &= \int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} {}_s p_x^{(\tau)} ds. \end{aligned}$$

Teraz korzystając z (1.5) widzimy, że łączna gęstość

$$\frac{d}{dt} \Pr(T_x \leq t, J_x = j)$$

jest $f_x(t, j)$. □

W świetle powyższego faktu, na zmienne $T_x^{(j)}$ można patrzeć jak na *konkurujące ze sobą niezależne czasy do wyjścia ze statusu z powodu danej przyczyny*. Wygrywająca, to znaczy najmniejsza, z tych zmiennych określa właściwy czas wyjścia T_x i opcję J_x . Założenie niezależności zmiennych losowych jest jednakże problematyczne i powinno wynikać z analizy konkretnego modelu.

Odnotujmy kilka prostych własności.

⁴Dac zadanie.

Fakt 1.6

$${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^m {}_t p_x'^{(j)}, \quad (1.18)$$

$${}_t q_x'^{(j)} \geq {}_t q_x^{(j)}. \quad (1.19)$$

Dowód Udowodnimy jedynie (1.19) pozostawiając (1.18) czytelnikowi. Mamy

$${}_t p_x'^{(j)} \geq {}_t p_x^{(\tau)}, \quad t \geq 0$$

skąd

$${}_t q_x'^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x'^{(j)} \mu_{[x]+s}^{(j)} ds \geq \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{[x]+s}^{(j)} ds = {}_t q_x^{(j)}.$$

□

Dla modelu stowarzyszonego dla ryzyka j możemy zdefiniować hipotezy HJP i HA jak w podrozdziale III.2, które będziemy oznaczać $\text{HJP}'^{(j)}$ i $\text{HA}'^{(j)}$ a jeśli hipotezy są prawdziwe dla $j = 1, \dots, n$ to piszemy odpowiednio HJP' i HA' . Podobnie możemy zdefiniować hipotezy interpolacyjne $\text{HU}'^{(j)}$, $\text{HCFM}'^{(j)}$ oraz jeśli są odpowiednio prawdziwe dla wszystkich $j = 1, \dots, m$ to HU' , i HCFM' .

Teraz zajmijmy się ogólnym modelem *konkurujących ryzyk*. Rozważmy rodzinę modeli stowarzyszonych z przyszłymi czasami życia $T_x^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$, dla j -tego modelu z dystrybucją jak w (1.15). Dalej **nie** będziemy zakładali, że przyszłe czasy życia $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Pokażemy teraz jak zmienne $(T_x^{(j)}; j = 1, \dots, m)$ wiążą się z oryginalnym czasem i przyczyną wyjścia ze statusu.

Podamy teraz jeszcze jeden związek pomiędzy stowarzyszonym modelem a wyjściowym modelem na wiele ryzyk, zachodzący przy założeniu jednej z hipotez interpolacyjnych.

Fakt 1.7 Przy założeniu $\text{HU}^{(\tau)}$ lub $\text{HCFM}^{(\tau)}$ zachodzi

$$q_x^{(j)} = \frac{\log p_x'^{(j)}}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}, \quad (1.20)$$

dla $j = 1, \dots, m$, jeśli tylko wszystkie $p_x'^{(j)} > 0$.

Dowód wynika z dwu pomocniczych zależności (1.37) i (1.38), których wyprowadzenie zostawiamy czytelnikowi jako zadanie 1.9 posyłając odpowiednio s lub r do 1.

Zauważmy, że $p_x^{(\tau)} \neq 1$ jeśli tylko wszystkie $p_x^{(j)} > 0$. mianowicie

$$p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^1 \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds} = \prod_j e^{-\int_0^1 \mu_{[x]+s}^{(j)} ds} < 1.$$

□

Jak już zauważyliśmy że zawsze mamy $\int_0^\infty \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds = \infty$, to wcale nie musi być

$$\int_0^\infty \mu_{[x]+s}^{(j)} ds = \infty, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.21)$$

choć przynajmniej raz tak musi być; dać przykłady!

1.4 Problem nieidentyfikowalności modelu

Statystycy zajmujący się analizą modeli przeżycia zauważyli następujący problem dotyczący *nieidentyfikowalności*. Jak zwykle $f_x(t, j)$ oznacza łączną gęstość

$$T_x = \min_{j=1, \dots, m} T_x^{(j)}, \quad J_x = \minarg_{j=1, \dots, m} T_x^{(j)}. \quad (1.22)$$

Przy założeniu niezależności przez

$$\begin{aligned} s_{1\dots m}(y_1, \dots, y_m) &= \Pr(T_x^{(1)} > y_1, \dots, T_x^{(m)} > y_m) \\ &= s_1(y_1) \dots s_j(y_m), \end{aligned}$$

oznaczamy łączną funkcję przeżycia dla zmiennych $T_x^{(j)}$. gdzie

$$s^{(j)}(y_j) = s_{1\dots m}(0, \dots, y_j, \dots, 0) = e^{-\int_0^{y_j} \mu_{[x]+t}^{(j)} dt}.$$

Przypomnijmy, że wtedy dla $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} {}_t p_x^{(\tau)} &= \Pr(\min_{j=1, \dots, m} T_x^{(j)} > t) = s_{1\dots m}(t, \dots, t) \\ f_x(t, j) &= s_{1\dots m}(t, \dots, t) \mu_{[x]+t}^{(j)}. \end{aligned}$$

Rozważymy teraz model (1.22) bez założenia niezależności zmiennych $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$, o których zakładamy jedynie, że ogon rozkładu brzegowego

zmiennej $T_x^{(j)}$ jest $e^{-\int_0^{y_j} \mu_{[x]+t}^{(j)} dt}$. Ogólną funkcję przeżycia (tj. założenia niezależności – dla odróżnienia łączną oznaczamy z *) zmiennych $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$ mamy

$$s_{1\dots m}^*(y_1, \dots, y_m) = \Pr(T_x^{(1)} > y_1, \dots, T_x^{(m)} > y_m)$$

Zauważmy, że

$$s_{1\dots m}^*(0, \dots, y_j, \dots, 0) = e^{-\int_0^{y_j} \mu_{[x]+t}^{(j)} dt}.$$

Pamiętając, że T_x z gęstością $f_x(t, j)$ ma reprezentację ([?eq:model?]) mamy

$$f_x(t, j) = \Pr(T_x^{(j)} \in dt, T_x^{(k)} > t; k \neq j).$$

Jeślibyśmy powtórzyli pomysł na intensywność wyjścia ze statusu z powodu ryzyka j , to musimy zdefiniować

$$\mu_{[x]+t}^{(j)} = \frac{\Pr(T_x^{(1)} > t, \dots, T_x^{(j)} \in dt, T_x^{(m)} > t)}{\Pr(T_x^{(1)} > t, \dots, T_x^{(m)} > t)}.$$

I tu występuje problem ponieważ bez założenia niezależności $s_{1\dots m}^* \neq s_{1\dots m}$ a więc musimy teraz zdefiniować Ponadto definiujemy

$${}_t p_x^{(\tau)} = \Pr(\min_{j=1, \dots, m} T_x^{(j)} > t) = s_{1\dots m}^*(t, \dots, t).$$

Zauważmy jeszcze, że

$$f_x(t, j) = s_{1\dots m}^*(t, \dots, t) \mu_{[x]+t}^{(j)}.$$

Dla modelu zależnych ryzyk konkurujących mamy więc dwa typy intensywności: $\mu_{[x]+t}^{(j)}$ - surową [crude] oraz $\mu_{[x]+t}^{(j)}$ - netto [net]. W przypadku niezależnych ryzyk pojęcia te pokrywają się. To można samemu pokazać jako proste ćwiczenie.

Przez *identyfikowalność* rozumie się, że znajomość gęstości $f_x(t, j)$ dla $t > 0, j = 1, \dots, m$ implikuje znajomość łącznego rozkładu $S_{1\dots m}^*(y_1, \dots, y_m)$ zmiennych $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$. Niestety to nie jest prawda. Mamy bowiem następujące twierdzenie: Tsiatis, A. (1975) A nonidentifiability aspect of competing risks. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **72**, 20–22. oraz Crowder, M. Identifiability crises in competing risks. *International Statistical Review*, **62**, 379–391.

Twierdzenie 1.8 *Przypuśćmy, że dane jest gęstość $f_x(t, j)$ dla pewnego modelu ryzyk konkurujących (1.22), gdzie $(T_x^{(j)})$ są zależne. Wtedy istnieje jedyny model ryzyk konkurujących dla gęstości $f(t, j)$ z niezależnymi $(T_x^{(j)})$.*

Jest to oczywiste ponieważ znajomość $\{f_x(t, j) : t \geq 0, j = 1, \dots, m\}$ jest równoważna znajomości $\{\mu_{[x]+t}^{(j)} : t \geq 0, j = 1, \dots, m\}$. Wynika to z równości (1.6) i poprzedzających (1.2) i (1.3).

1.5 Przypadek $m = 2, 3$.

Rozważymy teraz przypadki z dwoma lub trzema ryzykami, dla których podamy kilka wzorów. Ponadto też, aby uniknąć rachunków na rozkładach ułomnych, chwilowo przyjmiemy założenie (1.21). Wychodzimy od dwóch **niezależnych** modeli stowarzyszonych; $T_x^{(j)}$ jest przyszłym czasem życia z intensywnością $\mu_{[x]+t}^{(j)}$, ($j = 1, 2$). Postulatem jest, że

$$T_x = \min(T_x^{(1)}, T_x^{(2)}), \quad (1.23)$$

$$J = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } T_x^{(1)} < T_x^{(2)}, \\ 2 & \text{jeśli } T_x^{(2)} \leq T_x^{(1)}. \end{cases} \quad (1.24)$$

Stąd mamy ${}_t p_x^{(j)} = \exp(-\int_0^t \mu_{[x]+s}^{(j)} ds)$ dla $j = 1, 2$. Oczywiście łączny rozkład wektora $(T_x^{(1)}, T_x^{(2)})$ zadany jest przez $\Pr(T_x^{(1)} > s, T_x^{(2)} > t) = {}_s p_x^{(1)} {}_t p_x^{(2)}$. To jest równoważne podaniu dystrybuanty dwuwymiarowej; patrz zadanie 1.1.

W dalszej części potrzebny będzie specjalny przypadek lematu 1.4. Jeśli niezależne ciągle zmienne losowe X i Y ; gdzie X ma gęstość $f_X(t)$ oraz F_Y jest dystrybuantą Y to korzystając z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite piszemy

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq t, X < Y) &= \int_0^\infty \Pr(X \leq t, X < Y | X = x) f_X(x) dx \\ &= \int_0^t \Pr(t < Y | X = x) f_X(x) dx \\ &= \int_0^t (1 - F_Y(x)) f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Korzystając z założenia niezależności i wprowadzonych oznaczeń mamy

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(1)} &= \Pr(T_x^{(1)} \leq t, T_x^{(1)} < T_x^{(2)}) \\ &= \int_0^t {}_sp_x^{(1)} \mu_{[x]+s}^{(1)} {}_sp_x^{(2)} ds, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(2)} &= \Pr(T_x^{(2)} \leq t, T_x^{(2)} \leq T_x^{(1)}) \\ &= \int_0^t {}_sp_x^{(2)} \mu_{[x]+s}^{(2)} {}_sp_x^{(1)} ds, \end{aligned} \quad (1.26)$$

oraz z formuły włączania-wyłączania (tj. wzory (IX.1.11) z $m = 2$)

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(\tau)} &= \Pr(T_x^{(1)} \leq t \text{ lub } T_x^{(2)} \leq t) \\ &= {}_tq_x^{(1)} + {}_tq_x^{(2)} - {}_tq_x^{(1)} {}_tq_x^{(2)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Teraz skorzystamy z tego, że mamy tylko dwa ryzyka i założmy, że obowiązuje $HU^{(\tau)}$, tzn., że dla $j = 1, 2$

$${}_{n+u}q_x^{(j)} = (1-u) {}_nq_x^{(j)} + u {}_{n+1}q_x^{(j)}, \quad 0 \leq u < 1. \quad (1.28)$$

mamy $HU^{(j)}$,

Fakt 1.9 Przy założeniu $HU^{(\tau)}$

$$q_x^{(1)} = q_x^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(2)}\right), \quad (1.29)$$

$$q_x^{(2)} = q_x^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(1)}\right). \quad (1.30)$$

Dowód Przypomnijmy, że przy założeniu $HU^{(\tau)}$ mamy dla $j = 1, 2$ i $0 \leq t < 1$

$${}_tp_x^{(j)} \mu_{[x]+t}^{(j)} = p_x^{(j)}.$$

co wynika z (III.3.2) oraz

$${}_tq_x^{(j)} = t q_x^{(j)}$$

co wynika z (III.3.4). Teraz

$$\begin{aligned}
 q_x^{(1)} &= \int_0^1 s p_x'^{(1)} \mu_{[x]+s}^{(1)} s p_x'^{(2)} ds \\
 &= \int_0^1 s p_x'^{(1)} \mu_{[x]+s}^{(1)} (1 - s q_x'^{(2)}) ds \\
 &= \int_0^1 q_x'^{(1)} (1 - s q_x'^{(2)}) ds \\
 &= q_x'^{(1)} (1 - \frac{1}{2} q_x'^{(2)}).
 \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy drugie równanie. $\square$

W przypadku $m = 3$ możemy przeprowadzić analogiczne rozumowanie z

$$T_x = \min(T_x^{(1)}, T_x^{(2)}, T_x^{(3)}),$$

oraz

$$J_x = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } T_x^{(1)} < \min(T_x^{(2)}, T_x^{(3)}) \\ 2 & \text{jeśli } T_x^{(2)} \leq \min(T_x^{(1)}, T_x^{(3)}) \\ 3 & \text{jeśli } T_x^{(2)} \leq \min(T_x^{(1)}, T_x^{(2)}), \end{cases}$$

gdzie $T_x^{(1)}, T_x^{(2)}$ i $T_x^{(3)}$ są **niezależnymi** zmiennymi losowymi, z intensywnościami odpowiednio $\mu_{[x]+t}^{(1)}, \mu_{[x]+t}^{(2)}, \mu_{[x]+t}^{(3)}$. Zauważmy, że ze względu na ciągłość zmiennych $T_x^{(1)}, T_x^{(2)}, T_x^{(3)}$ w definicji J_x nie musimy się martwić co się dzieje jeśli $T_x^{(i)} = T_x^{(j)}$. Będziemy potrzebować odpowiednika wzoru (1.25): ponieważ

$$\Pr(s < \min(T_x^{(2)}, T_x^{(3)})) = s p_x'^{(2)} s p_x'^{(3)}$$

więc

$$\begin{aligned}
 {}_t q_x^{(1)} &= \Pr(T_x'^{(1)} \leq t, T_x'^{(1)} < \min(T_x'^{(2)}, T_x'^{(3)})) \\
 &= \int_0^t s p_x'^{(1)} \mu_{[x]+s}^{(1)} s p_x'^{(2)} s p_x'^{(3)} ds.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Fakt 1.10 Przy założeniu $HU^{(\tau)}$

$$q_x^{(1)} = q_x'^{(1)} (1 - \frac{1}{2} (q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}) + \frac{1}{3} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}) . \tag{1.32}$$

$$q_x^{(2)} = q_x'^{(2)} (1 - \frac{1}{2} (q_x'^{(1)} + q_x'^{(3)}) + \frac{1}{3} q_x'^{(1)} q_x'^{(3)}) \tag{1.33}$$

$$q_x^{(3)} = q_x'^{(3)} (1 - \frac{1}{2} (q_x'^{(1)} + q_x'^{(2)}) + \frac{1}{3} q_x'^{(1)} q_x'^{(2)}) . \tag{1.34}$$

Dowód Korzystając z wzoru (1.31) mamy

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^t s p_x'^{(1)} \mu_{[x]+s}^{(1)} s p_x'^{(2)} s p_x'^{(3)} ds \\ &= \int_0^1 q_x'^{(1)} (1-s) q_x'^{(2)} (1-s) q_x'^{(3)} ds \\ &= q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} (q_x'^{(2)})\right) + q_x'^{(3)} + \frac{1}{3} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}. \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy drugie i trzecie równanie. $\square$

Oczywiście można rozwiązać układ równań (1.29), (1.32) lub (1.32)–(1.34) i wyznaczyć prawdopodobieństwa $q_x'^{(j)}$. Można podobne układy równań ułożyć też dla wyższych m . Rozwiązania te mają większe znaczenie w statystyce medycznej niż w zastosowaniach aktuarialnych. Rozpatruje się wymieranie hipotetycznej populacji, w której śmierć następuje z powodu jednej konkretnej choroby. Jest to związane ze starym pytaniem, postawionym przez Farra w 1875 roku, który pytał: Jaki byłby efekt na oczekiwaną długość życia gdyby udało się wyeliminować pewną chorobę. W ubezpieczeniach przeważnie do wyznaczania składek potrzebujemy prawdopodobieństw $q_x^{(j)}$.

Napisac $\Pr(T_x'^{(1)} \leq s, T_x'^{(2)} \leq t)$ jeśli znana jest funkcja $\Pr(T_x'^{(1)} > s, T_x'^{(2)} > t)$.

1.6 Tablice na wiele ryzyk

Zagregowaną *tablicą na wiele ryzyk* lub *wielopcyjną* [*multiple decrement tables*] nazywamy ciąg $\{(l_n^{(\tau)}, d_n^{(1)}, \dots, d_n^{(m)})\}_{n=0}^\infty$, którego n -ty element składa się z $1+m$ liczb: $l_n^{(\tau)}$ i $d_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$, które można zinterpretować jako, odpowiednio, liczbę członków kohorty na początku roku n , oraz liczby osób które ubyły z kohorty w okresie $[n, n+1)$ z opcją j (porównaj interpretację ogólnej TTŻ z paragrafu III.4.1). Oczywiście wymaga się aby $\sum_{j=1}^m d_n^{(j)} = l_n^{(\tau)} - l_{n+1}^{(\tau)}$. Formalnie, przy założeniu $HA^{(\tau)}$, ciąg ten jest związany z warunkowymi prawdopodobieństwami wyjścia n -latka ze statusu przed upływem roku k , z przyczyny j poprzez zależności

$${}_k q_n^{(j)} = \frac{\sum_{l=n}^{n+k-1} d_l^{(j)}}{l_n^{(\tau)}} \quad n, k = 0, 1, \dots$$

Tablica 1.1: Fragment tablicy na dwa ryzyka.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
20	0.00136	0.0089596	0.0013539	0.0089535	10000	13.539	89.535
21	0.00136	0.0089596			9896.9		
22	0.00136	0.0089596					
23	0.00134	0.0089596					
24	0.00138	0.0089596					
25	0.00144	0.0089596					

Używa się też czasami oznaczenia ${}_k d_n^{(j)} = \sum_{i=n}^{n+k-1} d_i^{(j)}$, oraz ${}_k d_n^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m {}_k d_n^{(j)}$.
W szczególności

$$d_n^{(j)} = l_n^{(\tau)} q_n^{(j)}, \quad .$$

W dodatku D podajemy przykładową tablicę na dwa ryzyka TSZ-PL99 (tablica D.8) biorącą pod uwagę dwie przyczyny wyjścia ze statusu: śmierć naturalną ($j = 1$) oraz śmierć wskutek nieszczęśliwego wypadku ($j = 2$) dla Polski w roku 1999.

Przykład 1.11 Zbudujemy tablicę na dwa ryzyka z powodu śmierci naturalnej (1) i wypadku (2), przy założeniu hipotezy HJP^(τ). Przyjmujemy, że z powodu ryzyka (1) kohorta wymiera zgodnie z tablicą TTŻ-PL97m, której odpowiedni fragment jest przytoczony w tablicy 1.1

i $\mu_{20+t}^{(2)} = 0.009$, dla $0 \leq t \leq 10$. Oznacza to, że $q_x'^{(2)} = 1 - e^{-0.009} = 0.0089596$. Następnie obliczamy $q_x^{(j)}$ z równań (1.29), (1.29). Proponujemy czytelnikowi uzupełnić tablicę 1.1.

Przykład 1.12 Przypuśćmy, że rozpatrujemy populację kobiet w pewnym zakładzie pracy w przedziale wiekowym [50,60]. Przyjmujemy 4 przyczyny odejścia z pracy: 1 - śmierć, 2 - zwolnienie się, 3 - odejście na emeryturę. Pomijamy przyczynę 4 - wyrzucenie z pracy. Dla przyczyny 1 przyjmujemy tablicę TTŻ-PL97k, z powodu przyczyny 2 pracownice odchodzą ze stałą intensywnością $\mu^{(2)} = 0.03$. Natomiast schemat odejść na emeryturę jest następujący. W wieku 55 lat odchodzi 20% a następnie wiemy, że $\mu_{55.5}^{(3)} = 0.08$, $\mu_{56.5}^{(3)} = 0.07$, $\mu_{57.5}^{(3)} = 0.03$, $\mu_{58.5}^{(3)} = 0.02$, $\mu_{59.5}^{(3)} = 0.01$. W wieku 60 lat wszystkie pozostałe przechodzą na emeryturę. Przyjmujemy radiks $l_{50}^{(\tau)} = 10000$. Wtedy dla $x = 50, \dots, 54$ mamy $q_x'^{(1)} = q_x$ gdzie q_x

jest wzięte z tablicy TTŻ-PL97k, $q_x^{(2)} = (1 - \exp(-0.03))$ oraz $q_x^{(3)} = 0$. Liczymy $q_x^{(j)}$ korzystając dla $x = 50, \dots, 54$ z wzorów (1.29), (1.30). Następnie obliczamy $d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$ w sposób sekwencyjny. To znaczy obliczamy $d_{50}^{(1)}$ i $d_{50}^{(2)}$ z $d_x^{(j)} = l_{50}^{(\tau)} q_{50}^{(j)}$, skąd wyliczamy $l_{51}^{(\tau)} = l_{50}^{(\tau)} - d_{50}^{(1)} - d_{50}^{(2)}$, itd. To daje $l_{55-}^{(\tau)} = l_{50}^{(\tau)} - \sum_{l=0}^4 (d_{x+l}^{(1)} + d_{x+l}^{(2)} + d_{x+l}^{(3)})$. Zauważmy, że ze względu na specyfikę zadania funkcja $l_x^{(\tau)}$ jest nieciągła w $x = 55$. Ponieważ na początku 55 roku życia 20% kobiet przechodzi na emeryturę mamy $l_{55}^{(\tau)} = 0.8l_{55-}^{(\tau)}$. Dalej będziemy przyjmować hipotezę HCFM⁽³⁾. Wtedy dla $x = 55, \dots, 60$ mamy $d_x^{(1)} = l_{50}^{(\tau)} q_x$ gdzie q_x jest wzięte z tablicy TTŻ-PL97k, $d_x^{(2)} = l_x^{(\tau)}(1 - \exp(-0.03))$ oraz $d_x^{(3)} = l_x^{(\tau)}(1 - \exp(-\mu_{x+0.5}))$. Stąd liczymy prawdopodobieństwa $q_x^{(j)} =$ Następnie obliczamy $q_x^{(j)}$ korzystając z wzorów (1.32)–(1.34) i w sposób sekwencyjny $q_{55}^{(j)}, l_{56}^{(\tau)}$, itd.

Uwaga W teorii modelowania przeżycia [survival models], przy omawianiu tablic na wiele ryzyk, używa się następujących oznaczeń, różniących się od przyjętych w tej książce. Mianowicie rozważane funkcje jak q_x poprzedzone są prefiksem a od *all* – *w obecności wszystkich przyczyn*. W szczególności, dla x -latka

- ${}_t(aq)_x = {}_tq_x^{(\tau)}$ – prawdopodobieństwo śmierci do czasu t ,
- ${}_t(aq)_x^{(j)} = {}_tq_x^{(j)}$ – prawdopodobieństwo śmierci do czasu t z powodu przyczyny j ,
- $(al)_x = l_x^{(\tau)}$ – oczekiwana liczba przeżywających wiek x z początkowych $(al)_0$,
- ${}_t(ad)_x^{(j)} = {}_td_x^{(j)}$,
- $(al)_x^{(j)}$ – liczba żyjących w wieku x , którzy w przyszłości umrą z powodu przyczyny j .
- $(a\mu)_{[x]+t} = -\frac{1}{(al)_x} \cdot \frac{d(al)_x}{dx}$,
- $(a\mu)_{[x]+t}^{(j)} = -\frac{1}{(al)_x} \cdot \frac{d(al)_x^{(j)}}{dx}$.

Natomiast wielkości w modelu stowarzyszonym oznaczane są następująco:

- q_x^j lub q_{jx} – prawdopodobieństwo śmierci w modelu stowarzyszonym dla ryzyka j (u nas $q_x^{(j)}$),
- l_x^j lub l_{jx} – oczekiwana liczba przeżywających w modelu stowarzyszonym dla ryzyka j .

1.7 Ryzyka specjalne

Dal ułatwienia przyjmujemy, że mamy $m = 2$ ryzyk. Rozważmy (T_x, J_x) zdefiniowane przez (1.23) i naszym celem jest policzenie $q_x^{(1)}, q_x^{(2)}$. Poprzednio zakładaliśmy, że wszystkie rozkłady zmiennych stowarzyszonych $T_j^{(j)}$ mają gęstość. Teraz przeanalizujemy sytuację, gdy tylko $T_x^{(1)}$ spełnia ten warunek tj (a więc ma dobrze zdefiniowaną intensywność $\mu_{[x]+t}^{(1)}$), podczas gdy $T_x^{(2)}$ może przyjmować jedynie w odcinku $[0, 1)$ tylko jedną wartość, powiedzmy w $0 \leq k < 1$ z prawdopodobieństwem $\nu^{(2)}$. A więc

$${}_t p_x^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } t < k \\ 1 - \nu^{(2)} & \text{jeśli } k \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Możemy sobie wyobrazić sytuację, gdy x -latek chce w najbliższym roku wziąć udział w jednodniowej imprezie o bardzo wysokim ryzyku śmierci. A więc, że przeżyje $(1 - \nu^{(2)}) \times 100\%$ z osób biorących w niej udział (uważamy, że dzień to jest punkt $0 \leq k < 1$). Natomiast $T_x^{(1)}$ może być na przykład czasem do naturalnej śmierci. Ubezpieczenia tego typu nazywamy specjalnymi.

Zastanowimy się teraz jak obliczyć tablicę na dwa ryzyka $l_x^{(\tau)}$ oraz $\{d_x^{(1)}, d_x^{(2)}\}$ ($x = 0, 1, \dots$). W tym celu radzimy spojrzeć na rys. 1.1.

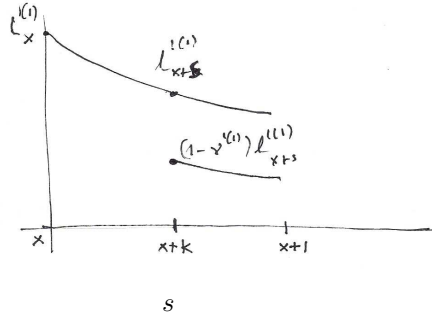
Niech będzie więc dana tablica $l_{x+t}^{(1)}$ w stowarzyszonym modelu dla ryzyka 1-szego. Jest to oczywiście funkcja ciągła. Kładziemy $l_x^{(\tau)} = l_x^{(1)}$. Liczba zmarłych w odcinku $[0, 1)$ z powodu ryzyka 1 wynosi

$$d_x^{(1)} = l_x^{(1)} - l_{x+k}^{(1)} + (1 - \nu^{(2)})(l_{x+k}^{(1)} - l_{x+1}^{(1)})$$

oraz z powodu przyczyny 2

$$d_x^{(2)} = \nu^{(2)} l_{x+k}^{(1)}.$$

Rysunek 1.1: xxxxx



Dalej będziemy zakładać hipotezę $HU'^{(1)}$ w wersji dla tablic, tj. że mamy $l'_{x+k}^{(1)} = (1-k)l'_x{}^{(1)} + kl'_{x+1}{}^{(1)}$. Podstawiając powyżej otrzymujemy

$$\begin{aligned} d_x^{(1)} &= d_x'^{(1)}(1 - \nu'^{(2)}(1-k)) , \\ d_x^{(2)} &= \nu'^{(2)}((1-k)l'_x{}^{(1)} + kl'_{x+1}{}^{(1)}). \end{aligned}$$

Stąd po podzieleniu stronami przez $l'_x{}^{(1)}$ otrzymujemy

$$q_x^{(1)} = q_x'^{(1)}(1 - (1-k)\nu'^{(2)}).$$

oraz

$$\begin{aligned} q_x^{(2)} &= \nu'^{(2)}(1-k + kp_x'^{(1)}) \\ &= \nu'^{(2)}(1-k + k(1-q_x'^{(1)})) \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$= \nu'^{(2)}(1-k q_x'^{(1)}) . \tag{1.36}$$

W szczególności przyjmując $k=0$

$$q_x^{(2)} = \nu'^{(2)} , \quad q_x^{(1)} = q_x'^{(1)}(1 - \nu'^{(2)}) ,$$

przyjmując $k=1/2$

$$q_x^{(2)} = \nu'^{(2)}(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(1)}), \quad q_x^{(1)} = q_x'^{(1)}(1 - \frac{1}{2} \nu'^{(2)}) ,$$

oraz $k=1$

$$q_x^{(2)} = \nu'^{(2)}(1 - q_x'^{(1)}), \quad q_x^{(1)} = q_x'^{(1)} ,$$

Podobną analizę można zrobić jeśli ryzyko 2-gie przyjmuje więcej niż jedną wartość w przedziale $[0, 1]$; patrz zad. 1.12.

Jeśli ryzyko specjalne jest rościągnięte w czasie, na przykład w odcinku $(k, k']$, gdzie $0 \leq k < k' < 1$ to wracamy do modelu standardowego. Przeanalizujemy go jednak z uwagą i zobaczymy jak on się w przy pewnych założeniach redukuje do wcześniej omawianego ryzyka specjalnego. Przypuśćmy teraz, że mamy dwa ryzyka: 1 – jak wyżej oraz 2 – podwyższone ze względu na udział w imprezie w odcinku $(k, k']$, o której to imprezie wiadomo, że przeżywa ją jedynie $100 \times (1 - \nu'^{(2)})$ % biorących udział. Zakładając, że wypadki rozkładają się jednostajnie w czasie trwania imprezy, policzymy $q_x^{(1)}$ oraz $q_x^{(2)}$. Z treści przykładu wnioskujemy, że

$${}_t p_x'^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } t < k \\ 1 - \nu'^{(2)} \frac{t-k}{k'-k} & \text{jeśli } k \leq t < k' \\ 1 - \nu'^{(2)} & \text{jeśli } k' \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Wtedy aby obliczyć $q_x^{(1)}$ i $q_x^{(2)}$ skorzystamy z wzorów:

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 f_x^{(1)}(s) {}_s p_x'^{(2)} ds \\ q_x^{(2)} &= \int_0^1 f_x^{(2)}(s) {}_s p_x'^{(1)} ds, \end{aligned}$$

gdzie $f_x^{(j)}$ jest gęstością stowarzyszonej zmiennej losowej $T_x^{(j)}$; patrz (1.25) i (1.26). Teraz podstawiając mamy

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 f_x^{(1)}(s) {}_s p_x'^{(2)} ds \\ &= \int_0^k f_x^{(1)}(s) ds + \int_k^{k'} f_x^{(1)}(1 - \nu'^{(2)} \frac{s-k}{k'-k}) ds + \int_{k'}^1 f_x^{(1)}(s) ds \\ &= \int_0^1 f_x^{(1)}(s) ds - \nu'^{(2)} \int_k^{k'} \frac{s-k}{k'-k} ds - \nu'^{(2)} \int_{k'}^k f_x^{(1)}(s) ds. \end{aligned}$$

Przypuśćmy teraz, że $k' = k + h$ i $h \downarrow 0$. Jeśli $f_x^{(1)}(s)$ jest ograniczona w $[0, 1]$, to

$$\int_k^{k'} \frac{s-k}{k'-k} ds \rightarrow 0.$$

Stąd mamy dla małych h przybliżenie

$$q_x^{(1)} \approx q_x'^{(1)} - \nu'^{(2)}(q_x'^{(1)} - {}_k q_x^{(1)})$$

i dalej zakładając $HU^{(1)}$ mamy dla małych h

$$q_x^{(1)} \approx (1 - (1 - k)\nu'^{(2)})q_x'^{(1)}.$$

Zostawiamy czytelnikowi analizę $q_x^{(2)}$.

Zadania teoretyczne

- 1.1 Napisac $\Pr(T_x'^{(1)} \leq s, T_x'^{(2)} \leq t)$ jeśli znana jest funkcja $\Pr(T_x'^{(1)} > s, T_x'^{(2)} > t)$.
- 1.2 Opisać przy pomocy T_x i J_x dopełnienie zdarzenia $\{T_x \leq t, J_x = j\}$. Zauważyć, że ogólnie $1 - {}_t q_x^{(j)} \neq \Pr(T_x > t, J_x = j)$. Czy znając historię życia (x) -latka od chwili zawarcia umowy do czasu t da się rozstrzygnąć, czy w jego przypadku zaszło zdarzenie $\{T_x > t, J_x = j\}$? A zdarzenia $\{T_x \leq t, J_x = j\}$, $\{T_x > t\}$?
- 1.3 Udowodnić związki (1.4)–(1.5).
- 1.4 Udowodnić, że

$$\Pr(J_x = j | T_x = t) = \frac{f_x(t, j)}{f_x(t)} = \frac{\mu_{[x]+t}^{(j)}}{\mu_{[x]+t}^{(\tau)}}.$$

(Formalna definicja tego warunkowego prawdopodobieństwa, którego warunek ma prawdopodobieństwo 0, wymaga aby była to funkcja dwu zmiennych j, t spełniająca

$$\Pr(J_x = j, a < T_x \leq b) = \int_a^b \Pr(J_x = j | T_x = t) f_x(t) dt$$

dla każdego $j = 1, \dots, m$, $0 \leq a \leq b$.)

- 1.5 Przypuśćmy, że HJP jest spełnione. Pokazać, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_h q_x^{(j)}}{=} \mu_x^{(j)},$$

jeśli $t = x$ jest punktem ciągłości funkcji $f_0(t, j)$.

1.6 Przy założeniu $HJP^{(\tau)}$ udowodnić związki (1.8)–(1.9).

1.7 Udowodnić tożsamość

$${}_t q_x^{(j)} = \frac{{}_t d_x^{(j)}}{{}_t d_x^{(\tau)}} {}_t q_x^{(\tau)}.$$

1.8 Wykazać, że przy założeniu $HU^{(\tau)}$ zachodzi (1.14).

1.9 Korzystając z faktu 1.3 udowodnić przy założeniu $HCFM^{(\tau)}$

$${}_s p_x'^{(j)} = \left({}_s p_x^{(\tau)}\right)^{{}_r q_x^{(j)} / {}_r q_x^{(\tau)}}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 < r < 1. \quad (1.37)$$

Stąd przechodząc z $r \rightarrow 1$ mamy

$${}_s p_x'^{(j)} = \left({}_s p_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)} / q_x^{(\tau)}}, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (1.38)$$

Pokazać, że (1.38) jest również prawdziwe przy $HU^{(\tau)}$. Przekształcając udowodnić, że

$${}_s q_x^{(j)} = \frac{\log {}_r p_x'^{(j)}}{\log {}_r p_x^{(\tau)}} {}_s q_x^{(\tau)}. \quad (1.39)$$

1.10 Udowodnić, że przy założeniu $HU'^{(\tau)}$ mamy

$${}_t q_x^{(1)} = q_x'^{(1)} \left(t - q_x'^{(2)} \frac{t^2}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

skąd wywnioskować, że $HU^{(\tau)}$ nie może wtedy być prawdziwa. Odwrotnie, pokazać, że jeśli $HU^{(\tau)}$ zachodzi to ????

1.11 Udowodnić, że jeśli T_x jest skończone, to warunek $\int_0^\infty \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds = \infty$ musi być spełniony. Podać przykład i interpretację gdy (1.21) nie zachodzi.

1.12 W modelu z dwoma ryzykami, ryzyko 1-sze jest standardowe, ale 2-gie takie, że w modelu stowarzyszonym dla niego mamy $\Pr(T_x'^{(2)} = k_j) = \nu_j'^{(2)}$, gdzie $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$ oraz $\nu_1'^{(2)} + \dots + \nu_n'^{(2)} \leq 1$. Policzyc prawdopodobieństwa $q_x^{(j)}$.

2 Przykłady ubezpieczeń na kilka ryzyk

Przejdziemy teraz do obliczeń JSN dla ubezpieczeń wieloopcyjnych. Rozważmy więc ciągle ubezpieczenie płacące $b(t, j)$ jeśli w chwili t następuje wyjście ze statusu z przyczyny j , gdzie $t \geq 0$ i $j = 1, \dots, m$. Jeśli v jest czynnikiem dyskonta, to OW tego ubezpieczenia wynosi $Z = v^{T_x} b(T_x, J_x)$, a JSN

$$E[Z] = \sum_{j=1}^m \int_0^\infty v^t b(t, j) f(t, j) dt. \quad (2.1)$$

W przypadku ubezpieczenia dyskretnego, w którym następuje wypłata $b_{k+1, j}$ na koniec roku k , jeśli wyjście ze statusu nastąpiło w k -tym roku, z przyczyny j , OW równa jest $Z = v^{K_x+1} b_{K_x+1, J_x}$ i JSN wynosi

$$E[Z] = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} b_{k+1, j} {}_k p_x^{(\tau)} q_{[x]+k}^{(j)}. \quad (2.2)$$

Uważny czytelnik z pewnością będzie potrafił samodzielnie wyprowadzić odpowiednie wzory dla wieloopcyjnych odpowiedników ubezpieczeń rozważanych w rozdziale IV. Ograniczymy się więc tylko do rozważenia kilku przykładów.

5

Przykład 2.1 Na życie (50)-latka wystawiona jest 1 stycznia polisa roczna wypłacająca świadczenie śmiertelne na koniec roku z rozróżnieniem sumy ubezpieczenia w przypadku śmierci podczas udziału w pewnej konkretnej bardzo niebezpiecznej imprezie (jako opcja 2) lub z innych powodów (jako opcja 1). Sumy ubezpieczenia wynoszą odpowiednio: 50 000 dla opcji 1 i 100 000 dla opcji 2. Obliczymy JSN tego ubezpieczenia przy czynniku dyskonta $v = 0.95$, jeśli wiadomo jest, że $q_{50}^{(1)} = 0.03166$ oraz $q_{50}^{(2)} = 0.195$. (W zadaniu 4.4 podajemy dane na podstawie których wyliczono te prawdopodobieństwa.) Korzystając z (2.2), JSN powyższego ubezpieczenia można

⁵Dodać: Zastanówmy się po co sprzedawać jedno ubezpieczenie od wielu ryzyk zamiast pojedyncze ubezpieczenia od poszczególnych ryzyk. Obecna wartość ubezpieczenia od ryzyka j wynosi $X_j = v^{K_x+1} b_{K_x+1}(J_x = j)$ ($j = 1, \dots, m$). Zauważmy, że $X = \sum_{j=1}^m X_j$ jest OW od jednolitego ubezpieczenia na wiele ryzyk. Zauważmy, że JSN $E[X]$ równa się sumie JSN od ubezpieczeń na pojedyncze ryzyko. Jednakże można pokazać podobnie jak w ..., że $\text{Var}(X) < \sum_{j=1}^m \text{Var}(X_j)$. Oznacza, że sprzedaż jednego produktu na wiele ryzyk daje mniejszą wariancję aniżeli sprzedaż niezależnie poszczególnych ubezpieczeń od jednego ryzyka.

wyliczyć następująco

$$\begin{aligned} & 50\,000v q_{50}^{(1)} + 100\,000v q_{50}^{(2)} \\ &= 50\,000 \cdot 0.95 \cdot 0.195 + 100\,000 \cdot 0.95 \cdot 0.03166 = 12\,270. \end{aligned}$$

Przykład 2.2 W bezterminowym ubezpieczeniu na życie w razie inwalidztwa (opcja 1) wypłaca się 20 000 zł na koniec półrocza stwierdzenia ubytku oraz w razie śmierci (opcja 2) 10 000 zł na koniec roku śmierci. Wiadomo, że $\mu_{x+t}^{(1)} = 0.02$ i $\mu_{x+t}^{(2)} = 0.01$ dla $t \geq 0$ (zakładamy HJP) oraz $v = 0.95$. Przyjmujemy, że x jest całkowite. JSN liczymy z następującego rozszerzenia wzoru (2.2)

$$A = 20\,000 \sum_{k=0}^{\infty} v^{(k+1)/2} {}_{k/2}p_x^{(\tau)} {}_{1/2}q_{x+k/2}^{(1)} + 10\,000 \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(2)}.$$

Ponieważ $\mu_{x+t}^{(\tau)} = 0.02 + 0.01 = 0.03$, więc ${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-0.03t}$. Ponadto ${}_{1/2}q_{x+t/2}^{(1)} = 1 - e^{-0.02/2} = 1 - e^{-0.01}$ oraz $q_{x+t}^{(2)} = 1 - e^{-0.01}$.

W następnym przykładzie wrócimy do renty wdowiej omawianej w przykładzie IX.2.10. Pokażemy jak tą rentę związaną z niesymetrycznym statusem dla dwu osób sprowadzić można do pewnej formy ubezpieczenia wieloopcyjnego.

Przykład 2.3 Rozpatrujemy dwa życia (x) (np. mąż) i (y) (odpowiednio, żona). Niech ich przyszłe czasy życia T_x, T_y będą niezależne oraz zakładamy dla nich hipotezę HJP. Chcemy wyliczyć JSN ciągłej renty wdowiej $\bar{a}_{x|y}$ o intensywności 1 płatnej od momentu śmierci x do śmierci y (zatem tylko jeśli $T_x < T_y$; por. przykład IX.2.10). Potraktujmy prawdopodobieństwa śmierci osób (x) i (y) jako absolutne wskaźniki wychodzenia ze statusu z przyczyny, odpowiednio 1 i 2, w stowarzyszonym jednoopcijnym modelu wprowadzonym w paragrafie 1.3. Przyjmujemy więc $T_x^{(1)} = T_x$ oraz $T_x^{(2)} = T_y$. Zobaczmy, jakiemu modelowi dwuopcijnemu odpowiada ten model stowarzyszony. Dzięki (1.16) i (1.17) mamy więc moment wyjścia ze statusu $T_x = \min(T_x^{(1)}, T_x^{(2)}) = T_{x:y}$ równy momentowi pierwszej ze śmierci (x) i (y) oraz opcję wyjścia J równą 1 jeśli (x) umrze wcześniej niż (y) oraz równą 2 w przeciwnym wypadku. Łatwo teraz zauważyć, że JSN renty wdowiej $\bar{a}_{x|y}$ jest równa JSN ubezpieczenia w tym nowym modelu dwuopcijnym (T, J), jeśli przyjąć następujące sumy ubezpieczenia: $b(t, 1) = \bar{a}_{y+t}$ oraz $b(t, 2) = 0$.

Istotnie, w tym przypadku suma wypłacana jest wyłącznie w momencie śmierci (x), pod warunkiem, że (y) jeszcze żyje, i równa się OWA dożywotniej renty dla (y), który w tym momencie ma już $y + t$ lat. Aby skorzystać z (2.2) potrzeba jeszcze tylko policzyć łączną gęstość $f(t, j)$ dla naszego modelu dwuopcijnego (T, J) . Zauważmy, że $\mu_t^{(1)} = \mu_{[x]+t}$, $\mu_t^{(2)} = \mu_{[y]+t}$, ${}_t p^{(\tau)} = {}_t p'^{(1)} {}_t p'^{(1)} = {}_t p_{x:y}$. Stąd, korzystając z (1.5) mamy

$$f(t, j) = \begin{cases} {}_t p_{x:y} \mu_{[x]+t} & \text{dla } j = 1 \\ {}_t p_{x:y} \mu_{[y]+t} & \text{dla } j = 2. \end{cases}$$

Ostatecznie więc, (2.1) daje

$$\bar{a}_{x|y} = \int_0^\infty v^t \bar{a}_{y+t} {}_t p_{x:y} \mu_{[x]+t} dt. \quad (2.3)$$

2.1 Model ogólny dyskretny; równanie rekurencyjne

Rozważymy tutaj analogon modelu z podrozdziału VII.1.1 z uwzględnieniem wielu ryzyk. Jest to dyskretny model ubezpieczenia na wiele ryzyk dla (x)-latka, terminowy na n lat z wypłatą gdy ubezpieczony przeżyje ten okres. Ubezpieczenie z przyszłym obciążeniem czasem życia K_x, J_x , zapewnia wypłatę sumy ubezpieczenia $b_{k+1,j}$ jeśli śmierć $K_x = k \leq n$ z przyczyny j oraz sumę b_n^* jeśli ubezpieczony przeżyje okres n . Składki są płacone w sposób dyskretny z góry w wysokości Π_k w przedziale $[0, (n-1) \wedge K_x]$.

Jak łatwo zauważyć (prospektywna) strata ${}_t L$ dla tej ogólnej umowy wynosi

$${}_k L = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } K_x < k, \\ b_{K_x+1, J_x} v^{K_x+1-k} 1(K_x < n) \\ \quad + b_n^* v^{n-t} 1(K_x \geq n) \\ - \sum_{j=k}^{K_x \wedge (n-1)} \Pi_j v^{j-k} & \text{jeśli } K_x \geq k. \end{cases} \quad (2.4)$$

Niech ${}_k \mathcal{V} = E[{}_k L | K_x \geq k]$ oznacza rezerwę matematyczną składki Π_k .

Definiujemy

$${}_l q_{[x]+k}^{(j)} = \Pr(k+l \leq T_x < k+l+1, J_x = j | T_x \geq k).$$

Podobnie jak w dowodzie faktu VII.1.3 możemy pokazać

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[_k L | K_x \geq k] \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{n-k-1} b_{k+l+1,j} v^{l+1} {}_l q_{[x]+k}^{(j)} + b_n^* v^{n-k} {}_{n-k} p_{[x]+k}^{(\tau)} - \sum_{l=0}^{n-k-1} \Pi_{k+l} v^l {}_l p_{[x]+k}^{(\tau)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Można udowodnić, że rezerwa składki spełnia następujące wzór rekurencyjny Thielego.

Fakt 2.4 Mamy ${}_n \mathcal{V} = b_n^*$ oraz dla $0 \leq k < n$

$${}_k \mathcal{V} + \Pi_k = v \left(\sum_{j=1}^m b_{k+1,j} q_{[x]+k}^{(j)} + {}_{k+1} \mathcal{V} p_{[x]+k}^{(\tau)} \right), \quad (2.6)$$

Dowód Zauważmy najpierw, że

$$p_{[x]+k}^{(\tau)} {}_l q_{[x]+k+1}^{(j)} = {}_{l+1} q_{[x]+k}^{(j)}. \quad (2.7)$$

ponieważ

$$\begin{aligned} & p_{[x]+k}^{(\tau)} {}_l q_{[x]+k+1}^{(j)} \\ &= \frac{\Pr(T_x \geq k+1 | T_x \geq k) \Pr(k+l+1 \leq T_x < k+l+2, J_x = j | T_x \geq k+1)}{\Pr(T_x \geq k+1)} \\ &= \frac{\Pr(T_x \geq k+1)}{\Pr(T_x \geq k)} \frac{\Pr(k+l+1 \leq T_x < k+l+2, J_x = j)}{\Pr(T_x \geq k+1)} \\ &= \frac{\Pr(k+l+1 \leq T_x < k+l+2, J_x = j)}{\Pr(T_x \geq k)} \\ &= {}_{l+1} q_{[x]+k}^{(j)}. \end{aligned}$$

Ponadto

$${}_{n-k} p_{[x]+k}^{(\tau)} = p_{[x]+k}^{(\tau)} {}_{n-(k+1)} p_{[x]+k+1}^{(\tau)} \quad (2.8)$$

oraz

$${}_{l+1} p_{[x]+k}^{(\tau)} = p_{[x]+k}^{(\tau)} {}_l p_{[x]+k+1}^{(\tau)}. \quad (2.9)$$

Przepisujemy (2.5)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[_k L | K_x \geq k] \\ &= \sum_{j=1}^m b_{k+1,j} v {}_0 q_{[x]+k}^{(j)} - \Pi_k + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{n-k-1} b_{k+l+1,j} v^{l+1} {}_l q_{[x]+k}^{(j)} + b_n^* v^{n-k} {}_{n-k} p_{[x]+k}^{(\tau)} \\ & \quad - \sum_{l=1}^{n-k-1} \Pi_{k+l} v^l {}_l p_{[x]+k}^{(\tau)} \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}
& {}_k\mathcal{V} + \Pi_k \\
&= v\left(\sum_{j=1}^m b_{k+1,j} {}_0|q_{[x]+k}^{(j)} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{n-k-1} b_{k+1+(l-1)+1,j} v^{l-1+1} {}_l|q_{[x]+k}^{(j)} + b_n^* v^{n-(k+1)} {}_{n-k}p_{[x]+k}^{(\tau)}\right. \\
&\quad \left.- \sum_{l=1}^{n-k-1} \Pi_{k+l} v^{l-1} {}_{(l-1)+1}p_{[x]+k}^{(\tau)}\right) \\
&= v\left(\sum_{j=1}^m b_{k+1,j} {}_0|q_{[x]+k}^{(j)} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{n-(k+1)-1} b_{k+1+l+1,j} v^{l-1+1} {}_{l+1}|q_{[x]+k}^{(j)} + b_n^* v^{n-(k+1)} {}_{n-k}p_{[x]+k}^{(\tau)}\right. \\
&\quad \left.- \sum_{l=0}^{n-(k+1)-1} \Pi_{k+1+l} v^l {}_l p_{[x]+k}^{(\tau)}\right).
\end{aligned}$$

Teraz należy skorzystać z (2.7) (2.8) i (2.9) oraz z tego, że ${}_0|q_{[x]+k}^{(j)} = q_{[x]+k}^{(j)}$:

$$\begin{aligned}
& {}_k\mathcal{V} + \Pi_k \\
&= v\left(\sum_{j=1}^m b_{k+1,j} q_{[x]+k}^{(j)}\right. \\
&\quad \left.+ p_{[x]+k}^{(\tau)}\left(\sum_{l=0}^{n-(k+1)-1} b_{k+1+l+1,j} v^{l+1} {}_l|q_{[x]+k+1}^{(j)} + b_n^* v^{n-(k+1)} {}_{n-(k+1)}p_{[x]+k+1}^{(\tau)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.- \sum_{l=0}^{n-(k+1)-1} \Pi_{k+1+l} v^l {}_l p_{[x]+k+1}^{(\tau)}\right)\right) \\
&= v\left(\sum_{j=1}^m b_{k+1,j} q_{[x]+k}^{(j)} + {}_{k+1}\mathcal{V} p_{[x]+k}^{(\tau)}\right), .
\end{aligned}$$

i dowód rekurencji jest skończony. $\square$

Rozpatrzmy następujące ubezpieczenie na dożycie w którym ubezpieczony ma możliwość wycofania się i zabrania ze sobą $100\%w_j$ rezerwy w chwili j jeśli wycofanie nastąpiło w chwili j . Do analizy tego modelu używamy następujący model na dwa ryzyka: 1 – śmierć, 2 – wycofanie. Korzyść w chwili k jest wypłacana w wysokości b_k a jeśli ubezpieczony dożyje n wtedy otrzymuje b_n^* . Rozkład przyszłego obciążonego czasu życia dany jest przez

TTŻ T_x z prawdopodobieństwami przeżycia i śmierci odpowiednio p_x i q_x ($x = 0, 1, \dots$). Przyjmujemy, że jest spełniona hipoteza HA. Przyjmujemy $q_x^{(1)} = q_x$ oraz, że prawdopodobieństwo wycofania się (x) -latka w przeciągu roku wynosi $q_x^{(2)}$. Składkę netto oraz rezerwę tej składki będziemy oznaczali przez Π_k^w i ${}_k\mathcal{V}^w$. Mamy

$${}_kL = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } K_x < k, \\ (b_{K_x+1}v^{K_x+1-k}1(J_x = 1) + \\ + w_{K_x+1}{}_K\mathcal{V}^w v^{K_x+1-k}1(J_x = 2))1(K_x < n) \\ + b_n^* v^{n-t}1(K_x \geq n) \\ - \sum_{j=k}^{K_x \wedge (n-1)} \Pi_j^w v^{j-k} & \text{jeśli } K_x \geq k. \end{cases}$$

skąd mamy

$$\begin{aligned} E[{}_kL | K_x \geq k] &= \sum_{l=0}^{n-k-1} b_{k+l+1} v^{l+1} {}_l q_{[x]+k+l}^{(1)} + \sum_{l=0}^{n-k-1} w_{k+l} {}_K\mathcal{V}^w v^{l+1} {}_l q_{[x]+k+l}^{(2)} \\ &\quad + b_n^* v^{n-k} {}_{n-k} p_{[x]+k}^{(\tau)} - \sum_{l=0}^{n-k-1} \Pi_{k+l}^w v^l {}_j p_{[x]+k}^{(\tau)}. \end{aligned}$$

Dla takiego modelu możemy pokazać w sposób podobny jak wcześniej, że spełniona jest rekurencja Thielego:

Fakt 2.5 Dla $k = 0, \dots, n-1$

$${}_k\mathcal{V}^w + \Pi_k^w = v(b_{k+1} q_{[x]+k}^{(1)} + w_{k+1} {}_{k+1}\mathcal{V}^w q_{[x]+k}^{(2)} + {}_{k+1}\mathcal{V}^w p_{[x]+k}^{(\tau)}). \quad (2.10)$$

Przypomnijmy, że $p_{[x]+k}^{(\tau)} = 1 - q_{[x]+k}^{(1)} - q_{[x]+k}^{(2)}$. W następującym wniosku rozpatujemy sytuację, gdy w momencie wycofania cała rezerwa jest zwracana. To znaczy, że $w_k \equiv 1$. Porównamy składkę netto Π_k^w i rezerwę tej składki ${}_k\mathcal{V}^w$ ze składką netto Π_k i rezerwą tej składki ${}_k\mathcal{V}$ obliczonych w modelu na jedno ryzyko z prawdopodobieństwami śmierci $q_{[x]+k}^{(1)}$, $k = 0, \dots, n$. Wtedy rezerwa ${}_k\mathcal{V}$ spełnia rekurencję Thielego

$${}_k\mathcal{V} + \Pi_k = v(b_{k+1} q_{[x]+k}^{(1)} + {}_{k+1}\mathcal{V} (1 - q_{[x]+k}^{(1)})). \quad (2.11)$$

Wniosek 2.6 Niech Π_k^w, Π_k będą odpowiednio składkami netto. Jeśli $\Pi_k^w \geq \Pi_k$ lub $\Pi_k^w \leq \Pi_k$ dla wszystkich k , to $\Pi_k^w = \Pi_k$ oraz ${}_k\mathcal{V}^w = {}_k\mathcal{V}$ dla wszystkich k . W szczególności jeśli składki Π_k oraz Π_k^w są stałe, to teza wniosku zachodzi.

Dowód Odejmując rezerwę ${}_k\mathcal{V}$ z (2.11) od rezerwy ${}_k\mathcal{V}^w$ w modelu z równania ([?? e.npr.rekur3.D??]) otrzymujemy

$$X_k = Z_k + v(1 - q_{[x]+k}^{(1)})X_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

gdzie $X_k = {}_k\mathcal{V}^w - {}_k\mathcal{V}$ i $Z_k = -(\Pi_k^w - \Pi_k)$ lub równoważnie

$$X_k = Z_k + vp_{[x]+k}X_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Biorąc pod uwagę, że $X_n = 0$ (bo ${}_n\mathcal{V}^w = {}_n\mathcal{V} = b_n^*$), rozwiązując rekurencję mamy

$$X_l = \sum_{j=1}^{n-l} v^{j+1} Z_{n-j} {}_{n-l-j}p_{[x]+l}.$$

Ze względu na założenie, że składka jest netto, tzn. $X_0 = 0$, mamy $\Pi_k^w = \Pi_k$ które pociąga ${}_k\mathcal{V}^w = {}_k\mathcal{V}$ dla wszystkich k . $\square$

Przykład 2.7 Rozpatrzmy ubezpieczenie na życie. Będziemy przyjmować $n = 3$, $x = 25$, $\Pi_k = \Pi$, $b_j = 10000$ oraz $w_j = w$ oraz, że dana jest następująca tablica 2.1 na dwa ryzyka.

Tablica 2.1: Tablica na 2 ryzyka

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
24	97526	33	102
25	97391	35	105
26	97251	37	110
27	97104	39	115
28	96950	39	122
29	96789	42	126

Gdybyśmy rozważali klasyczny model ubezpieczenia na życie, to do obliczeń musimy wykorzystać tabelkę:

Tablica 2.2: Tablica na jedno ryzyko

x	l_x	d_x
25	97391	35
26	97356	37
27	97319	39

Wtedy

$$\text{OWA benefitów} = \frac{10000}{l_{25}} (vd_{25} + v^2d_{26} + v^3d_{27}) = 10.2761$$

$$\text{OWA składki} = \frac{\Pi}{l_{25}} (l_{25} + vl_{26} + v^2l_{27}) = 2.8515\Pi.$$

z równania równoważności otrzymujemy $\Pi = 3.6038$.

Zaanalizujemy teraz przypadek gdy $w = 0$ czyli wycofujący nie otrzymuje nic. Wtedy

$$\text{OWA benefitów} = \frac{10000}{l_{25}^{(\tau)}} (vd_{25}^{(1)} + v^2d_{26}^{(1)} + v^3d_{27}^{(1)}) = 10.2761$$

$$\text{OWA składki} = \frac{\Pi}{l_{25}^{(\tau)}} (l_{25}^{(\tau)} + vl_{26}^{(\tau)} + v^2l_{27}^{(\tau)}) = \Pi * 2.7985.$$

Podstawiając dane z tablicy 2.1 z równania równoważności otrzymujemy $\Pi = 3.6720$.

2. Przypadek gdy $w = 1$ czyli wycofujący zabiera całą zgromadzoną rezerwę składki netto. Okazuje się, że w tym przypadku korzystając z rozważań wcześniejszych (patrz rekurencja (2.11), że ${}_k\mathcal{V} = 10000 {}_kV_{1 \atop 25:\overline{3}}$. A więc ${}_1\mathcal{V} = 0.1998$ i ${}_2\mathcal{V} = 0.2033$ Wtedy

$$\begin{aligned} \text{OWA benefitów} &= \frac{10000}{l_{25}^{(\tau)}} (vd_{25}^{(1)} + v^2d_{26}^{(1)} + v^3d_{27}^{(1)}) \\ &+ \frac{10000 {}_1V_{25:\overline{3}}}{l_{25}^{(\tau)}} vd_{25}^{(2)} + \frac{10000 {}_2V_{25:\overline{3}}}{l_{25}^{(\tau)}} v^2d_{26}^{(2)} + \frac{10000 {}_3V_{25:\overline{3}}}{l_{25}^{(\tau)}} v^3d_{27}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\text{OWA składki} = \frac{\Pi}{l_{25}^{(\tau)}} \left(l_{25}^{(\tau)} + v l_{26}^{(\tau)} + v^2 l_{27}^{(\tau)} \right).$$

Podstawiając dane z tablicy 2.1 z równania równoważności otrzymujemy

$$\Pi = 3.$$

2.2 Model ogólny ciągły; równanie różniczkowe Thielego.

Rozważymy tutaj analogon modelu z podrozdziału VII.1.1 z uwzględnieniem wielu ryzyk. Jest to ciągły ogólny model ubezpieczenia na wiele ryzyk dla (x) -latka, terminowy na n lat z wypłatą gdy ubezpieczony przeżyje ten okres. Ubezpieczenie z przyszłym czasem życia T_x , zapewnia wypłatę sumy ubezpieczenia $b(t, j)$ jeśli śmierć nastąpi w chwili $t \leq n$ z przyczyny j oraz sumę b_n^* jeśli przeżyje. Składki są płacone w sposób ciągły z intensywnością $\bar{\Pi}(t)$ w przedziale $[0, n \wedge T_x]$.

Jak łatwo zauważyć (prospektywna) strata ${}_tL$ dla tej ogólnej umowy wynosi

$${}_tL = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } T_x \leq t, \\ b(T_x, J_x) v^{T_x-t} 1(T_x \leq n) \\ \quad + b_n^* v^{n-t} 1(T_x > n) \\ - \int_t^{T_x \wedge n} \bar{\Pi}(u) v^{u-t} du & \text{jeśli } T_x > t. \end{cases} \quad (2.12)$$

Niech ${}_t\bar{\mathcal{V}} = E[{}_tL | T_x > t]$ oznacza rezerwę matematyczną składki $\bar{\Pi}(t)$.

Można udowodnić, że rezerwa składki spełnia następujące równanie różniczkowe Thielego.

Fakt 2.8 *Jeśli funkcje $b(t, j)$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{\Pi}(t)$, $\mu_{[x]+t}^{(j)}$ są ciągłe, to*

$$\frac{d{}_t\bar{\mathcal{V}}}{dt} = \bar{\Pi}(t) + \delta_t \bar{\mathcal{V}} + \sum_{j=1}^m ({}_t\bar{\mathcal{V}} - b(t, j)) \mu_{[x]+t}^{(j)}. \quad (2.13)$$

Ponadto, ${}_t\bar{\mathcal{V}}$ jest jedynym rozwiązaniem powyższego równania z warunkiem brzegowym ${}_n\bar{\mathcal{V}} = b_n^*$.

Równanie (2.13) możemy przepisać w następujący sposób:

$$\frac{d{}_t\bar{\mathcal{V}}}{dt} = \bar{\Pi}(t) + \delta_t \bar{\mathcal{V}} - \sum_{j=1}^m (b(t, j) - {}_t\bar{\mathcal{V}}) \mu_{[x]+t}^{(j)}.$$

i stąd możemy odczytać jego prostą interpretację. Mianowicie na przyrost rezerw składa się składka plus procent z konta na którym trzymamy rezerwę pomniejszone o straty $-b(t, j) - {}_t\bar{\mathcal{V}}$ które następują z intensywnością odpowiednio $\mu_{[x]+t}^{(j)}$.

Z równania (2.13) mamy, że składkę możemy rozbić $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}^s(t) + \bar{\Pi}^r(t)$ na część

$$\bar{\Pi}^s(t) = \frac{d_t\bar{\mathcal{V}}}{dt} - \delta {}_t\bar{\mathcal{V}},$$

którą możemy nazwać *składką oszczędnościową*, oraz

$$\bar{\Pi}^r(t) = \sum_{j=1}^m (b(t, j) - {}_t\bar{\mathcal{V}}) \mu_{[x]+t}^{(j)}$$

którą możemy nazwać *składką na ryzyko*.

Rozpatrzmy model ubezpieczenia ogólnego na n lat z podrozdziału VII.1.1 z oznaczeniami jak tamże. Rezerwa opłacana składkę netto $\Pi(t)$ spełnia równanie różniczkowe Thielego

$$\frac{d_t\bar{\mathcal{V}}}{dt} = \bar{\Pi}(t) + (\delta + \mu_{[x]+t}) {}_t\bar{\mathcal{V}} - b(t) \mu_{[x]+t}.$$

Wykorzystamy ten model do analizy ubezpieczenia z możliwością wykupu (wycofania się przez ubezpieczonego). Założmy, że ta polisa gwarantuje możliwość wycofania się z *wartością wykupu (wykupową)* wysokości $w(t)$ procent rezerwy.⁶ Będziemy analizować jak to wpłynie na składkę netto i rezerwę za pomocą modelu na dwa ryzyka. A więc śmierć będzie ryzykiem 1 a wycofanie będzie ryzykiem 2. Intensywność $\mu_{[x]+t}^{(1)} = \mu_{[x]+t}$ jest równa natężeniu śmiertelności (x) -latka, natomiast $\mu_{[x]+t}^{(2)}$ jest intensywnością wycofania się w chwili t . Wtedy mamy następujące równanie różniczkowe Thielego gdy ubezpieczenie jest opłacane składką netto w wysokości Π^w ⁷

$$\frac{d_t\bar{\mathcal{V}}^w}{dt} = \bar{\Pi}^w(t) + \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^w + ({}_t\bar{\mathcal{V}}^w - b(t)) \mu_{[x]+t} + ({}_t\bar{\mathcal{V}}^w - w(t) {}_t\bar{\mathcal{V}}^w) \mu_{[x]+t}^{(2)}. \quad (2.14)$$

Przykład 2.9 Rozpatrzmy ubezpieczenie na życie na n lat, płatne w momencie śmierci, na sumę ubezpieczenia b opłacone składką netto ze stałą intensywnością. Ubezpieczony może wycofać się w każdym momencie i dostać

⁶Dac komentarz; patrz Stroinski str. 9/168

⁷Oznaczamy, składkę i rezerwę w rozszerzonym systemie na dwa ryzyka przez $\Pi^w(t)$ i ${}_t\bar{\mathcal{V}}^w$.

w momencie zerwania w% swojej rezerwy netto ${}_t\bar{\mathcal{V}}^w$. Przyjmujemy, że wycofanie następuje ze stałą intensywnością ν . Niech przyszły czas życia T_x ma stałe natężenie śmierci $\mu_{[x]+t} = \mu$ oraz przyjmujemy natężenie stopy procentowej δ . Znajdziemy składkę netto i rezerwę składki. Rezerwa spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{d{}_t\bar{\mathcal{V}}^w}{dt} = \bar{\Pi}^w + \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^w + ({}_t\bar{\mathcal{V}}^w - b)\mu + ({}_t\bar{\mathcal{V}}^w - w \cdot {}_t\bar{\mathcal{V}}^w)\nu.$$

lub inaczej

$$\frac{d{}_t\bar{\mathcal{V}}^w}{dt} - (\mu + \delta + (1-w)\nu) {}_t\bar{\mathcal{V}}^w = \bar{\Pi}^w - b\mu.$$

Mnożąc przez $\exp(-(\mu + \delta + (1-w)\nu)t)$ otrzymujemy

$$\frac{de^{-(\mu+\delta+(1-w)\nu)t} {}_t\bar{\mathcal{V}}^w}{dt} = e^{-(\mu+\delta+(1-w)\nu)t} (\bar{\Pi}^w - b\mu),$$

skąd pamiętając, że ${}_0\bar{\mathcal{V}}^w = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} e^{-(\mu+\delta+(1-w)\nu)t} {}_t\bar{\mathcal{V}}^w &= (\bar{\Pi}^w - b\mu) \int_0^t e^{-(\mu+\delta+(1-w)\nu)s} ds \\ &= (\bar{\Pi}^w - b\mu) \bar{a}_{x:\overline{n}} \\ &= \bar{\Pi}^w \bar{a}_{x:\overline{n}} - b\bar{A}_{1_{x:\overline{n}}}. \end{aligned}$$

gdzie $\bar{A}_{1_{x:\overline{n}}}$ oraz $\bar{a}_{x:\overline{n}}$ są policzone przy natężeniu stopy procentowej $@(\delta + (1-w)\nu)$

Stąd otrzymujemy podstawiając $t = n$ i pamiętając, że ${}_n\bar{\mathcal{V}} = 0$

$$\bar{\Pi}^w = \frac{b\bar{A}_{x:\overline{n}}@(\delta + (1-w)\nu)}{\bar{a}_{x:\overline{n}}@(\delta + (1-w)\nu)}$$

Zauważmy, że jeśli $w = 1$, to składką netto $\bar{\Pi}^w$ odpowiada składce netto obliczonej w modelu bez uwzględnienia wykupu polisy. To zjawisko będziemy badać dla ogólniejszego modelu za chwilę.⁸

W następującym fakcie zajmiemy się przypadkiem gdy $w(t) = 1$.

⁸Dobrze by było zrobić wykres jako funkcja od w .

Fakt 2.10 Załóżmy, że $\Pi^w(t) \geq \Pi(t)$ lub $\Pi^w(t) \leq \Pi(t)$. Wtedy $\Pi^w(t) = \Pi(t)$ oraz ${}_t\bar{\mathcal{V}}^w = {}_t\bar{\mathcal{V}}$.

Dowód Odejmując rezerwę ${}_t\bar{\mathcal{V}}$ z (2.13) od rezerwy ${}_t\bar{\mathcal{V}}^w$ w modelu z ryzykiem dodatkowym ryzykiem wycofania się otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}X(t) = \Pi^w(t) - \Pi(t) + (\delta + \mu_{[x]+t})X(t),$$

gdzie $X(t) = {}_t\bar{\mathcal{V}}^w - {}_t\bar{\mathcal{V}}$. Mnożąc powyższe przez czynnik $\exp(-(\delta t - \int_0^t \mu_{[x]+s} ds))$ i podstawiając $Z(t) = X(t) \exp(-(\delta t - \int_0^t \mu_{[x]+s} ds))$ mamy, że $Z(t)$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dt}Z(t) = (\Pi^w(t) - \Pi(t))e^{-(\delta t + \int_0^t \mu_{[x]+s} ds)},$$

skąd otrzymujemy, korzystając z warunków brzegowych $X(n) = Z(n) = 0$, że

$$\int_t^n (\Pi^w(s) - \Pi(s))e^{-\delta s} {}_s p_x ds, \quad 0 \leq t \leq n.$$

Teraz skorzystamy z założenia, że składki Π_t^w, Π_t mają być netto tzn. $Z(0)=0$:

$$\int_0^n (\Pi^w(t) - \Pi(t))e^{-\delta s} {}_s p_x ds = 0.$$

Stąd $\Pi_t^w - \Pi_t = 0$, co pociąga ${}_t\bar{\mathcal{V}}^w - {}_t\bar{\mathcal{V}} = 0$.

□

Wniosek 2.11 Jeśli polisa jest płacona ze stałą intensywnością, odpowiednio Π^w i Π , to $\Pi^w = \Pi$.

Zadania teoretyczne

2.1 Pokazać, że przy założeniu hipotezy $HU^{(\tau)}$, JSN $\bar{A}$ w ciągłym ubezpieczeniu wieloopcyjnym równa się

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \tilde{b}(k+1, j) {}_k p_x^{(\tau)} q_x^{(j)},$$

⁹Dac zadanie: Dolaczyc wydatki $\beta(t)$ i pokazac, ze ...; Bowers et al str.

gdzie

$$\tilde{b}(k+1, j) = \int_0^1 b(k+u, j)(1+i)^{1-u} \, du.$$

3 Omówienie oznaczeń

Lista podstawowych symboli, to jest z bloku I (patrz rys. I.2.1), używanych w tym rozdziale przedstawiona jest w tablicy 3.1. Tablica 3.2 zestawia niektóre indeksy występujące przy tych podstawowych symbolach.

Tablica 3.1: Zasadnicze symbole dotyczące ubezpieczeń wieloopcyjnych

zasadniczy symbol	opis
q	prawdopodobieństwo wyjścia ze statusu w pewnym przedziale czasu
p	prawdopodobieństwo przetrwania w statusie przez pewien okresu czasu
μ	natężenie wyjścia ze statusu
d	średnia liczba wychodzących ze statusu w pewnym przedziale czasu
l	średnia liczba pozostających w statusie w pewnym przedziale czasu
A	JSN ubezpieczenia

Tablica 3.2: Grupy znaków w blokach II, III, IV, V, VI

blok	grupy znaków	opis	przykład
	$x; 21$ $[x] + n; [21] + 3$	wiek osoby, (x) -latek n lat po selekcji w wieku $[x]$, prawdopodobieństwo warunkowe	${}_t p_x; {}_3 q_{21}$ $l_{[x]+n}; {}_5 p_{[21]+3}$
	$n, 5$	czas dla którego zasadniczy symbol jest obliczony	${}_n p_x, {}_5 p_{[40]+3}$
	(j) (τ) $(')$	numer opcji wyjścia, wyjście bez względu na opcję, stowarzyszony model jednoopcynny	${}_t q_x^{(j)}$ ${}_3 p_{21}^{(\tau)}$ ${}_3 p_x^{'(j)}$

Uwagi bibliograficzne Obszerny materiał dotyczący tablic trwania życia na wiele ryzyk wraz z całą teorią statystyczną można znaleźć w książce R.Eland-Johnson i N. Johnson (1980). W literaturze anglojęzycznej pisze się o *ubezpieczeniach dekrementowych*. Podstawowe wiadomości można znaleźć w Gerberze (1997), więcej w Bowersie et al (1996). Obszerny przegląd metod dotyczących modeli na wiele ryzyk wraz z wnioskowaniem statystycznym można znaleźć w pracach A.S. Macdonalda (1996A,1996B).

4 Zadania

- 4.1 W następującym fragmencie tablicy szkodowości dla obu płci łącznie TSZ-PL99 z dodatku dla $x = 50, \dots, 54$ uzupełnić brakujące kolumny.

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$
50	91708	661	85			
51	90961	656	85			
52	90221	650	84			
53	89487	645	83			
54	88759	640	83			
55	88037	991	80			

Korzystając z tej tablicy policzyć ${}_k p_{50}^{(\tau)}$, dla $k = 2, 3, 4$, ${}_2 q_{52}^{(1)}$, ${}_2 | q_{52}^{(1)}$. Ile wynosi $l_{56}^{(\tau)}$?

- 4.2 Na podstawie tablicy 2.1 zamieszczonej w przykładzie 2.7 obliczyć (i) prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku z powodu przyczyny 1 w wieku 24 lat, (ii) prawdopodobieństwo, że (25)-latek umrze w ciągu roku z dowolnej przyczyny, (iii) prawdopodobieństwo, że (26)-latek umrze w ciągu dwóch lat z powodu przyczyny 2.
- 4.3 (Numeryczne) Na podstawie tablicy 2.1 zamieszczonej w przykładzie 2.7 wykonać tablicę $l_n^{(j)}$ dla modeli stowarzyszonych dla jednego ryzyka dla poszczególnych ryzyk $j = 1, 2$. Wsk. Należy przyjąć dla każdego j z osobna arbitralnie np. $l_{24}^{(j)} = 100000$, obliczyć $q_{24}^{(j)}$ i na tej podstawie $d_{24}^{(j)}$. Stąd $l_{25}^{(j)}$, itd.
- 4.4 [EdA13.04.2002] Osoba, która 1 stycznia kończy 50 lat, należąca do populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 80 lat będzie 1 października uczestniczyła wraz z grupą osób w krótkotrwałej imprezie (ekstremalny sport), którą przeżywa 90 % uczestników. Obliczyć $q_{50}^{(1)}$ i $q_{50}^{(2)}$, gdzie 1 oznacza śmierć naturalną, a 2 śmierć podczas wspomnianej imprezy.

Tablica 4.1: Tablica dla ryzyka j w modelu stowarzyszonym.

x	$l_x^{(j)}$	$d_x^{(j)}$
24	100000	
25		
26		
27		
28		
29		

- 4.5 Obliczyć o ile procent wzrośnie składka na ubezpieczenie jednoroczne dla osoby, kończącej 1 stycznia 40 lat, planującej 1 października uczestniczyć wraz z grupą osób w krótkotrwałej imprezie (ekstremalny sport), którą przeżywa 90 % uczestników. Przyjąć czas rozkład przyszłego czasu życia tej osoby jest dany przez TTŻ-PL97m oraz $i = 3\%$. Z polisy jest wypłacona suma ubezpieczenia 1 jedynie z powodu śmierci nie będącej następstwem branie udziału w imprezie.
- 4.6 Osoba, która 1 stycznia kończy 50 lat, należąca do populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 80 lat będzie 1 lipca oraz 1 października uczestniczyła wraz z grupą osób w krótkotrwałych imprezach (ekstremalny sport), każdą z nich przeżywa 80 % uczestników. Obliczyć $q_{50}^{(1)}$ i $q_{50}^{(2)}$, gdzie 1 oznacza śmierć naturalną, a 2 śmierć podczas wspomnianej imprezy.
- 4.7 Rozważmy ubezpieczenie od śmierci, której natężenie jest stałe i równe 0.05 oraz od nieszczęśliwego wypadku powodującego trwałe kalectwo, którego natężenie wystąpienia równa się 0.01. W chwili śmierci wypłacona jest suma ubezpieczenia 1, natomiast od momentu inwalidztwa aż do śmierci płacona jest ciągła renta z intensywnością 1. Obliczyć JSN.
- 4.8 Dla 1000 osób w wieku 25 lat obliczyć oczekiwaną liczbę osób które umrą w przeciągu roku z powodu przyczyny 1. Również policzyć oczekiwaną liczbę osób, które przeżywszy pierwszy rok umrą w następnym z powodu przyczyny 1. Obliczenia przeprowadzić dla dwuszkodowej tablicy 2.1.

- 4.9 Odejścia z pracy mogą być z dwóch powodów: śmierć (1) lub zmiana pracy (2). Zmiana pracy może następować jedynie w dniu 1 października. Zakładając, że w ciągu roku śmiertelność jest jednostajna oraz TTŻ-PLm97 oraz z powodu zmiany pracy opuszcza 5% pracowników, obliczyć prawdopodobieństwo $q_{50}^{(\tau)}$, że (50)-latek w ciągu roku przestanie pracować (przyjąć, że 1 stycznia jest dniem urodzin pracowników).
- 4.10 Przypuśćmy, że ${}_k q_{60}'^{(1)} = 1 - 0.2k$ dla $k = 1, \dots, 4$, oraz $q_x'^{(2)} = 0.01$. Obliczyć $q_x^{(i)}$ dla $x = 60, \dots, 64$ korzystając ze wzorów (1.29), (1.30) lub (1.39).

Zadania dodatkowe

- 4.11 zadteor.8D.propor Załóżmy, że $\mu_{[x]+t}^{(j)} = a_j \mu_{[x]+t}^{(\tau)}$ dla $j = 1, \dots, m$. Pokazać, że
- (i) $a_j \geq 0$ i $\sum_{j=1}^m a_j = 1$.
 - (ii) $Pr(J_x = j) = a_j$ dla $j = 1, \dots, m$.
 - (iii) ${}_t q_x^{(j)} = a_j {}_t q_x^{(\tau)}$.
 - (iv) ${}_t p_x'^{(j)} = ({}_t p_x'^{(\tau)})^{a_j}$.
- 4.12 W modelu na dwa ryzyka obliczyć $q_x^{(j)}$ gdy $T'^{(j)}$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu^{(j)}$. Porównać z aproksymacjami (1.29), (1.30). W tym celu przyjąć $\mu^{(1)} = 1$ i zbadać różnicę wyniku dokładnego z aproksymowanym jak funkcję zmiennej $\mu^{(2)}$.
- 4.13 [EdA14.10.2000] W modelu o *dwóch ryzykach współbieżnych* [*double decrement model*] niech $q_x^{(i)}$, $\mu_x^{(i)}$ oznaczają odpowiednio prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia oraz natężenie zdarzenia w *stowarzyszonym modelu pojedynczego ryzyka* [*associated single decrement model*]. Przyjmijmy następujące oznaczenia: s – śmierć oraz n – śmierć w wyniku nieszczęśliwego wypadku. Dane jest:
1. $q_x^{(s)} = 0.6$ oraz jest równomiernie rozłożone w ciągu roku,
 2. $\mu_{x+t}^{(n)} = 0.04$ dla $0 \leq t \leq 1$.

Wyznacz składkę netto za ubezpieczenie na okres 1 roku (bez uwzględnienia oprocentowania) z którego w przypadku zajścia zdarzeń objętych umową wypłacane są następujące świadczenia:

- 1000 w przypadku śmierci naturalnej (zajście zdarzenia s),
 - 2000 w przypadku śmierci w wyniku wypadku (zajście zdarzenia n).
- Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 133, (B) 134, (C) 135, (D) 136, (E) 137.]

- 4.14 [EdA05.12.1998] Mąż, obecnie w wieku x , ubezpiecza się na wypadek śmierci i na wypadek inwalidztwa. Natężenia obu rodzajów szkodowości wynoszą odpowiednio $\mu_{x+t}^{(ms)} = 0.015$, $\mu_{x+t}^{(mi)} = 0.005$. Jeśli mąż zostanie inwalidą, to nie ma szans na wyjście z inwalidztwa i przechodzi do podpopulacji o wyższej śmiertelności $\mu_{x+t}^{(mis)} = 0.04$. Natężenie wymierania kobiet wynosi $\mu_{x+t}^{(z)}$. Jeśli mąż umrze (nie będąc inwalidą), to jego żona, obecnie w wieku y , będzie pobierać dożywotnio rentę ciągłą z intensywnością roczną $\bar{P}$. Jeśli natomiast mąż zostanie inwalidą, to do końca życia będzie pobierał rentę ciągłą z intensywnością roczną $2\bar{P}$. Mąż płaci składki w formie renty ciągłej z intensywnością roczną $\bar{\pi}$, aż do wystąpienia jednego ze zdarzeń: własnej śmierci, inwalidztwa lub śmierci żony. Intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Oblicz $\bar{\pi}/\bar{P}$. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 0.377, (B) 0.431, (C) 0.452, (D) 0.486, (E) 0.547.]

- 4.15 [EdA26.10.1996] W ubezpieczeniu na życie z terminem 20 lat świadczenie jest płatne w momencie śmierci i wynosi:
- (1) 1.50 zł, gdy przyczyną śmierci był wypadek,
 - (2) 1 zł, gdy śmierć spowodowała inna przyczyna.
- Natężenie zgonów według obydwu przyczyn opisują odpowiednio:

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{60}, \quad \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{t}{40}.$$

Wyznacz jednorazową składkę netto za tę polisę przy zerowej stopie procentowej. [Odp. (A) $1 - \exp(-5)$, (B) $\frac{5}{6}(1 - \exp(-20/3))$, (C) $\frac{3}{2}(1 - \exp(-20/3))$, (D) $\frac{6}{5}(1 - \exp(-25/3))$, (E) $\frac{3}{2}(1 - \exp(-25/3))$.]

- 4.16 Pokazać, że jeśli $b(t) = \bar{s}_{\bar{a}}$ i $\bar{\Pi}$ jest stałą intensywnością składki netto, to ${}_t\bar{\mathcal{V}} = \bar{\Pi}\bar{s}_{\bar{a}}$.¹¹

¹¹Za Bowers et al, str. 253.

Rozdział XI

Zarys teorii ubezpieczeń wielostanowych

¹ ² Dotychczas mieliśmy do czynienia z prostymi polisami, w których rozpatruje się ubezpieczenie dla x -latka takie, że po wystąpieniu zdarzenia (wyjścia ze statusu) jest wypłacone świadczenie i na tym ubezpieczenie się kończy. Istnieje jednakże potrzeba wyceny bardziej skomplikowanych ubezpieczeń lub rent, gdy to czy jest płacona składka, wypłacana renta lub ubezpieczenie zależy od sytuacji w danej chwili, którą dalej nazywamy *stanem*. *Przejścia* pomiędzy stanami mogą być dozwolone lub zabronione w zależności od kontekstu zadania. Stany zmieniają się z czasem w trakcie ubezpieczenia. Będziemy na razie³ zajmować się tylko modelami ze skończoną liczbą stanów, ponumerowanymi od $0, 1, \dots, m$ a przestrzeń stanów oznaczać przez $\mathcal{E}$. Oczywiście w konkretnych modelach jest też możliwe oznaczanie stanów literami. Przez $\mathcal{J}_x(t)$, $t \geq 0$ będziemy oznaczali przebieg zmian stanów życiowych x -latka od chwili jego wejścia do systemu wraz ze zmianą *parametru czasu* t . Parametr t może przebiegać na przykład liczby nieujemne jak to jest wyżej, może być z przedziału $[0, n]$ lub liczbą nieujemną całkowitą. Na przykład dla (x) -latka z maksymalnym czasem życia osoby nowourodzonej ω , możemy rozpatrywać proces stanów życia $\mathcal{J}_x(t)$ z parametrem t należącym do $[0, \omega - x]$,

¹Rozdział przygotowany przez T. Rolskiego, stanowi w zamierzeniu rozdział 10 książki Błaszczyszyna i TR (2004).

²7.4.2016

³Na przykład w ubezpieczeniach chorobowych intensywność powrotu do aktywności jest zależna od wieku osoby w momencie zachorowania jak i od czasu od momentu zachorowania.

ale podobnie jak to było w przypadku prawa śmiertelności Makehama w modelowaniu teoretycznym przyjmować będziemy czas $t \geq 0$. W przypadku osoby nowourodzonej ($x = 0$) lub modelu teoretycznego będziemy pisać prosto $\mathcal{J}_t$. Jeśli $\mathcal{J}_t = j$, to oznacza że w chwili t życia osoba jest w stanie j . Śmierć jest tylko jednym ze stanów i jeśli nie rozróżniamy jej powodu przypisujemy jej stan o numerze 0 lub literę D. Niestety nie ma możliwości deterministycznego opisu zmian stanów w czasie życia. Dlatego też przyjmuje się, że $\mathcal{J}_t$ jest zmienną losową dla każdego t . Wtedy $\mathcal{J}_t, t \geq 0$ jest *procesem stochastycznym*. A więc przebieg procesu jest funkcją od zdarzenia elementarnego z przestrzeni zdarzeń elementarnych. Jeśli to zdarzenie elementarne ustalimy, to wtedy ten przebieg, jako funkcja od t nazywa się *realizacją procesu*. Wszystkie rysunki przebiegu zmian stanów, które tu przedstawimy są więc realizacjami.⁴ Będziemy zakładać, że realizacje są kawałkami stałe, tj. z definicji⁵ ze skończoną liczbą skoków w przedziałach skończonych prawostronnie ciągłe i z lewostronnymi granicami. Takie założenie jest możliwe do przyjęcia dla procesów rozpatrywanych w tym rozdziale. Stan z którego nie ma wyjścia nazywamy *stanem pochłaniającym* lub *absorbującym*. Zbiór wszystkich stanów absorbujących oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\text{abs}}$. Pozostałe stany nazywamy *przechodnymi*⁶ i oznaczamy je przez $\mathcal{E}_{\text{tra}}$. Stan śmierci – D jest oczywiście stanem pochłaniającym.

Najlepiej będzie jak rozpatrzymy na początku znane już sytuacje ale w nowym ujęciu. Z przyszłym czasem życia $T = T_x$ będziemy wiązać proces stochastyczny

$$\mathcal{J}_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } T_x \leq t, \\ 1 & \text{jeśli } T_x > t. \end{cases} \quad (0.1)$$

Ten model będziemy zwali “aktywny–śmierć”, w skrócie AD. Równoległe możemy rozważyć proces z czasem dyskretnym. Niech $K = K_x$ będzie obcietym przyszłym czasem życia (x)-latka. Wtedy definiujemy

$$\mathcal{J}_{[x]+k} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } K_x < k, \\ 1 & \text{jeśli } K_x \geq k, \end{cases} \quad (0.2)$$

$k = 0, 1, \dots$ W tym przykładzie $\mathcal{E}_{\text{abs}} = \{0\}$, $\mathcal{E}_{\text{tra}} = \{1\}$. Na przykład ubezpieczenia/renty rozpatrywane w rozdziałach od 3 do 7 są związane z

⁴Trzeba dać jakiś przykładowy przebieg realizacji. TR

⁵Jeśli tylko używamy słowa “kawałkami” to będzie oznaczać, że tych kawałków jest skończona ilość w skończonych przedziałach.

⁶A może tranzytywnymi. TR

przejściem procesu $\mathcal{J}(t)$ ze stanu 1 do stanu 0. Natomiast co się dzieje dalej w wcześniejszych rozdziałach już nas nie interesowało. Ten model będziemy nazywać *życie – śmierć*. Jednakże istnieją polisy, z których wypłaca się świadczenia po śmierci ubezpieczonego; patrz zadanie 7.3 gdzie rozpatruje się tzw. ubezpieczenie zaopatrzenia rodzinnego [family income insurance].

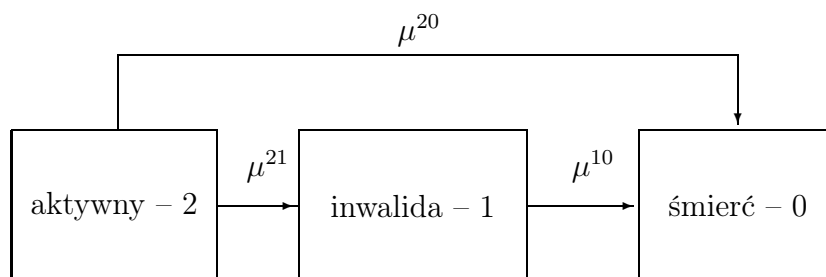
W przypadku wielu ryzyk $j = 1, \dots, m$ rozważamy T_x, J_x jak w rozdziale X. Wprowadzamy proces $\mathcal{J}_x(t)$ przyjmujący wartości $1, 0_1, \dots, 0_m$, gdzie

$$\mathcal{J}_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } T_x > t \\ 0_1 & \text{jeśli } T_x \leq t, J_x = 1 \\ 0_2 & \text{jeśli } T_x \leq t, J_x = 2 \\ \dots & \dots \\ 0_m & \text{jeśli } T_x \leq t, J_x = m \end{cases} \quad (0.3)$$

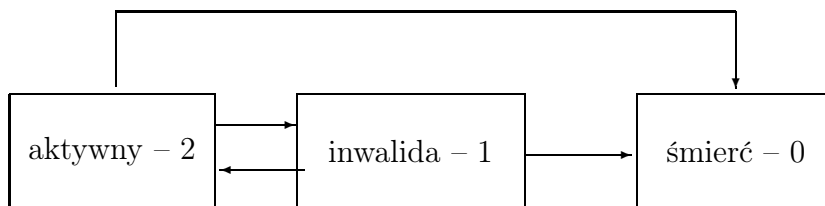
W tym przykładzie $\mathcal{E}_{\text{abs}} = \{0_1, \dots, 0_m\}$.

Celem tego rozdziału jest przeglądnięcie pojęć i metod związanych z ubezpieczeniami opartych o przebieg zmian stanów. Przykładem takich zmian jest proces $\mathcal{J}(t)$ dla modelu “aktywny – niesprawny – śmierć”, który będzie w skrócie oznaczony AID. W tym modelu stany są “aktywny” (na przykład może płacić składkę), “niesprawny” (na przykład nie może płacić składki lub należy mu się renta) oraz “śmierć”. Będziemy też oznaczać te stany odpowiednio A, I oraz D lub odpowiednio 2, 1 oraz 0. Będziemy rozważać dwa typy modelu AID

- bez uzdrowień, w którym jedynymi możliwymi przejściami są z A do I, z A do D, z I do D; jest możliwość uzdrowień, tj. przejść ze stanu inwalidztwa do uzdrowień; patrz schemat na rys. 0.1.



Rysunek 0.1: Schemat przejść w ubezpieczeniu na życie i inwalidztwo bez uzdrowień



Rysunek 0.2: Schemat przejść w ubezpieczeniu na życie i inwalidztwo (AID) z uzdrowieniami

- z uzdrowieniami, w którym dopuszcza się też możliwości uzdrowień, tj. przejść ze stanu inwalidztwa do uzdrowień; patrz schemat na rys. 0.2.

Niech będzie dany przebieg zmian stanów życia $\mathcal{J}_x(t)$, $t \geq 0$ dla (x) -latka. Na tej bazie definiujemy proces

$$I_x^i(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w chwili } t \text{ stan życia jest } i \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Przez $N_x^{ij}(t)$ będziemy oznaczali inną ważną wielkość liczącą wszystkie przejścia ze stanu i do j do czasu t ; $i \neq j$. Formalnie piszemy dla $i \neq j$

$$N_x^{ij}(t) = \sum_{0 \leq s \leq t} 1(\mathcal{J}_x(s-) = i, \mathcal{J}_x(s) = j).$$

Zauważmy, że $N_x^{ij}(t)$ jako funkcja od t jest niemalejąca, kawałkami stała, ze skokami jednostkowymi. Takie funkcje odpowiadają procesom punktowym bez punktów wielokrotnych. Będziemy przyjmować, że rozważane procesy punktowe są bez punktów wielokrotnych. Na bazie procesów $I_x^i(t)$ oraz $N_x^{ij}(t)$, $t \geq 0$ można wyrazić wielkości aktuarialne.⁷

Rozważmy teraz

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[N^{\text{AI}}([t, t+h])] \\ &= \mathbb{E}[N^{\text{AI}}([t, t+h]; N^{\text{AI}}([t, t+h]) = 1)] + \mathbb{E}[N^{\text{AI}}([t, t+h]; N^{\text{AI}}([t, t+h]) > 1)]. \end{aligned}$$

⁷Możemy też zaadoptować w naturalny sposób system notacji aktuarialnych do oznaczania prawdopodobieństw przejścia. Tak więc przez ${}_t p_x^{ij}$ będziemy oznaczali prawdopodobieństwo, że (x) -latek będąc w stanie i po czasie t będzie w stanie j . W szczególności p_x^{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że (x) latek będąc w stanie i po roku będzie w stanie j . Również przez ${}_s p_{[x]+t}^{ij}$ oznaczamy prawdopodobieństwo tego, że wchodząc do systemu jako (x) -latek będąc po czasie t w stanie i jeszcze po czasie s będzie w stanie j . Zauważmy, że

$${}_s p_{[x]+t}^{ij} = \Pr(\mathcal{J}_x(t+s) = j | \mathcal{J}_x(t) = i).$$

Ponieważ N^{AI} odpowiada procesowi punktowemu bez punktów wielokrotnych mamy

$$\sup_{a \leq t \leq b} \mathbb{E} [N^{\text{AI}}([t, t+h]; N^{\text{AI}}([t, t+h]) > 1] = o(h),$$

które wydaje się być naturalnie w kontekście założenia o skończonej liczbie skoków w skończonych przedziałach. Z tego założenia mamy natychmiast, że $\sup_{a \leq t \leq b} \Pr(N^{\text{AI}}([t, t+h]) > 1) = o(h)$, które w teorii procesów punktowych jest nazywane *pojedynczością*. Natomiast

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [N^{\text{AI}}([t, t+h]; N^{\text{AI}}([t, t+h]) = 1] \\ &= \Pr(\mathcal{J}_x(t+h) = \text{I}, \mathcal{J}_x(t) = \text{A}) + o(h) \\ &= \Pr(\mathcal{J}_x(t+h) = \text{I} | \mathcal{J}_x(t) = \text{A}, \mathcal{J}_x(0) = \text{A}) \\ & \quad \Pr(\mathcal{J}_x(t) = \text{A}, \mathcal{J}_x(0) = \text{A}) + o(h) \end{aligned}$$

Teraz przyjmując $\Pr(\mathcal{J}_x(0) = \text{A}) = 1$ mamy

$$\Pr(\mathcal{J}_x(t) = \text{A}, \mathcal{J}_x(0) = \text{A}) = \Pr(\mathcal{J}_x(t) = \text{A} | \mathcal{J}_x(0) = \text{A}) = p_x^{\text{AA}}(0, t).$$

A więc

$$\mathbb{E} [N^{\text{AI}}([t, t+h])] = p_x^{\text{AA}}(0, t) \Pr(\mathcal{J}_x(t+h) = \text{I} | \mathcal{J}_x(t) = \text{A}).$$

Okazuje się, że przy rozsądnych założeniach, o których będzie trochę później, możemy zapisać

$$\Pr(\mathcal{J}_x(t+h) = \text{I} | \mathcal{J}_x(t) = \text{A}) = \mu_x^{\text{AI}}(t)h + o(h),$$

dla pewnej funkcji $\mu_x(t)$. Stąd mielibyśmy

$$\mathbb{E} [N^{\text{AI}}(dt)] = p_x^{\text{AA}}(0, t) \mu_x^{\text{AI}}(t) dt. \quad (0.4)$$

Rozważmy jeszcze raz

$$\Pr(\mathcal{J}_x(t+h) = \text{I} | \mathcal{J}_x(t) = \text{A}, \mathcal{F}_t),$$

lub w notacji łańcuchów Markowa

$$p_x^{ij}(t, t+h) = \Pr(\mathcal{J}_x(t+s) = j | \mathcal{J}_x(t) = i).$$

gdzie $\mathcal{F}_t$ jest pewnym zdarzeniem dotyczącym przebiegu realizacji $\mathcal{J}_x(s)$ w przedziale $[0, t]$. Na przykład $\mathcal{J}_x(0) = \text{I}$ lub jak długo przebywa w stanie A przed chwilą t . Wtedy możemy się pytać o

$$\Pr(\mathcal{J}_x(t+h) = \text{I} | \mathcal{J}_x(t) = \text{A}, \mathcal{F}_t) = \mu_x^{\text{AI}, \mathcal{F}_t}(t)h + o(h),$$

gdzie tym razem $\mu_x^{\mathcal{F}_t}(t)$ zależy od przebiegu realizacji $\mathcal{J}_x$ do chwili t . Takie intensywności występują w ubezpieczeniach chorobowych.

Przykład 0.1 Rozważmy ubezpieczenie terminowe na n lat dla (x) -latka, którego życie podlega zmianom jak w modelu AID z uzdrowieniami. Stanami więc będą A, I oraz D ($\mathcal{E} = \{A, I, D\}$, $\mathcal{E}_{\text{tra}} = \{A, I\}$). Będziemy przyjmować, co jest zresztą naturalne, że w momencie wystawienia polisy ubezpieczony jest w stanie A, tzn. $\mathcal{J}_x(0) = \text{A}$. Ponadto jeśli w momencie t jest przejście ze stanu A do I to jest wypłacane świadczenie w wysokości $b(t)$. Dla ułatwienia rozważań przyjmijmy, że funkcja b jest ciągła i ograniczona. W umowie ubezpieczenia, jest on zwolniony z płacenia składki w okresach inwalidztwa. Jeśli $\bar{\Pi}$ jest stałą intensywnością składki, to OWA pobranych składek wynosi, przy natężeniu stopy procentowej δ ,

$$\begin{aligned} \bar{a}^{\text{AA}} &= \bar{\Pi} \mathbb{E} \left[\int_0^n e^{-\delta t} I_x^{\text{A}}(t) dt \right] \\ &= \bar{\Pi} \int_0^n e^{-\delta t} \Pr(\mathcal{J}_x(t) = \text{A} | \mathcal{J}_x(0) = \text{A}) dt \\ &= \bar{\Pi} \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{\text{AA}} dt. \end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz napisaniem wzoru na OW wypłaconych świadczeń. Najprościej byłoby wypisać wszystkie kolejne momenty $\tau_1^{\text{AI}} < \tau_2^{\text{AI}} < \dots$ przejść procesu $\mathcal{J}_x(t)$ z A do I. Wtedy OW tych wypłat wynosiłaby $\sum_{j \geq 1} e^{-\delta \tau_j^{\text{AI}}}$. Z pewnych względów jest wygodniejsze zapisanie OW świadczeń przy użyciu całki Riemanna-Stieltjesa:

$$\int_0^n b(t) e^{-\delta t} dN_x^{\text{AI}}(t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} b(k/\ell) e^{-\delta k/\ell} (N_x^{\text{AI}}((k+1)/\ell) - N_x^{\text{AI}}(k/\ell)). \quad (0.5)$$

Stąd OWA wypłaconych świadczeń wynosi

$$A^{\text{A}} = \mathbb{E} \left[\int_0^n b(t) e^{-\delta t} dN_x^{\text{AI}}(t) \right].$$

Teraz biorąc pod uwagę (0.4), trochę nieformalnie możemy zapisać

$$A^{\text{AI}} = \int_0^n b(t) e^{-\delta t} p_x^{\text{AA}}(0, t) \mu_x^{\text{AI}}(t) dt.$$

Stąd mamy, że jeśli $\bar{\Pi}$ jest składką netto, to musi być spełnione równanie równoważności

$$\int_0^n b(t) e^{-\delta t} {}_t p_x^{\text{AA}} \mu_x^{\text{AI}}(t) dt - \bar{\Pi} \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{\text{AA}} dt = 0,$$

i

$$\bar{\Pi} = \frac{\int_0^n b(t) e^{-\delta t} p_x^{\text{AA}}(0, t) \mu_x^{\text{AI}}(t) dt}{\int_0^n e^{-\delta t} p_x^{\text{AA}}(0, t) dt}.$$

Jak się okaże procesy stochastyczne $\mathcal{J}_x(t)$ z wzorów (0.1) i (0.3), są niejednorodnymi w czasie łańcuchami Markowa; patrz przykład 2.3 oraz zadanie 7.4. Natomiast w zadaniu 7.5 proponujemy czytelnikowi udowodnić, że jeśli $x = x_1 = \dots = x_m$, to $\mathcal{J}(t)$ z przykładu (7.1) jest również łańcuchem Markowa. Jest to jednym z powodów, że naturalnym narzędziem do modelowania przebiegu stanów życia są niejednorodne w czasie łańcuchy Markowa. W następnym podrozdziale przedstawimy zarys teorii łańcuchów Markowa, zarówno w dyskretnym jak i w ciągłym czasie.⁸ Użycie tej teorii wydaje się naturalne, jeśli przyjmiemy za naturalne użycie metody ryzyk konkurujących⁹ z rozdziału X.1.3. Natomiast w podrozdziale 5 będą podane równania rekurencyjne i układy równań różniczkowych Thielego dla polis ubezpieczeniowo-rentowych zmieniających się w zależności od stanów.

1 Łańcuchy Markowa i wielostanowe tablice trwania życia

Przedstawimy teraz zarys teorii niejednorodnych procesów Markowa zarówno z czasem dyskretnym jak ciągłym. W przypadku ogólnej teorii będziemy używali oznaczeń używanych w teorii procesów stochastycznych.

⁸Niektórzy autorzy przy rozpatrywaniu w czasie ciągłym mówią proces Markowa.

⁹współzawodniczących. TR

1.1 Łańcuchy Markowa w czasie dyskretnym

Przez *macierz stochastyczną* rozumie się macierz $\mathbf{P} = (P^{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, której elementy są nieujemne i taką, że $\sum_{j=0}^{\infty} P^{ij} = 1$ dla wszystkich $i \in \mathcal{E} = \{0, 1, \dots\}$ (skończona lub nieskończona). W zadaniu 7.4 polecamy czytelnikowi pokazać, że iloczyn macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną.¹⁰ Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $X_k, k = 0, 1, \dots$ jest *łańcuchem Markowa* zdefiniowanym przez rodzinę macierzy stochastycznych zwanych tutaj *macierzami przejścia*.¹¹ $\mathbf{P}(k) = (P^{ij}(k))_{i,j=0}^{\infty}, k = 0, 1, \dots$, jeśli dla dowolnego $k = 1, 2, \dots$, oraz $i, j, j_\ell = 0, 1, \dots$

$$\Pr(X(1) = j_1, \dots, X(k) = j_k | X(0) = j_0) = P^{j_0 j_1}(0) P^{j_1 j_2}(1) \dots P^{j_{k-1} j_k}(k-1). \quad (1.6)$$

Jeśli $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}(1) = \dots$, to mamy przypadek łańcucha *jednorodnego w czasie*. Dla naszych celów rzadko taki przypadek jest potrzebny, w odróżnieniu od większości zastosowań, gdzie występują prawie wyłącznie jednorodne w czasie łańcuchy Markowa.¹²

Fakt 1.1

$$\begin{aligned} \Pr(X_k = j | X_0 = i) &= \sum_{j_1, \dots, j_{k-1} \in \mathcal{E}} P^{i j_1}(0) \dots P^{j_{k-1} j}(k-1) \\ &= (\mathbf{P}(0) \mathbf{P}(1) \dots \mathbf{P}(k-1))^{ij}. \end{aligned}$$

Fakt 1.2 Ciąg zmiennych losowych jest łańcuchem Markowa zadany przez rodzinę macierzy przejścia $\mathbf{P}(k), k = 0, 1, \dots$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $i, j, i_k \in \mathcal{E}$ oraz $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \Pr(X_k = j | X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_{k-1} = i) \\ = \Pr(X_k = j | X_{k-1} = i) = P^{ij}(k-1). \end{aligned} \quad (1.7)$$

jeśli tylko

$$\Pr(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_{k-1} = i) > 0. \quad (1.8)$$

Dla $k < k'$ definiujemy $\mathbf{P}(k, k') = \mathbf{P}(k) \mathbf{P}(k+1) \dots \mathbf{P}(k'-1)$. Możemy zauważyć, że $\Pr(X(k') = j | X(k) = i) = (\mathbf{P}(k) \mathbf{P}(k+1) \dots \mathbf{P}(k'-1))^{ij}$. Odpowiednik rodziny macierzy stochastycznych $\mathbf{P}(k, k')$ będzie odgrywał ważną rolę w teorii w czasie ciągłym.

¹⁰Będziemy wykorzystywali notację macierzową. A więc $(\mathbf{P})^{ij} = P^{ij}$.

¹¹Przeważnie mówi się o macierzach prawdopodobieństw przejścia.

¹²Wyjaśnić. TR

Przykład 1.3 Pokażemy, że ciąg zmiennych losowych $\mathcal{J}_{[x]+k}$, $k = 0, 1, \dots$ zdefiniowany w (0.2) jest łańcuchem Markowa i wyjaśnimy rolę hipotezy HA. Zauważmy wpraw, że ciąg $j_0, \dots, j_{k-1}, i$ musi być niemalejący, bo w przeciwnym razie warunek (1.8) nie jest spełniony. Biorąc to pod uwagę piszemy: w przypadku $i = 1$

$$\begin{aligned} P^{11}(k-1) &= \Pr(\mathcal{J}_{[x]+k} = 1 | \mathcal{J}_x = 1, \dots, \mathcal{J}_{[x]+k-1} = 1) \\ &= \Pr(\mathcal{J}_{[x]+k} = 1 | \mathcal{J}_{[x]+k-1} = 1) = p_{[x]+k-1} . \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} P^{10}(k-1) &= \Pr(\mathcal{J}_{[x]+k} = 0 | \mathcal{J}_x(0) = 1, \dots, \mathcal{J}_{[x]+k-1} = 1) \\ &= \Pr(\mathcal{J}_{[x]+k} = 0 | \mathcal{J}_{[x]+k-1} = 1) = q_{[x]+k-1} . \end{aligned}$$

W przypadku, gdy $i = 0$

$$\begin{aligned} P^{01}(k-1) &= \Pr(\mathcal{J}_x(k) = 1 | \mathcal{J}_x(0) = 1, \dots, \mathcal{J}_x(k-1) = 0) \\ &= \Pr(\mathcal{J}_{[x]+k} = 1 | \mathcal{J}_{[x]+k-1} = 0) = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} P^{00}(k-1) &= \Pr(\mathcal{J}_{[x]+k} = 0 | \mathcal{J}_x = 1, \dots, \mathcal{J}_{[x]+k-1} = 1) \\ &= \Pr(\mathcal{J}_{[x]+k} = 1 | \mathcal{J}_{[x]+k-1} = 0) = 1 . \end{aligned}$$

Stąd mamy, że macierz przejścia

$$\mathbf{P}(k-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{[x]+k-1} & p_{[x]+k-1} \end{pmatrix} .$$

2 Łańcuchy Markowa w czasie ciągłym

2.1 Definicja i podstawowe własności

Będziemy mówić, że proces stochastyczny X_t , $t \geq 0$ jest łańcuchem Markowa z czasem ciągłym z przestrzenią stanów $\mathcal{E}$, jeśli dla dowolnego ciągu $0 = t_0 < t_1 < \dots$, ciąg $X_k = X(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$ jest łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym. Przy definicji łańcucha Markowa z czasem ciągłym $X(t)$, gdzie parametr czasowy należy do przedziału $0 \leq t \leq y$ w definicji powyżej musimy ograniczyć się do $0 \leq t_0 < t_1 < \dots \leq y$.

Rozpatrzmy rodzinę macierzy stochastycznych $\mathbf{P}(t, t') = (P^{ij}(t, t'))_{i, j \in \mathcal{E}}$ gdzie $0 \leq t \leq t'$, spełniających

- $\mathbf{P}(t, t) = \mathbf{I}$ dla wszystkich $t \geq 0$,
- dla wszystkich $0 \leq t \leq s \leq t'$,

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{P}(t, s)\mathbf{P}(s, t') . \quad (2.9)$$

Każda taka rodzina macierzy $\mathbf{P}(t, t')$, $0 \leq t \leq t'$ nazywa się *macierzą funkcji przejścia*. Natomiast równanie macierzowe (2.9) nazywa się *równaniem Chapmana–Kolmogorowa*. Jeśli $\mathbf{P}(0, y) = \mathbf{P}(t, t + y)$, dla wszystkich $t, y \geq 0$, to mówimy, że łańcuch Markowa jest *jednorodnym w czasie łańcuchem*. Dla naszych celów potrzebne jednak będą niejednorodne w czasie łańcuchy Markowa i dlatego dalej nie będziemy tego zaznaczali. Można pokazać następujący fakt.

Fakt 2.1 *Proces stochastyczny $X(t)$, $t \geq 0$ jest łańcuchem Markowa jeśli istnieje macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$, $0 \leq t \leq t'$*

$$\begin{aligned} \Pr(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_k) = i_k | X(t_0) = i_0) \\ = P^{i_0 i_1}(t_0, t_1) P^{i_1 i_2}(t_1, t_2) \dots P^{i_{k-1} i_k}(t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (2.10)$$

dla $k = 0, 1, \dots$, $i_0, i_1, \dots, i_k \in \mathcal{E}$, $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_k$.

Dowód zostawiamy czytelnikowi. Podobnie do faktu 1.2 możemy udowodnić następujące warunek równoważny.

Fakt 2.2 *Proces stochastyczny $X(t)$, $t \geq 0$ jest łańcuchem Markowa wtedy i tylko wtedy gdy istnieje macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$, $0 \leq t \leq t'$ taka, że dla wszystkich $k \geq 1$, $i_0, i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_k$,*

$$\begin{aligned} \Pr(X(t_k) = i_k | X(t_{k-1}) = i_{k-1}, \dots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) \\ = P^{i_{k-1} i_k}(t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (2.11)$$

jeśli tylko $\Pr(X(t_{k-1}) = i_{k-1}, \dots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) > 0$.

Dowód podobny do dowodu faktu 1.2 zostawiamy czytelnikowi w zadaniu 4.3.

Przykład 2.3 Niech $T = T_0$ będzie przyszłym czasem życia osoby nowourodzonej i definiujemy proces $\mathcal{J}(t)$ jak w (0.1). Będziemy zakładać hipotezę HJP. Przypomnijmy, że $\Pr(T > x) = \exp(-\int_0^x \mu(s) ds)$. Pokażemy, że proces

$\mathcal{J}(t)$ jest łańcuchem Markowa. Mianowicie dla $n \geq 1$, $i_0, i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ i $t_0 < t_1 < \dots < t_n$,

$$\begin{aligned} \Pr(J_{t_n} = i_n \mid \text{cal}J(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, \text{cal}J(t_1) = i_1, \mathcal{J}(t_0) = i_0) \\ = \Pr(\mathcal{J}(t_n) = i_n \mid \mathcal{J}(t_{n-1}) = i_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

jeśli tylko $\Pr(\mathcal{J}(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, \mathcal{J}(t_1) = i_1, \mathcal{J}(t_0) = i_0) > 0$ (to zanczy, że $j_0, j, \dots$ musi być ciągiem zer i jedynek nierosnący). Dalej mamy

$$\Pr(\mathcal{J}(t_n) = i_n \mid \mathcal{J}(t_{n-1}) = i_{n-1}) = \begin{cases} t_n - t_{n-1} p_{t_{n-1}} & i_n = 1 \\ t_n - t_{n-1} q_{t_{n-1}} & i_n = 0 \end{cases}$$

O macierzy funkcji przejścia będziemy zakładać:

[Z1] macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$ jest ciągła w t dla wszystkich t , tj. $\lim_{t' \downarrow 0} \mathbf{P}(0, t') = \mathbf{I}$ i

$$\lim_{t' \downarrow t} \mathbf{P}(t, t') = \lim_{t' \uparrow t} \mathbf{P}(t', t) = \mathbf{I}. \quad (2.13)$$

[Z2] poza zbiorem skończonym zbiorem $\mathcal{N}$ istnieje granica

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \lim_{t' \downarrow t} \frac{\mathbf{P}(t, t') - \mathbf{I}}{t' - t} = \lim_{t' \uparrow t} \frac{\mathbf{P}(t', t) - \mathbf{I}}{t - t'}. \quad (2.14)$$

Dla kompletności w punktach $t \in \mathcal{N}$ definiujemy wartość $\boldsymbol{\mu}(t)$ tak aby funkcje m^{ij} były prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami. Prosto z definicji można pokazać następujący fakt.

Fakt 2.4 Dla $i \neq j$, $\mu^{ij}(t) \geq 0$, $\mu^{ii}(t) \leq 0$ oraz dla $i \in \mathcal{E}$ oraz $t \geq 0$,

$$\sum_{j \in \mathcal{E}} \mu^{ij}(t) = 0. \quad (2.15)$$

Ponadto, jeśli $i \in \mathcal{E}_{\text{abs}}$ jest stanem pochłaniającym, to $\mu^{ij} = 0$, $j \in \mathcal{E}$.

Będziemy dalej pisać

$$\mu^i(t) = \sum_{j \neq i} \mu^{ij}(t).$$

Rozpisana macierz intensywności przejścia wygląda więc następująco: W dalszej części w przykładach będziemy numerować wiersze i kolumny od m do 0:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{pmatrix} -\mu^0(t) & \mu^{01}(t) & \dots & \mu^{0m}(t) \\ \mu^{10}(t) & -\mu^1(t) & \dots & \mu^{1m}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu^{m0}(t) & \mu^{m1}(t) & \dots & -\mu^m(t) \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że w języku łańcucha Markowa $X(t)$ mamy $\Pr(X(t+h) \neq i | X(t) = i) = h\mu^i(t) + o(h)$, jeśli tylko $t \neq \mathcal{N}$. Podobnie, dla $i \neq j$ mamy $\Pr(X(t+h) = j | X(t) = i) = h\mu^{ij}(t) + o(h)$.

Funkcję $\boldsymbol{\mu}(t)$, $t \geq 0$ nazywa się *macierzą intensywności przejścia* łańcucha Markowa $X(t)$. Ze względu na późniejsze potrzeby będziemy zakładać następujące własności macierzy intensywności przejścia:

- (A.i) $\boldsymbol{\mu}(t)$ jest *kawałkami ciągła*, przez co rozumiemy która w skończonych przedziałach ma skończoną liczbą skoków. Ponadto zakładamy, że μ^{ij} są funkcjami lokalnie ograniczonymi.¹³

Założenia (A.i) pozwalają na udowodnienie w teorii procesów stochastycznych, że realizacje są kawałkami stałe, prawostronnie ciągłe i z lewostronnymi granicami. do tego wrócimy w podrozdziale 2.2

Przykład 2.5 Kontynuując przykład 2.3 znajdziemy macierz intensywności $\boldsymbol{\mu}(t)$ dla procesu Markowa z (0.1). Będziemy zakładać, że funkcja gęstości $f_x(t)$ jest kawałkami ciągła, skąd mamy, że intensywność śmiertelności $\mu(t)$ jest też. Zauważmy, że korzystając ze wzorów (III.1.7) oraz (III.1.14) mamy

$$P^{\text{AD}}(t, t') = \Pr(T_0 \leq t' | T_0 > t) \quad (2.16)$$

$$= 1 - \exp\left(-\int_t^{t'} \mu_s \, ds\right), \quad (2.17)$$

dla $t \leq t'$.

Teraz dla t będących punktami ciągłości μ mamy

$$\mu^{\text{AD}}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{P^{\text{AD}}(t, t')}{t' - t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\int_t^{t'} \mu(s) \, ds}{t' - t} = \mu(t).$$

¹³(A.ii) dla $i \neq j$

$$\sup_{a \leq t \leq b, h > 0} \frac{P^{ij}(t, t+h)}{h} < \infty.$$

Podobnie możemy pokazać, że

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu(t) & -\mu(t) \end{pmatrix},$$

dla wszystkich punktów ciągłości t funkcji $\mu(t)$. W punktach nieciągłości $t \in \mathcal{N}$ kładziemy $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Zauważmy na koniec, że wiersz związany z stanem pochłaniającym 0 jest zerowy.

Ten przykład jest ciekawy jeszcze z tego powodu, że jeśli dystrybuenta F nie ma gęstości, to widzimy, że granice (2.14) mogą być zero, lub też gubią informację.

Przykład 2.6 Do modelowania teoretycznego problemów aktuarialnych stosuje się macierz intensywności Makehama, która ma wejścia $\mu_t^{ij} = A + Bc^t$, gdzie jak w podrozdziale III.2.2 postuluje się $B \geq 0$, $A \geq -B$ i $c > 1$.

Przykład 2.7 Rozważmy teraz proces 7.1 zdefiniowany przez T_x, J_x z rozdziału X i przyjmujemy hipotezę HJP-D. Można pokazać, że macierz intensywności przejścia

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mu^{11}(t) & \mu_x^{10_1}(t) & \dots & \mu_x^{10_m}(t) \\ \mu_{xx}^{0_1 1}(t) & \mu_x^{0_1 0_1}(t) & \dots & \mu_x^{0_1 0_m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_x^{0_m 1}(t) & \mu_x^{0_m 0_1}(t) & \dots & \mu_x^{0_m 0_m}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mu_{[x]+t}^{(\tau)} & \mu_{[x]+t}^{(1)} & \dots & \mu_{[x]+t}^{(m)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Uwaga Naturalne w praktyce aktuarialnej jest przyjęcie maksymalnego czasu życia. Wtedy dla (x) -latka proces stanów życia $\mathcal{J}_x(t)$ jest rozpatrywany na $[0, \omega - x]$, co pociąga za sobą aby do czasu $\omega - x$ proces doszedł do stanu pochłaniającego. Zakładamy hipotezę HJP-M która mówi, że $\boldsymbol{\mu}_x(t) = \boldsymbol{\mu}(x+t)$. W przypadku jedyne go stanu pochłaniającego 0 musi być spełnione¹⁴

$$\int_{\omega-\epsilon}^{\omega} \mu_j(t) dt = \infty, \quad j = 1, \dots, m.$$

¹⁴Czy to wystarczy !.TR

Pozornie to się kłóci z założeniem lokalnej ograniczoności, ale przez odpowiednią zamianę czasu (trik matematyczny), można model rozpatrywany w tym podrozdziale sprowadzić do analizy modelu na skończonym przedziale czasu.

Twierdzenie 2.8 *W punktach ciągłości $\mu(t)$ istnieją pochodne cząstkowe $\partial/(\partial t)P^{ij}(t, t')$ oraz $\partial/(\partial t')P^{ij}(t, t')$ i funkcje przejścia spełniają następujący układ równań różniczkowych:*

$$\frac{\partial}{\partial t}P^{ij}(t, t') = - \sum_{k \in \mathcal{E}} \mu^{ik}(t)P^{kj}(t, t'), \quad t \neq \mathcal{N} \quad (2.19)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t'}P^{ij}(t, t') = \sum_{k \in \mathcal{E}} P^{ik}(t, t')\mu^{kj}(t') \quad t' \neq \mathcal{N}. \quad (2.20)$$

Dowód Niech $h > 0$ będzie takie, że $t + h \leq t'$. Z (2.9) mamy

$$\begin{aligned} P^{ij}(t + h, t') - P^{ij}(t, t') &= P^{ij}(t + h, t') - \sum_{k \in \mathcal{E}} P^{ik}(t, t + h)P^{kj}(t + h, t') \\ &= P^{ij}(t + h, t')(1 - P^{ii}(t, t + h)) - \sum_{k \neq i} P^{ik}(t, t + h)P^{kj}(t + h, t'). \end{aligned}$$

Korzystając z warunku ciągłości [Z1] mamy

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (P^{ij}(t + h, t') - P^{ij}(t, t')) = - \sum_{k \in \mathcal{E}} \mu^{ik}(t)P^{kj}(t, t').$$

W ten sam sposób pokazuje się,

$$\lim_{h \uparrow 0} h^{-1} (P^{ij}(t - h, t') - P^{ij}(t, t')) = - \sum_{k \in \mathcal{E}} \mu^{ik}(t)P^{kj}(t, t').$$

co dowodzi (2.19). Dowód (2.20) jest podobny. $\square$

Równania (2.19) i (2.20) są nazywane odpowiednio *retrospektywnym równaniem Kolmogorowa* i *prospektywnym równaniem Kolmogorowa*.

Przykład 2.9 Kontynuujemy przykład 2.5 i dla modelu AD napiszemy

prospektywny układ równań Kołmogorowa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'} P^{AA}(t, t') &= P^{AA}(t, t') \mu^{AA}(t') + P^{AD}(t, t') \mu^{DA}(t'), \\ &= -P^{AA}(t, t') \mu(t)\end{aligned}\quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'} P^{AD}(t, t') &= P^{AA}(t, t') \mu^{AD}(t') + P^{AD}(t, t') \mu^{DD}(t'), \\ &= P^{AA}(t, t') \mu(t)\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'} P^{DA}(t, t') &= P^{DA}(t, t') \mu^{AD}(t') + P^{DD}(t, t') \mu^{DA}(t'), \\ &= -P^{DA}(t, t') \mu_t\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'} P^{DD}(t, t') &= P^{DA}(t, t') \mu_{AD}(t') + P^{DD}(t, t') \mu^{DD}(t') \\ &= P^{DA}(t, t') \mu(t') .\end{aligned}\quad (2.24)$$

Teraz musimy jeszcze napisać warunki brzegowe

$$P^{AA}(t, t) = 1 \quad (2.25)$$

$$P^{AD}(t, t) = 0 \quad (2.26)$$

$$P^{DA}(t, t) = 0 \quad (2.27)$$

$$P^{DD}(t, t) = 1. \quad (2.28)$$

Rozwiązując pierwsze równanie Kołmogorowa otrzymujemy

$$P^{AA}(t, t') = e^{-\int_t^{t'} \mu(s) ds}.$$

Rozwiązując trzecie równanie Kołmogorowa otrzymujemy $P^{DA}(t, t') = 0$. Stąd oczywiście z czwartego mamy $P^{DD}(t, t') = 1$. Zostawiamy czytelnikowi aby pokazał, że

$$P^{AD}(t, t') = 1 - e^{-\int_t^{t'} \mu(s) ds}.$$

W notacji macierzowej możemy równania (2.19), (2.20) zapisać następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t, t') = -\boldsymbol{\mu}(t) \mathbf{P}(t, t') \quad (2.29)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{P}(t, t') = \mathbf{P}(t, t') \boldsymbol{\mu}(t') \quad (2.30)$$

z warunkiem brzegowym $\mathbf{P}(t, t) = \mathbf{I}$ dla $t \geq 0$. Po scałkowaniu tych równania otrzymujemy następujący rezultat:

Twierdzenie 2.10 *Spełnione jest następujące równanie całkowe: $\mathbf{P}(t, t')$*

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \int_t^{t'} \boldsymbol{\mu}(s) \mathbf{P}(s, t') \, ds \quad (2.31)$$

i

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \int_t^{t'} \mathbf{P}(t, s) \boldsymbol{\mu}(s) \, ds. \quad (2.32)$$

dla wszystkich $0 \leq t < t'$.

Można pokazać, że istnieje jedyna macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$ rozwiązująca (2.31) i (2.32). Wynikać to będzie z następującego twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie 2.11 *Przy założeniach twierdzenia 2.10 mamy $0 \leq t \leq t'$,*

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{t'} \int_{s_1}^{t'} \dots \int_{s_{n-1}}^{t'} \boldsymbol{\mu}(s_1) \dots \boldsymbol{\mu}(s_n) \, ds_n \dots ds_1 \quad (2.33)$$

lub

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{t'} \int_t^{s_1} \dots \int_t^{s_{n-1}} \boldsymbol{\mu}(s_n) \dots \boldsymbol{\mu}(s_1) \, ds_n \dots ds_1. \quad (2.34)$$

Przykład 2.12 Rozpatrzmy przypadek gdy macierz intensywności $\boldsymbol{\mu}(t) \equiv \boldsymbol{\Lambda}$ jest stała. Wtedy z równania (2.33) otrzymujemy

$$\mathbf{P}(t, t') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\Lambda}(t' - t))^l}{l!}.$$

Jest to tak zwana macierzowa funkcja wykładnicza, a więc

$$\mathbf{P}(t, t') = e^{\boldsymbol{\Lambda}(t' - t)}.$$

Macierzowa funkcja wykładnicza ma własność

$$e^{\boldsymbol{\Lambda}(t' - t)} = (e^{\boldsymbol{\Lambda}})^{(t' - t)}.$$

A więc dla $k = 0, \dots$ i $0 \leq u \leq 1$ mamy

$$\mathbf{P}(k, k + u) = (\mathbf{P}(k, k + u))^u. \quad (2.35)$$

Przykład 2.13 Załóżmy, że $\mu(t) = \mu(\lfloor t \rfloor)$, dla wszystkich t . To założenie jest odpowiadające hipotezie HCFM dla przypadku modelu wielostanowego. Wtedy mamy dla $0 \leq u \leq 1$, $x, n = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{P}(x, x+n+u) = \mathbf{P}(x, x+n)(\mathbf{P}(x+n, x+n+1))^u; \quad (2.36)$$

por. wzór (III.3.10). Ponadto

$$\mathbf{P}(x, x+n) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \mu(x+k)\right); \quad (2.37)$$

por. wzór III.3.9. Aby to pokazać, rozważmy $\mathbf{P}(k, k+u)$ dla pewnego $k = 0, 1, \dots$. Oczywiście mamy

$$\mathbf{P}(x, x+n+u) = \mathbf{P}(x, x+n)(\mathbf{P}(x+n, x+n+u));$$

Teraz korzystając z przykładu 2.12 mamy wzór (2.36). Zostawiamy czytelnikowi do pokazania wzór (2.37).

2.2 Spojrzenie na ewolucję łańcucha Markowa i dalsze przykłady

Rozpatrzmy łańcuch Markowa $\mathcal{J}(t)$ zadaną macierzą intensywności przejścia $\mu(t)$. Zakładamy hipotezę HJP-M. Tutaj podamy opis ewolucji tego procesu w czasie ciągłym. Wprowadza się

$$P^{ii}(t, t') = \Pr(\text{proces jest w stanie } i \text{ w odcinku } [t, t'] | \mathcal{J}(t) = i).$$

Korzystając z pomysłów z rozdziału X, można pokazać, że

$$P^{ii}(tt') = e^{-\int_t^{t'} \mu^i(s) ds}.$$

Stąd mamy, że jeśli proces w chwili x jest w stanie i oraz T_x^i jest czasem wyjścia z tego stanu, to ta zmienna ma gęstość

$$\mu^i(x+t) \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu^i(s) ds\right]. \quad (2.38)$$

Wzorem rozdziału X wprowadzamy zmienną J_x^i , która jest numerem stanu po wyjściu ze stanu i . Można pokazać, że gęstość $T_x^i, J_x^i = j$ jest dana przez $\mu^{ij}(x+t) \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu^i(s) ds\right]$.

Algorytm jest teraz następujący. Jeśli był skok omawianego procesu w chwili x to losujemy jego przyszły moment skoku i dokąd skacze zgodnie z rozkładem (2.38). Niech $\tau_1, \tau_2, \dots$ będą kolejnymi momentami skoków procesu $\text{cal}J(t)$ oraz $Z_j = \mathcal{J}(\tau_j)$ będzie stanem tuż po skoku (pamiętajmy o założeniu prawostronnej ciągłości i granic z lewej strony). Pomiedzy skokami proces $\mathcal{J}$ jest stały. Okazuje się, że ciąg zmiennych losowych (τ_j, Z_j) , $j = 1, 2, \dots$ jest łańcuchem Markowa. Zauważmy, że ze względu na kawałkami ciągłe realizacje, mamy $J(\tau_j - 0) = Z_{j-1}$.

Zrobimy teraz kilka uwag dotyczących realizacji procesu $\mathcal{J}$.

Uwaga

1. Z algorytmu podanego na początku podrozdziału na realizację procesu $\mathcal{J}$ widać, że przy naszym założeniu o lokalnej ograniczoności $\mu(t)$ realizacje muszą być kawałkami ciągłe i mogą mieć tylko skończoną liczbę skoków w skończonych przedziałach.

2. Jeśli $i \in \mathcal{E}_{\text{abs}}$ to $\mu_{ij}(t) \equiv 0$. Jeśli proces do czasu ω jest w $\mathcal{E}_{\text{abs}}$ to musi być spełnione

$$\int_0^\omega \mu_s^i ds = \infty, \quad i \neq \mathcal{E}_{\text{abs}}.$$

3 Procesy liczące zdefiniowane przez proces Markowa

3.1 Czas dyskretny

Zacniemy od przypadku czasu dyskretnego. Niech X_k będzie łańcuchem Markowa. Definiujemy dwa procesy: dla $i \neq j$

$$I_k^i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w chwili } k \text{ stan życia jest } i \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

i

$$I_k^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w chwili } k \text{ jest przejście z } i \text{ do } j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

W języku indykatorów możemy to precyzyjnie zapisać $I_k^i = 1(X_k = i)$ oraz $I_k^{ij} = 1(X_{k-1} = i, X_k = j)$.

Lemat 3.1 Niech $X_0 = i_0$ oraz $i \neq j$. Jeśli $\sum_{k=0}^\infty |c_k| < \infty$, to

$$E\left[\sum_{k=0}^\infty c_k I_k^i\right] = \sum_{k=0}^\infty c_k P^{i_0 i}(0, k),$$

oraz¹⁵

$$E \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k I_k^{ij} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P^{i_0 i}(0, k-1) P^{ij}(k-1).$$

Ciągiem liczącym przejścia z i do j (w przypadku ciągłym będzie to miało sens gdy $i \neq j$) do czasu k nazywamy

$$N_k^{ij} = \sum_{l=1}^k I_l^{ij}.$$

3.2 Czas ciągły

Rozpatrzmy teraz łańcuch Markowa $X(t)$ w czasie ciągłym i niech dla $i \neq j$ będziemy oznaczać kolejne momenty τ_l^{ij} ($l = 1, 2, \dots$) w których proces X skacze z i do j . Zdefiniujemy teraz proces liczący przejścia z $i \neq j$:

$$N^{ij}(t) = \sum_{l=1}^{\infty} 1(\tau_l \leq t), \quad t \geq 0.$$

Lemat 3.2 Niech $c(t)$ i μ_t^{ij} $0 \leq t \leq n$ są funkcjami kawałkami ciągłymi (i stąd ograniczonymi). Niech $X(0) = i_0$. Wtedy

$$E \left[\int_0^n c(t) 1(X(t) = i) dt \right] = \int_0^n c(t) P_{i_0 i}(0, t) dt,$$

oraz

$$E \left[\int_0^n c(t) 1(X(t) = i) dN^{ij}(t) \right] = \int_0^n c(t) P_{i_0 i}(0, t) \mu_t^{ij} dt.$$

Dowód Załóżmy na chwilę, że funkcje c i μ_t^{ij} są ciągłe. Bedziemy rozpatrywać rodzinę łańcuchów Markowa w czasie dyskretnym $X_k(\ell) = X(\frac{k}{\ell})$, $k = 0, 1, \dots$ z macierzą przejścia $(P_{ij}(\ell))_{i,j=0}^m$. Dowód będzie wynikał po pokazaniu następujących równości:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} c(k/\ell) P_{i_0 i}(0, \frac{k}{\ell}) \mu_{\frac{k}{\ell}}^{ij} = \int_0^n c(t) P_{i_0 i}(0, t) \mu_t^{ij} dt, \quad (3.39)$$

¹⁵Zastanowić się nad oznaczeniami

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq nl} c(k/\ell) P_{i_0 i}(0, k/\ell) P_{ij}(k/\ell, (k+1)/\ell) - \frac{1}{\ell} \sum_{0 \leq k \leq nl} c(k/\ell) P_{i_0, i}(0, \frac{k}{\ell}) \mu_{k/\ell}^{ij} \right) = 0, \quad (3.40)$$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq nl} c(k/\ell) 1(X(k/\ell) = i, X((k+1)/\ell) = j) = \int_0^n c(t) 1(X(t) = i) dN^{ij}(t), \quad (3.41)$$

oraz

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} E \left[\sum_{0 \leq k \leq nl} c(k/\ell) 1(X(k/\ell) = i, X((k+1)/\ell) = j) \right] = E \left[\int_0^n c(t) 1(X(t) = i) dN^{ij}(t) \right]. \quad (3.42)$$

4 Dalsze przykłady

4.1 Czas dyskretny

Modele wielostanowe są wykorzystane do analizy aktuarialnej ubezpieczeń od niepełności (disability insurance). Punktem wyjścia jest model AID z rysunku XI rozpatrywany w czasie dyskretnym. Jest to aproksymacja modelu w czasie ciągłym. Jednym z problemów zastosowań modelu ciągłego jest brak danych, które pozwoliłyby na oszacowanie intensywności przejścia między stanami. Tutaj stany (jak na przykład aktywny, niesprawny, śmierć) są rozpatrywane jedynie a pewnych chwilach, na przykład na koniec roku. A więc stany życia osoby która ubezpieczyła się w wieku x_0 w kolejnych latach (dla uproszczenia będziemy przyjmować jako okres rok) będą $\mathcal{J}_{x_0}, \mathcal{J}_{x_0+1}, \mathcal{J}_{x_0+2}, \dots$. Przy analizie przepływu pieniądza (cash flow) stosujemy następującą konwencję: w chwili x (czy wiek x) oznacza początek $(x - x_0 + 1)$ roku polisy. W naszym modelu $\mathcal{J}_{x_0}, \mathcal{J}_{x_0+1}, \mathcal{J}_{x_0+2}, \dots$ będzie łańcuchem Markowa z stanami: A – aktywny, D – śmierć oraz stanami modelującym pobieranie benefitów w zależności od długości ich pobierania.

Przykład 4.1 Rozpatrzmy polisę życiową od niepełności, w której benefit jest wypłacany w zależności od tego jak długo ubezpieczony jest się w stanie niepełności, z ograniczeniem płatności do c kolejnych lat. Po czasie c , bez względu na stan, świadczenie nie jest płacone. Z stanu c nie ma możliwości powrotu to stanu aktywności A, można w nim jedynie pozostać lub przejść do D. Stany to A(=0), D(= $c+1$), 1, 2, $\dots$, c . Niech $\Pr(\mathcal{J}_{x+1} = j | \mathcal{J}_x = i) = p^{ij}(x)$.

Zgodnie w modelem wyróżniamy następujące prawdopodobieństwa przejścia. Pozostałe będą równe zero, oprócz oczywiście $p^{\text{DD}}(x) = 1$.

Dla $i = 0, 1, \dots, c - 1$

$p^{i,A}(x)$ – prawdopodobieństwo reaktywacji do stanu A, lub pozostania w stanie jeśli $i = A$.

$p^{i,i+1}(x)$ – prawdopodobieństwo pozostania niesprawnym na następny rok, lub zostanie niesprawnym jeśli w poprzednim roku był aktywny $i = A$.

$p^{i,D}(x)$ – prawdopodobieństwo śmierci z stanu i ;

dla $i = c$

$p^{c,c}(x)$ – prawdopodobieństwo pozostania w stanie niesprawności,

$p^{c,D}(x)$ – prawdopodobieństwo śmierci z stanu c .

Polisa przewiduje 3 terminy końcowe: x_B – końcowy wiek wypłaty świadczenia, x_l – końcowy wiek ubezpieczenia, x_P – końcowy moment dla składek. Oczywiście $x_P \leq x_l \leq x_B$. Moment x_P jest oczywisty; po nim nie ma płatności składek, moment x_l jest to ostatni moment kiedy można zacząć wypłacać benefi, który musi być zaprzestany albo w wieku x_B lub reaktywacji lub śmierci.

Przypuśćmy, że mamy następujące tablice dekrementowe dla kohorty wielkości $l_{x,0}^i$: $l_{x,t}^i, r_{x,t}^i, d_{x,t}^i, t \geq 0$, gdzie

$l_{x,t}^i$ – jest liczbą osób które stały się niesprawne w wieku x i pozostały niesprawne w odcinku $[x, x + t]$ (maleje wzgl. t),

$r_{x,t}^i$ – jest liczbą osób które stały się niesprawne w wieku x i wyszły z tej niesprawności w odcinku $[x, x + t]$ (rośnie),

$d_{x,t}^i$ – jest liczbą osób które stały się niesprawne w wieku x i zmarły w odcinku $[x, x + t]$ (rośnie).

Mamy $l_{x,0}^i = l_{x,t}^i + r_{x,t}^i + d_{x,t}^i$.

Standardem stosowanym przez ubezpieczycieli jest wykorzystanie z tzw. czasu czekania, tj. czasu od momentu wypisania polisy do momentu możliwości skorzystania z świadczenia. W Szwajcarii np. czas czekania wynosi od 3

miesiący do 2-*ch* lat. Na podstawie danych statystycznych jest wyliczane i_x - *disability incidence rate* to jest frakcja osób w wieku x uprawnionych do pobierania świadczeń. Oczywiście ten wskaźnik musi zależeć od długości czasu czekania. Na bazie tych tablic możemy napisać prawdopodobieństwa przejścia $p^{ij}(x)$. Te prawdopodobieństwa będziemy wyliczać na podstawie zmian w tablicach dekrementowych w odcinku $[x, x + 1]$:

$$p^{A,1}(x) = i_x \frac{l_{x,1}^i}{l_{x,0}^i}$$

$$p^{i,i+1}(x) = \frac{l_{x-i,i+1}^i}{l_{x-i,i}^i} \text{ dla } i = 1, \dots, c-1; \text{ patrz rys.}$$

$$p^{i,0}(x) = \frac{r_{x-i,i+1}^i - r_{x-i,i}^i}{r_{x-i,i}^i}, \text{ dla } i = 1, \dots, c-1$$

$$p^{i,D}(x) = \frac{d_{x-i,i+1}^i - d_{x-i,i}^i}{d_{x-i,i}^i}, \text{ dla } i = 1, \dots, c-1$$

Ponadto mamy $p^{c,c} = 1 - q_x$, $p^{c,D} = q_x$, $p^{0,D} = q_x$, gdzie q_x jest prawdopodobieństwem śmierci x -latka w najbliższym roku.

Przykład 4.2 Rozpatrzmy teraz ubezpieczenie chorobowe z restytucją składki na n lat. Niech $\mathcal{J}_{x_0}, \mathcal{J}_{x_0+1}, \mathcal{J}_{x_0+2}, \dots$ będą stanami życia osoby w wieku x_0 (lub wieku polisy $x - x_0$) gdzie mamy następujące stany: $I, 1, \dots, r, D$, gdzie jak zwykle D oznacza śmierć, natomiast I oznacza pobieranie ubezpieczenia chorobowego, a $1, \dots, r$ liczba kolejnych lat bez pobierania zapomogi (stan zdrowia). Polisa przewiduje, że po r latach zapłacone składki będą zwrócone (bez uwzględnienia oprocentowania). Mamy dane: q_x – prawdopodobieństwo śmierci x -latka w najbliższym roku, f_x – częstotliwość hospitalizacji x -latka. Niech $\mathcal{J}_{x+1} = j | \mathcal{J}_x = i = p^{ij}(x)$. Wtedy macierz prawdopodobieństw przejścia jest następująca:

*	I	1	2	...	r	D
I	$f_x p_x$	$(1 - f_x) p_x$	0	...	0	q_x
1	$p_x f_x$	0	$(1 - f_x) p_x$	...	0	q_x
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	
r	$f_x p_x$	$(1 - f_x) p_x$	...	...	0	q_x
D	0	0	...	...	0	1

Składkę roczną w wysokości Π pobiera się na początku roku, natomiast zasiłek chorobowy w wysokości b oraz zwrot składki na koniec roku.

4.2 Czas ciągły

Zajmiemy się teraz modelem Markowskim zmian stanów życia AID dla (x) -latka. W modelu mamy trzy stany: 2 - aktywny (zdolny do płacenia składek), 1 - inwalida oraz 0 - śmierć i macierz intensywności przejścia jest¹⁶ z $\mu_t^{21} = \sigma_t$, $\mu_t^{12} = \rho_t$, $\mu_t^{20} = \mu_t$ i $\mu_t^{10} = \nu_t$; patrz schemat przejść na rys. 0.2. W szczególności jeśli $\mu_t^{12} = 0$ to mamy tak zwany model AID bez wyzdrowień; patrz schemat przejść na rys. 0.1 i takim modelem się teraz zajmiemy.

Dla tego procesu jeszcze można znaleźć jawną postać $\mathbf{P}(t, t')$. Mianowicie

$$P^{22}(t, t') = e^{-\int_t^{t'} (\mu_s + \sigma_s) ds} \quad (4.43)$$

$$P^{11}(t, t') = e^{-\int_t^{t'} \nu_s ds} \quad (4.44)$$

$$P^{21}(t, t') = \int_t^{t'} \sigma_s e^{-\int_t^s (\mu_v + \sigma_v) dv} e^{-\int_s^{t'} \nu_v dv} ds \quad (4.45)$$

$$P^{10}(t, t') = 1 - e^{-\int_t^{t'} \nu_s ds}. \quad (4.46)$$

Jeśli ponadto przyjmiemy $\mu_t^{21} = \mu_{x+t}$ and $\sigma_{x+t} = \mu_t^{20} = \mu_t^{10}$ dla pewnych nieujemnych funkcji μ_{x+t} i σ_{x+t} , to

$$\begin{aligned} P^{22}(tt') &= \exp\left(-\int_t^{t'} (\mu_{x+s} + \sigma_{x+s}) ds\right), \\ P^{21}(tt') &= \exp\left(-\int_t^{t'} \sigma_{x+s} ds\right) \left(1 - \exp\left(-\int_t^{t'} \mu_{x+s} ds\right)\right), \\ P^{11}(tt') &= \exp\left(-\int_t^{t'} \sigma_{x+s} ds\right). \end{aligned}$$

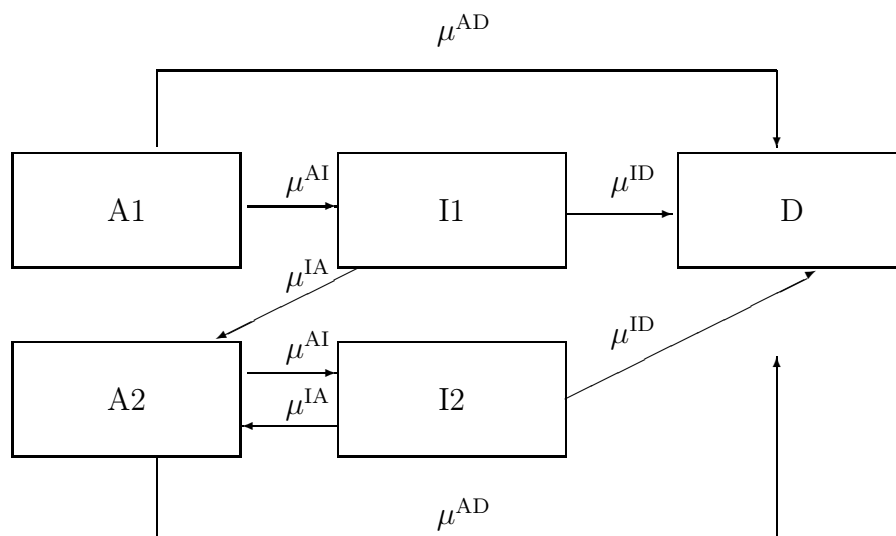
Są dwie możliwości pokazania wzorów (4.43)–(4.46). Można pokazać z definicji macierzy intensywności. Można też korzystając z teorii rozdziału X. Na przykład w wzorze (4.45) mamy $\sigma_s e^{-\int_t^s (\mu_v + \sigma_v) dv}$, które jest gęstością w modelu na dwa ryzyka, gdzie $T = s$ jest momentem wyjścia z stanu 2 w chwili s , i $J = 1$. Podobnie $e^{-\int_s^{t'} \mu_v dv}$ jest prawdopodobieństwo, że będąc w chwili s w stanie 1, pozostanie w tym stanie do czasu t .

Uwaga Pokażemy teraz jak zaprojektować następujące ubezpieczenie terminowe na n lat dla (x) -latka. Dane są: funkcje intensywności: śmierci gdy jest

¹⁶A może μ_{x+t}^{21} . TR

aktywny μ_t^{AD} oraz śmierci podczas inwalidztwa μ^{ID} . Ponadto dana jest intensywność przejścia ze stanu aktywności do inwalidztwa μ_t^{AI} oraz wyzdrowienia μ_t^{IA} . Ubezpieczony płaci składki w stałej wysokości Π w stanie aktywności, ale jest z tego obowiązku zwolniony za pierwszym byciem w stanie "I". Przy wszystkich pozostałych okresach inwalidztwa ubezpieczony musi pokrywać składkę w wysokości $\Pi/2$. W celu analizy tego ubezpieczenia proponujemy następujące stany życia: A1 – aktywny w momencie zawarcia ubezpieczenia, I1 – pierwszy raz w stanie inwalidztwa, A2 – aktywność po pierwszym ozdrowieniu, I2 – inwalidztwa po raz drugi, itd., D – śmierć. Będziemy te stany numerować następująco: A1=4, I1=3, A2=2, I2=1, D=0. Ubezpieczenie jest na życie, ale benefit zależny jest od stanu w którym następuje śmierć: S_1 jeśli umrze w stanie A1, S_2 jeśli w stanie A2, S_3 jeśli w stanie I1 oraz S_4 jeśli umrze w stanie I2.

Zakładamy, że stany życia przebiegają zgodnie z procesem Markowa $\mathcal{J}_x(t)$ ze stanami $\mathcal{E} = \{A1, A2, I1, I2, D\}$. Schemat przejść jest dany na rysunku 4.3. Aby obliczyć OWA składki piszemy



Rysunek 4.3: Schemat przejść w AID z wyróżnionym pierwszym stanem inwalidztwa

5. MARKOWSKIE WIELOSTANOWE MODELE UBEZPIECZENIOWO RENTOWE

$$\begin{aligned}\Pi a &= \Pi \left(\int_0^n v^t (\Pr(\mathcal{J}_x(t) = A1 | \mathcal{J}_x(0) = A1)) dt \right. \\ &\quad + \int_0^n v^t \Pr(\mathcal{J}_x(t) = A2 | \mathcal{J}_x(0) = A1) dt \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^n v^t \Pr(\mathcal{J}_x(t) = I2 | \mathcal{J}_x(0) = A1) dt \right) .\end{aligned}$$

Teraz policzymy OWA wypłaconych świadczeń. Mamy

$$\begin{aligned}A &= E \left[\int_0^n v^t d(S_1 N^{A1 \text{ D}}(t) + S_2 N^{A2 \text{ D}}(t) + S_3 N^{I1 \text{ D}}(t) + S_4 N^{I2 \text{ D}}(t)) \right] \\ &= \int_0^n v^t (S_1 {}_t p_x^{A1 \text{ A1}} \mu_{x+t}^{A \text{ D}} + S_2 {}_t p_x^{A1 \text{ A2}} \mu_{x+t}^{A \text{ D}} + S_3 {}_t p_x^{A1 \text{ I1}} \mu_{x+t}^{I \text{ D}} + S_4 {}_t p_x^{A1 \text{ I2}} \mu_{x+t}^{I \text{ D}}) dt .\end{aligned}$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z Lematu XII.2.2. Teraz jeśli chcemy aby Π było składką netto, to z równania równoważności mamy $\Pi = A/a$.

Zadania teoretyczne

- 4.1 Pokazać, że iloczyn dwóch macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną.
- 4.2 Udowodnić fakt 2.1.
- 4.3 Udowodnić fakt 2.2.
- 4.4 Pokazać, że jeśli łańcuch ma dokładnie jeden stan pochłaniający 0, to na to aby z prawdopodobieństwem 1 nastąpiło pochłonięcie wystarczy aby $\mu_t^{ij} > 0$ oraz $\int_0^\infty \mu_t^j dt = \infty$, $j = 1, \dots, m$.

5 Markowskie wielostanowe modele ubezpieczeniowo rentowe

Przez ${}_t p_x^{ij}$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że (x) -latarek będąc w stanie i po czasie t będzie w stanie j . W szczególności ${}_t p_x^{ij}$ oznacza prawdopodobieństwo, że x latek będąc w stanie i po roku będzie w stanie j . W tym podrozdziale będziemy zakładać, że stany życia są Markowskie, i dla ułatwienia że odpowiednio HJP-M lub HA-M jest w mocy. To założenie nie jest potrzebne do napisania warunku na składkę netto, ale tzw. równanie Chapmana-Kołmogorowa

jest użyte do wyprowadzenia odpowiednio równania rekurencyjnego lub różniczkowego Thiego. W oznaczeniach poprzedniego podrozdziału ${}_t p_x^{ij} = P_{ij}(x, x+t)$.

5.1 Model dyskretny

Rozpatrujemy następujący model dyskretny. W chwili $k = 0, 1, \dots$ po zawarciu ubezpieczenia (x) -latek jest w stanie $\mathcal{J}_{[x]+k}$. Przyjmujemy HA-M, tzn $p_{[x]+t}^{ij} = p_{x+t}^{ij}$. Rozpatrzmy teraz wielostanowy model ubezpieczeniowo rentowy. Będziemy więc rozpatrywali następującą polisę:¹⁷

- stany $0, 1, \dots, m$, gdzie 0 jest stanem pochłaniającym (śmierć),
- na okres n ,
- jeśli między k a $k+1$ następuje zmiana stanu z i na j , to w chwili $k+1$ wypłacone zostaje świadczenie b_{k+1}^{ij} ; zauważmy, że $b_k^{ii} = 0$,
- jeśli $\mathcal{J}_x(k) = i$, to wypłacona jest renta w wysokości $c_k^i > 0$,
- jeśli $\mathcal{J}_x(k) = i$, to wpłacona jest składka w wysokości $\Pi_k^i > 0$,
- jeśli ubezpieczony przeżył do momentu n , to wypłacone jest jednorazowe świadczenie w wysokości b_n^i ,
- obowiązuje czynnik dyskonta v .

Ponieważ w jednym momencie, teoretycznie możliwe są wpłaty i wypłaty (na przykład świadczenie za rok $k-1$ -szy i składce za rok k -ty), więc wprowadzamy wielkość wynikową:

$$H_k^i = \begin{cases} c_k^i - \Pi_k^i & 0 \leq k < n \\ b_n^i & n = k \end{cases}$$

Zauważmy pewną logiczną trudność, że nie rejestrujemy w modelu dyskretnym przejść w ciągu roku. Jak zwykle wypiszmy najpierw prospektywną stratę

$$\begin{aligned} {}_k L &= \sum_{j' \neq j} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} 1(\mathcal{J}_{[x]+k+\ell} = j, \mathcal{J}_{[x]+k+\ell+1} = j') \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^{\ell} H_{k+\ell}^j 1(\mathcal{J}_{[x]+k+\ell} = j). \end{aligned}$$

¹⁷Komentarz o składkach i rentach.

5. MARKOWSKIE WIELOSTANOWE MODELE UBEZPIECZENIOWO RENTOWE

Prospektywną rezerwę składki w chwili k nazywamy

$${}_k\mathcal{V}^i = \mathbb{E} [{}_kL | \mathcal{J}_x(k) = i], \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Twierdzenie 5.1

$$\begin{aligned} {}_k\mathcal{V}^i &= \sum_{j \neq j'}^{n-k-1} \sum_{\ell=0} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_{k+\ell}^j {}_\ell p_{x+k}^{ij}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ponadto mamy następujące równanie rekurencyjne Thielego

$${}_k\mathcal{V}^i - H_k^i = v \sum_{j \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ij} ({}_{k+1}\mathcal{V}^j + b_{k+1}^{ij}),$$

dla $0 \leq k < n$ oraz ${}_n\mathcal{V}^j = b_n^j$ dla $j \in \mathcal{E}$.

Dowód Korzystając z tego, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [1(\mathcal{J}_x(k+\ell) = j, \mathcal{J}_x(k+\ell+1) = j') | \mathcal{J}_x(k) = i] &= {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} \\ \mathbb{E} [1(\mathcal{J}_x(k+\ell) = j) | \mathcal{J}_x(k) = i] &= {}_\ell p_{x+k}^{ij} \end{aligned}$$

mamy

$$\begin{aligned} {}_k\mathcal{V}^i &= \mathbb{E} \left[\sum_{j \neq j'}^{n-k-1} \sum_{\ell=0} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} 1(\mathcal{J}_x(k+\ell) = j, \mathcal{J}_x(k+\ell+1) = j') | \mathcal{J}_x(k) = i \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_{k+\ell}^j 1(\mathcal{J}_x(k+\ell) = j) | \mathcal{J}_x(k) = i \right] \\ &= \sum_{j \neq j'}^{n-k-1} \sum_{\ell=0} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_{k+\ell}^j {}_\ell p_{x+k}^{ij} \end{aligned}$$

Aby udowodnić równanie rekurencyjne Thiego piszemy

$$\begin{aligned}
 {}_k\mathcal{V}^i &= \sum_{j,j' \in \mathcal{E}: j' \neq j} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_{\ell}p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} \\
 &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^{\ell} H_{k+\ell}^j {}_{\ell}p_{x+k}^{ij} \\
 &= v \sum_{j,j' \in \mathcal{E}: j' \neq j} (b_{k+1}^{jj'} 1(j=i) p_{x+k}^{jj'} + \sum_{\ell=1}^{n-k-1} v^{\ell} b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_{\ell}p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'}) \\
 &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} (H_k^j 1(j=i) + v \sum_{\ell=1}^{n-k} v^{\ell-1} H_{k+\ell}^j {}_{\ell}p_{x+k}^{ij}).
 \end{aligned}$$

Teraz korzystamy z równania Chapmana-Kolmogorowa dla $\ell = 1, 2, \dots$

$${}_{\ell}p_{x+k}^{ij} = \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} {}_{\ell-1}p_{x+k+1}^{i'j},$$

oraz podstawienia $\ell' = \ell - 1$, skąd dalej mamy

$$\begin{aligned}
 v \sum_{i' \in \mathcal{E}} b_{k+1}^{ii'} p_{x+k}^{ii'} &+ v \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} \sum_{j,j' \in \mathcal{E}: j' \neq j} \sum_{\ell'=0}^{n-k-2} v^{\ell'+1} b_{k+1+\ell'+1}^{jj'} {}_{\ell'+1}p_{x+k+1}^{i'j} p_{x+k+1+\ell'}^{jj'} \\
 &\quad + H_k^i + v \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell'=0}^{n-k-1} v^{\ell'} H_{k+1+\ell'}^j {}_{\ell'}p_{x+k+1}^{i'j} \\
 &= H_k^i + v \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} (b_{k+1}^{ii'} + {}_{k+1}\mathcal{V}^{i'}).
 \end{aligned}$$

□

Przykład 5.2 Rozważmy ubezpieczenie ogólne na życie na n lat dla (x) -latka, z funkcją korzyści b_k , składką Π_k , $k = 0, 1, \dots$ oraz wypłatą b_n^* wypłacaną jeśli ubezpieczony przeżyje n lat. Jeśli zakłada się hipotezę HA, to jest równoważne założeniu, że życie ma dwa stany $\mathcal{E} = \{0, 1\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 {}_k\mathcal{V}^1 + \Pi_k^1 &= v(p_{x+k}^{11}({}_{k+1}\mathcal{V}^1 + b_{k+1}^{11}) + p_{x+k}^{10}({}_{k+1}\mathcal{V}^0 + b_{k+1}^{10})) \\
 {}_k\mathcal{V}^0 + \Pi_k^0 &= v(p_{x+k}^{00}({}_{k+1}\mathcal{V}^0 + b_{k+1}^{00}) + p_{x+k}^{01}({}_{k+1}\mathcal{V}^1 + b_{k+1}^{01})).
 \end{aligned}$$

5. MARKOWSKIE WIELOSTANOWE MODELE UBEZPIECZENIOWO RENTOWE

Oczywiście mamy $p_{x+k}^{11} = p_{x+k}$, $p_{x+k}^{10} = q_{x+k}$, $b_k^{11} = 0$, $b_k^{10} = b_k$, $p_{x+k}^{00} = 1$, $p_{x+k}^{01} = 0$, $\Pi_k^1 = \Pi_k$, $\Pi_k^0 = 0$ oraz warunki brzegowe: ${}_n\mathcal{V}^1 = b_n^*$, ${}_n\mathcal{V}^0 = 0$. Wtedy powyższy układ rekurencyjny Thielego sprowadza się do

$$\begin{aligned} {}_k\mathcal{V} + \Pi_k^1 &= v(p_{x+k} {}_{k+1}\mathcal{V}^1 + q_{x+k} ({}_{k+1}\mathcal{V}^0 + b_{k+1}) \\ {}_k\mathcal{V}^0 &= v {}_{k+1}\mathcal{V}^0 \end{aligned}$$

Stąd korzystając z warunków brzegowych otrzymujemy, że ${}_k\mathcal{V}^0 = 0$, dla $k = 0, \dots, n$ oraz

$${}_{k+1}\mathcal{V} + \Pi_k = v(p_{x+k} {}_{k+1}\mathcal{V} + q_{x+k} b_{k+1}),$$

gdzie ${}_{k+1}\mathcal{V} = {}_{k+1}\mathcal{V}^1$ oraz warunek brzegowy jest ${}_n\mathcal{V} = b_n^*$, co zostało wcześniej wyprowadzone w rozdziale VII.1.4.

5.2 Model ciągły

Jeśli dla osoby nowourodzonej zmiany stanów podlegają łańcuchowi Markowa $\mathcal{J}(t)$ z macierzą intensywności przejścia μ_t , to dla (x) -latka, zmiany stanów życiowych podlegają łańcuchowi Markowa $\mathcal{J}_x(t)$ z macierzą intensywności przejścia μ_{x+t} ; przyjmujemy HJP-M. Przypomnijmy, że

$${}_h p_{x+t}^{ij} - 1(i = j) = h\mu_{x+t}^{ij} + o(h),$$

jeśli tylko t jest punktem ciągłości μ_t^{ij} . Rozpatrzmy teraz wielostanowy model ubezpieczeniowo rentowy. Będziemy więc rozpatrywali nasepującą polisę:¹⁸

- stany $0, 1, \dots, m$, gdzie 0 jest stanem pochłaniającym (śmierć),
- na okres n ,
- jeśli w chwili t następuje zmiana stanu z i na j , to wypłacone zostaje świadczenie $b^{ij}(t)$; zauważmy, że $b^{ii}(t) = 0$,
- jeśli $\mathcal{J}_x(t) = i$, to płacona jest renta z intensywnością $c^i(t)$,
- jeśli $\mathcal{J}_x(t) = i$, to płacona jest składka z intensywnością $\Pi^i(t)$,
- jeśli ubezpieczony przeżył do momentu n , to wypłacone jest jednorazowe świadczenie w wysokości $b^i(n)$,

¹⁸Komentarz o składkach i rentach

- obowiązuje stałe natężenie stopy procentowej δ oraz zmiany stanów podlegają macierzy intensywności $\boldsymbol{\mu}_{x+t}$.

W dalszej części zakładamy, że funkcje $c^i(t)$ oraz $\Pi^i(t)$ są kawałkami ciągłe. Piszemy $H^i(t) = c^i(t) - \Pi^i(t)$.

Jak zwykle wypiszmy najpierw prospektywną stratę

$$\begin{aligned} {}_tL &= \sum_{j \neq j'} \int_t^n v^{s-t} b^{jj'}(s) \, dN^{jj'}(s) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} v^{n-t} b^j(n) 1(\mathcal{J}_x(n) = j) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \int_t^n v^s H^j(s) 1(\mathcal{J}_x(s) = j) \, ds. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Prospektywną rezerwę składki w chwili k nazywamy

$${}_t\bar{\mathcal{V}}^i = E[{}_tL | \mathcal{J}_x(t) = i], \quad 0 \leq t \leq n.$$

Pokażemy, że rezerwy spełniają układ równań różniczkowych Thielego. Nieformalnie można ten układ dostać rozpatrując model dyskretny z krokiem $h = 1/\ell$, tj. łańcuch Markowa $\mathcal{J}(k/\ell)$, $k = 0, 1, \dots$. Wtedy zamiast czynnika dyskonta v musimy rozpatrzyć $\exp(\delta/\ell)$.

Twierdzenie 5.3 Dla $0 \leq t \leq n$

$$\begin{aligned} {}_t\bar{\mathcal{V}}^i &= \sum_{j, j' \in \mathcal{E}} \int_t^n v^{s-t} {}_{s-t}p_{x+t}^{ij} b^{jj'}(s) \mu_{x+s}^{jj'} \, ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \int_t^n v^{s-t} {}_{s-t}p_{x+t}^{ij} H^j(s) \, ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} v^{n-t} {}_{n-t}p_{x+t}^{ij} b^j(n). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Ponadto rezerwa ${}_k\bar{\mathcal{V}}^i$, $i \in \mathcal{E}$, $0 \leq t \leq n$ spełnia następujący układ równań różniczkowych Thielego

$$\frac{d}{dt} {}_t\bar{\mathcal{V}}^i = -H^i(t) + \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i - \sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'} ({}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} - {}_t\bar{\mathcal{V}}^i + b^{ii'}(t)) \quad (5.50)$$

dla $0 \leq t \leq n$ oraz ${}_n\bar{\mathcal{V}}^j = b^j(n)$, dla $j = 0, 1, \dots, m$.

5. MARKOWSKIE WIELOSTANOWE MODELE UBEZPIECZENIOWO RENTOWE

Układ równań różniczkowych (5.50), pamiętając, że $\mu_{x+t}^i = \sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'}$, możemy przepisać następująco:

$$\frac{d {}_t\bar{\mathcal{V}}^i}{dt} = -H^i(t) + \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i - \sum_{i' \in \mathcal{E}} \mu_{x+t}^{ii'} ({}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} + b^{ii'}(t)), \quad i \in \mathcal{E}. \quad (5.51)$$

Przepisując równanie różniczkowe Thielego (5.50) w postaci

$$-H^i(t) = \frac{d}{dt} {}_t\bar{\mathcal{V}}^i - \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i + \sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'} ({}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} - {}_t\bar{\mathcal{V}}^i + b^{ii'}(t))$$

mamy

- $-H^i(t)$ jest intensywnością składki,
- $\frac{d {}_t\bar{\mathcal{V}}^i}{dt} - \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i$ jest *składką oszczędnościową*,
- $\sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'} (b^{ii'}(t) + {}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} - {}_t\bar{\mathcal{V}}^i)$ jest *składką na ryzyko* (potrzebną do pokrycia ryzyka związanego z zmianami stanów).

Dowód Dowód (5.49) przeprowadza się z wzoru (5.48) przy wykorzystaniu wyników z lematu XII.2.2.

Będziemy używać zapis macierzowy:

$$\begin{aligned} {}_t\mathbf{P}_x &= ({}_tp_x^{ij})_{i,j \in \mathcal{E}} \\ \mathbf{B}(s) &= (b^{jj'}(s) \mu_{x+s}^{jj'})_{j,j' \in \mathcal{E}} \\ {}_t\bar{\mathbf{V}} &= ({}_t\bar{\mathcal{V}}^0, \dots, {}_t\bar{\mathcal{V}}^m)^T, \\ \mathbf{e} &= (1, \dots, 1)^T, \\ \mathbf{H}(t) &= (H^0(t), \dots, H^m(t))^T \\ \mathbf{b}(n) &= (b^0(n), \dots, b^m(n))^T \end{aligned}$$

Korzystając z równanie Chapmana-Kołmogorowa mamy¹⁹

$${}_{s-t}\mathbf{P}_{x+t} = ({}_t\mathbf{P}_x)^{-1} {}_s\mathbf{P}_x.$$

¹⁹Przyjmujemy, że ${}_t\mathbf{P}_x$ jest niesingularna.

Wtedy (5.49) możemy zapisać w zapisie wektorowo macierzowym:

$$\begin{aligned}
 {}_t\bar{\mathbf{V}} &= \int_t^n v^{s-t} {}_{s-t}\mathbf{p}_{x+t} \mathbf{B}(s) \, ds \mathbf{e} \\
 &\quad + \int_t^n v^{s-t} {}_{s-t}\mathbf{p}_{x+t} \mathbf{H}(s) \, ds \mathbf{e} \\
 &\quad + v^{n-t} {}_{n-t}\mathbf{p}_{x+t} \mathbf{b}(n) \\
 &= (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} \int_t^n v^s {}_s\mathbf{p}_x \mathbf{B}(s) \, ds \mathbf{e} \\
 &\quad + (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} \int_t^n v^s {}_s\mathbf{p}_x \mathbf{H}(s) \, ds \mathbf{e} \\
 &= (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} {}_n\mathbf{p}_x \mathbf{b}(n)
 \end{aligned}$$

Również równanie (2.30) w obecnym zapisie macierzowym jest

$$\frac{d}{dt} {}_t\mathbf{p}_x = {}_t\mathbf{p}_x \boldsymbol{\mu}_{x+t}.$$

W dowodzie twierdzenia potrzebujemy następujące fakty z rachunku macierzowego.

Lemat 5.4 *Niech $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$ będą macierzami $m \times m$ których elementy są różniczkowalne. Wtedy*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\right)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathbf{B}(t)\right).$$

Ponadto, korzystając z tożsamości $\mathbf{A}(t)^{-1}\mathbf{A}(t) = \mathbf{I}$ dla niesingularnej macierzy $\mathbf{A}(t)$ mamy

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)^{-1}) = -\mathbf{A}(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\right)\mathbf{A}(t)^{-1}.$$

Jesteśmy teraz przygotowani na pokazanie dowodu twierdzenia 5.3.

Dowód Różniczkując

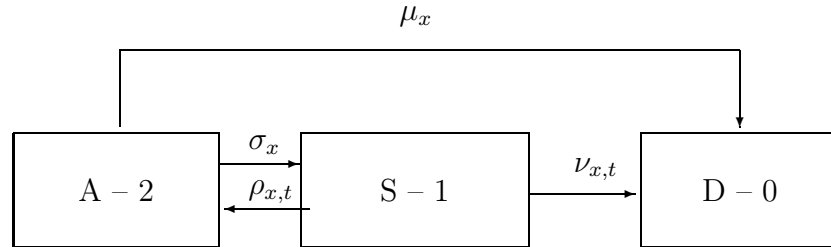
$${}_t\bar{\mathbf{V}} = (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} \left(\int_t^n v^s {}_s\mathbf{p}_x \mathbf{B}(s) \, ds \mathbf{e} + \int_t^n v^s \mathbf{H}(s) \, ds + v^n {}_n\mathbf{p}_x \mathbf{b}(n) \right),$$

i pamiętając, że $dv^{-t}/dt = \delta v^{-t}$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^t\bar{\mathbf{V}} &= (\delta v^{-t}({}^t\mathbf{p}_x)^{-1} - v^{-t}({}^t\mathbf{p}_x)^{-1}(\frac{d}{dt} {}^t\mathbf{p}_x)({}^t\mathbf{p}_x)^{-1}) \\ &\quad \times (\int_t^n v^s {}^s\mathbf{p}_x \mathbf{B}(s) ds \mathbf{e} + \int_t^n v^s \mathbf{H}(s) ds + v^n {}^n\mathbf{p}_x \mathbf{b}(n)) \\ &\quad + v^{-t}({}^t\mathbf{p}_x)^{-1}(-v^t {}^t\mathbf{p}_x \mathbf{B}(t) \mathbf{e} - v^t {}^t\mathbf{p}_x \mathbf{H}(t)) \\ &= \delta_t \bar{\mathbf{V}} - \boldsymbol{\mu}_{x+t} {}^t\bar{\mathbf{V}} - \mathbf{B}(t) \mathbf{e} - \mathbf{H}(t). \end{aligned}$$

6 Modele chorobowe

Rozpatrzmy model AID z następującą modyfikacją prowadzącą do modelu ASD ze stanami: A – aktywny, S – chory, D – śmierć. Bardziej realistyczny model chorobowy musi zakładać, że zarówno intensywność wyleczenia jak i intensywność śmierci podczas choroby zależy od czasu trwania choroby. Definiujemy więc: σ_x – intensywność zachorowania dla (x)-latka, $\rho_{x,s}$ – intensywność wyleczenia dla (x)-latka i długości choroby s , μ_x – intensywność śmiertelności dla zdrowego (x)-latka, $\nu_{x,s}$ – intensywność śmiertelności dla (x)-latka chorego przez czas s . Schemat przejść jest podany na rys. 6. Model się komplikuje i żeby uzyskać markowskość, stan S należy rozpatry-



Rysunek 6.4: Schemat przejść w modelu ASD

wać łącznie z czasem przebywania w tym stanie, tj. (S,s) . Przestrzeń stanów $\mathcal{E} = \{A, D, (S,v), v \geq 0\}$ jest więc nieprzeliczalna.

Rozpatrzmy więc proces $\mathcal{J}(t)$ i niech $\tau_1, \tau_2, \dots$ będą kolejnymi momentami skoków procesu $\mathcal{J}(t)$ oraz $Z_j = \mathcal{J}(\tau_j)$ będzie stanem tuż po skoku (pamiętajmy o założeniu prawostronnej ciągłości i granic z lewej strony). Zauważmy, że ze względu na kawałkami ciągłe realizacje, mamy $\mathcal{J}(\tau_j - 0) = Z_{j-1}$. Dorzu-

camy jeszcze $\tau_0 = 0$. Definiujemy teraz proces

$$U(t) = \sum_{j \geq 0} (t - \tau_j) 1(\tau_j \leq t < \tau_{j+1}), \quad t \geq 0.$$

Zauważmy, że znajomość przebiegu procesu $\mathcal{J}(t)$ do chwili s pozwala wyznaczyć przebieg procesu $U(t)$ do chwili s . Podobnie do tego jak robiliśmy to w podrozdziale [????] definiujemy intensywność przejścia

$$\mu_t^{ij;s} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pr(\mathcal{J}(t) = j | \mathcal{J}(s) = i, U(t) = s)}{h},$$

dla $i, j \in \mathcal{E}$ oraz $s \geq 0$. Powstaje pytanie dla jakich procesów taka granica istnieje dla wszystkich i, j , i dla wszystkich s, t być może poza skończoną liczbą punktów.

6.1 Funkcje chorobowe

Uwagi bibliograficzne Pierwotny pomysł zastosowania niejednorodnych procesów Markowa do modelowania przebiegu stanów w ubezpieczeniach życiowych pochodzi od Hoem (1969, 1988). Dalsze prace to jak np. Norberga (1995) gdzie podane są wzory na liczenie wyższych momentów przyszłej straty lub Watersa (1984) (pochodzą oznaczenie ${}_t p_x^{ij}$ oraz ${}_t \bar{p}_x^{ij}$). Teoria łańcuchów Markowa jest klasyczna, więcej można znaleźć w Rolski *et al* (1999). Polecamy też wybór tekstów pod redakcją Ostasiewicza (2004). Teorię procesów liczących na tle analizy stochastycznej w zastosowaniu do wnioskowania statystycznego w ubezpieczeniach można znaleźć w interesującej przeglądowej pracy A.S. Macdonalda (1996C). Modelowanie ubezpieczeń wielostanowych za pomocą procesów Markowa znaleźć można w pracy Norberga (1991) oraz w skrypcie Norberga (2000). W literaturze polskiej modelowaniu takiemu poświęcony jest rozdział książki pod redakcją Ostasiewicza (2000).

7 Zadania

- 7.1 Napisać macierz intensywności przejścia dla modeli: AID z uzdrowieniami, AID bez uzdrowień.
- 7.2 Napisać macierz intensywności przejścia dla modeli: AID z uzdrowieniami, AID bez uzdrowień. Napisać prospektywne i retrospektywne równanie Kołmogorowa dla modeli: a) AD, b) AID bez uzdrowień, AID z uzdrowieniami.
- 7.3 Rozpatrzmy następującą modyfikację ubezpieczenia terminowego na okres n dla (x) -latka. Zamiast płacić pojedynczą kwotę w chwili śmierci, z polisy od chwili śmierci wypłaca się z jednostkową intensywnością od chwili śmierci do chwili n , jeśli tylko śmierć nastąpiła do momentu n . Takie ubezpieczenie nosi nazwę *family income insurance*. Zakładamy, że składka jest płacona z stałą intensywnością Π do momentu śmierci ubezpieczonego lub $h \leq n$. Znaleźć wzór na składkę netto oraz rezerwę składki netto w odcinku $[0, n]$.
- 7.4 Pokazać, że proces 0.3 jest łańcuchem Markowa oraz napisać funkcję przejścia $\Pr(J(t') = i | J(t) = 1)$. Pokazać, że przy założeniu hipotezy HJP-D postać macierzy intensywności przejścia jest taka jak w (2.18).
- 7.5 W przypadku grupy m osób w wieku $x_1, \dots, x_m$ lat możemy wprowadzić proces liczący liczbę osób żyjących w chwili t , tj.

$$J(t) = \begin{cases} m & \text{jeśli } 0 \leq t < T_{(1)} \\ m-1 & \text{jeśli } T_{(1)} \leq t < T_{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{jeśli } T_{(m-1)} \leq t < T_{(m)} \\ 0 & \text{jeśli } T_{(m)} \leq t \end{cases} \quad (7.1)$$

Udowodnić, że jeśli $x = x_1 = \dots = x_m$, to $J(t)$ jest również łańcuchem Markowa.

- 7.6 Niech $J(t)$ będzie łańcuchem Markowa z

$$\boldsymbol{\mu}_t = \begin{pmatrix} \mu_t^{22} & \mu_t^{21} \\ \mu_t^{12} & \mu_t^{11} \end{pmatrix},$$

Znaleźć $\tilde{r}^{ij}(t, t') = \Pr(J(t') = j | J(t) = i)$, $i, j = 1, 2$

- 7.7 Rozważyć łańcuch Markowa typu AID z macierzą intensywności przejścia $\boldsymbol{\mu}_t$ z $\mu_t^{21} = \sigma_{x+t}$, $\mu_t^{12} = \rho_{x+t}$, $\mu_t^{20} = \mu_{x+t}$ i $\mu_t^{10} = \nu_{x+t}$. Podać macierz funkcji przejścia $\mathbf{R}$ korzystając z funkcji $\tilde{r}^{ij}(t, t')$ z zadania 7.6.
- 7.8 ²⁰ Zanalizować następujący łańcuch Markowa $J(t)$ z stanami $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i macierzą intensywności przejścia

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} * & \rho_t & 0 & \sigma_t & \kappa_t \\ 0 & * & \sigma_t & 0 & \kappa_t \\ 0 & 0 & * & 0 & \lambda_t \\ 0 & 0 & 0 & * & \lambda_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stany mają znaczenia 4 – nieubezpieczony, zdrowy, 3 – ubezpieczony zdrowy, 2 – ubezpieczony chory, 1 – nieubezpieczony, chory, 0 – śmierć oraz ρ_x jest intensywnością zawierania ubezpieczeń dla (x) -latka, σ_x jest intensywnością zachorowania (x) -latka, κ_x jest intensywnością śmiertelności wśród zdrowych dla (x) -latka oraz λ_x jest intensywnością śmiertelności wśród chorych (x) -latków. Znaleźć $\mathbf{R}(t, t')$.

- 7.9 Rozważmy ubezpieczenie terminowe na życie na n lat dla (x) -latka, którego życie podlega zmianom jak w modelu AID z uzdrowieniami. W momencie śmierci jest wypłacone świadczenie w wysokości 1. Według umowy, ubezpieczony jest on zwolniony z płacenia składki w okresach inwalidztwa. Policzyc składkę netto tego ubezpieczenia, jeśli dana jest macierz intensywności przejścia $\boldsymbol{\mu}_{[x]+t}$ oraz przy natężeniu stopy procentowej δ . [Wsk. Patrz przykład.]
- 7.10 Pokazać, że jeśli ze stanu i wszystkie strzałki wychodzą na zewnątrz, to

$$r^{ii}(t, t') = \tilde{r}^{ii}(t, t') = e^{-\int_t^{t'} \mu_v^i dv}.$$

²⁰Na podstawie zadanie 6.3 z Exercises in Life Insurance Mathematics pod red. Bjarne Mess i Jakob Christensen, University of Copenhagen, Laboratory of Actuarial Mathematics, 1996.