

Rachunek prawdopodobieństwa B2

Lista 1 dodatkowa

Tomasz Rolski

1. Niech Z_1, Z_2 będą iid $\sim N(0,1)$. Obliczyć $[Z_1|aZ_1 + bZ_2]$.
2. Rozważmy dwa wektory losowe $X \in R^n$ i $Y \in R^m$. Zakładamy, że łączny rozkład (X, Y) ma gęstość (względem $(n+m)$ -wymiarowej miary Lebesguea) $g_{X,Y}$. Pokazać, że warunkowy rozkład X pod warunkiem Y ma gęstość

$$\frac{g_{X,Y}(x_1, \dots, x_{n+m})}{g_Y(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})},$$

gdzie

$$g_Y(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \int \dots \int g_{X,Y}(x_1, \dots, x_{n+m}) dx_n \dots dx_{n+m}.$$

3. Dla $x \in R$ niech μ i ν_x będą miarami probabilistycznymi na R , i założymy, że $\nu_x(B)$ jest borelowską funkcją x dla dowolnego borelowskiego B . Zauważyć, że

$$\pi(E) = \int_R \nu_x(\{y : (x, y) \in E\}) \mu(dx)$$

definiuje miarę probabilistyczną na R^2 .

Przypuśćmy, że (X, Y) mają łączny rozkład π na R^2 . Pokazać, że ν_x jest wersją warunkowego rozkładu Y pod warunkiem X .

Zastanowić się jak można powyższy fakt wykorzystać do rozwiązania pierwszego przykładu podanego na wykładzie.

4. Niech X, Y będą iid z dystrybucją F , która jest ciągła i dodatnia. Znaleźć warunkowe prawdopodobieństwo $X \leq x$ pod warunkiem $M = \max(X, Y)$.
5. Zadanie 5 i 13 z Jakubowskiego Sztencła (str 136).
6. Niech P, Q będą miarami probabilistycznymi $(\Omega, \mathcal{F})$, dla których istnieje gęstość $dQ/dP = Z > 0$. Niech $\mathcal{G}$ będzie podsigma ciałem $\mathcal{F}$ i X z.l. Q -całkowalną. Pokazać, że

$$E_Q(X|\mathcal{G}) = \frac{E_P(XY|\mathcal{G})}{E_P(Z|\mathcal{G})}.$$