

Rachunek prawdopodobieństwa B2

Lista 2

Tomasz Rolski

W zadaniach poniżej $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$.

Rozkłady warunkowe

1. Niech Z_1, Z_2 będą iid z drugim momentem skończonym. Obliczyć $[Z_1|aZ_1 + bZ_2]$.
2. Pokazać, że na $\Omega = \{a, b, c\}$ bez założenia zawierania σ -ciał

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1].$$

3. Pokazać, że jeśli X, Y są zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = X$ oraz $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2 < \infty$, to $X = Y$ p.n.
4. Niech $\xi_1, \dots$ będą iid z średnią μ oraz wariancją σ^2 , oraz τ niezależną od (ξ_j) zmienną przyjmującą wartości z $\mathbb{Z}_+$. Pokazać, że $\text{Var}S_\tau = \sigma^2\mathbb{E}\tau + \mu^2\text{Var}[\tau]$.

Czasy zatrzymania

1. τ jest czasem zatrzymania. Czy stąd wynika, że czasem zatrzymania jest a) $\tau + 1$, b) $\tau - 1$, c) τ^2 .
2. Udowodnić, że $\tau = s$ jest czasem zatrzymania wzg. dowolnej filtracji.
3. Niech τ_1, τ_2 będą czasami zatrzymania. Udowodnić, że $\max(\tau_1, \tau_2)$, $\min(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 + c$ gdy $c \geq 0$ są czasami zatrzymania.
4. Niech τ będzie czasem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_j)_{j \geq 1} \geq 1$ i niech $(X_j)_{j \geq 1}$ będzie adaptowany do tej filtracji.
 - a) Udowodnić, że moment pierwszej wizyty w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ po chwili τ jest czasem zatrzymania.
 - b) Zdefiniować moment k -tej wizyty i pokazać, że jest on czasem zatrzymania.
5. Udowodnić, że $\mathcal{F}_\tau$ jest σ -ciałem. Pokazać, że jeśli $\tau = s$ to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_s$.
6. Udowodnić, że jeśli $\tau_1 \leq \tau_2$, to $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.
7. Jeśli $(\xi_j)_{j \geq 1}$ jest ciągiem prób Bernoulliego, zaś $\tau = \min\{n : S_n = 1\}$, to $\mathbb{E}\tau = \infty$.
8. Niech $\xi_1, \dots$ będą iid, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^\xi$ i τ czasem zatrzymania. Pokazać, że przy warunku $\tau < \infty$, ciąg $(\xi_{\tau+n})_{n \geq 1}$ jest niezależny od $\mathcal{F}_\tau$ i jest stochastyczną kopią oryginalnego ciągu (ξ_n) .

9. Niech $(\xi_j)_{j \geq 1}$ będzie ciągiem iii o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Niech $\tau = \min\{n : S_n > 1\}$. Pokazać, że $\mathbb{P}(\tau > k) = 1/k!$. Stąd $\mathbb{E}\tau = e$ oraz $\mathbb{E}S_\tau = e/2$.

Martyngały

1. Niech $\xi_1, \dots$ będą niezależne z $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ i $\text{Var}\xi_i = \sigma_i^2 < \infty$ i niech $s_n^2 = \sum_{m=1}^n \sigma_m^2$. Pokazać, że $S_n^2 - s_n^2$ jest martyngałem.
2. Niech $\xi_1, \dots$ będą niezależne z $\mathbb{E}\xi_1 = 0$. Wtedy

$$X_n^{(k)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k}$$

jest martyngałem