

Rachunek prawdopodobieństwa B2

Lista 3

Tomasz Rolski

W zadaniach poniżej $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$.

Martyngały

1. Niech $\xi_1, \dots$ będą niezależne z $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ i $\mathbf{Var}\xi_i = \sigma_i^2 < \infty$ i niech $s_n^2 = \sum_{m=1}^n \sigma_m^2$. Pokazać, że $S_n^2 - s_n^2$ jest martyngałem.
2. Niech $\xi_1, \dots$ będą niezależne z $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Wtedy

$$X_n^{(k)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}$$

jest martyngałem

3. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie $\mathcal{F}_n$ martyngałem, i niech $\phi(x)$ będzie funkcją wypukłą t.ż. $\mathbf{E}\phi(X_n) < \infty$. Pokazać, że $(Y_n)_{n \geq 1}$ jest $\mathcal{F}_n$ submartyngałem. To samo jeśli X_n jest submartyngałem, ale wtedy ϕ musi być dodatkowo niemalejąca.
4. Niech X będzie całkowalną zmienną losową oraz $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ filtracją. Niech pokazać, że (X_n) jest $\mathcal{F}_n$ -martyngałem, gdzie $X_n = \mathbf{E}(X | \mathcal{F}_n)$
5. Rozważyć zadanie o ruinie gracza dla przypadku niesymetrycznego; ξ_j są iid przyjmujące wartości 1 i -1 odpowiednio z prawdopodobieństwami p, q . Niech $p_1 = \mathbf{P}(S_{\tau_R} = -a)$. Pokazać, że

$$p_1 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z}.$$

6. Udowodnić następującą wersję tożsamości Walda: jeśli $(\xi_n)_n$ są iid, $\mathbf{E}\xi_j^2 < \infty$ oraz $\mathbf{E}\tau < \infty$, to

$$\mathbf{E}(S_n - \tau \mathbf{E}\xi_1)^2 = \mathbf{E}\tau \mathbf{Var}\xi_1.$$

Wsk. Bez straty ogólności przyjąć $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Co można powiedzieć o ciągu $(S_n - n\mathbf{E}\xi_1^2)_n$?

7. Udowodnić, że w symetrycznym zagadnieniu o ruinie gracza czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy wynosi ab .
8. Niech S_n będzie asymetrycznym prostym błądzeniem przypadkowym z $p > 1/2$, i niech $\sigma^2 = 1 - (p - q)^2$. Wykorzystując fakt, że $X_n = (S - n - (p - q)n)^2 - \sigma^2 n$ jest martyngałem pokazać, że $\mathbf{Var}\tau_1 = (1 - (p - q)^2)/(p - q)^3$, gdzie $\tau_1 = \min\{n : S_n = 1\}$.

9. Niech ξ_1 będzie niestałą zmienną losową z funkcją tworzącą momenty $\phi(\theta) = \mathbf{E} \exp(\theta \xi_1) < \infty$ dla $\theta \in (-\delta, \delta)$. Pokazać, że $X_n = \exp(\theta S_n - n\psi(\theta))$ jest martyngałem, gdzie $\psi(\theta) = \log \phi(\theta)$. (Funkcja ψ jest ściśle wypukła; dlaczego?).
10. Niech S_n będzie asymetrycznym błędzeniem przypadkowym z $p \geq 1$ oraz $\tau_1 = \inf\{n : S_n = 1\}$. Używając wyniku poprzedniego zadania pokazać, że dla $\theta > 0$ mamy $1 = e^\theta \mathbf{E} \phi(\theta)^{-\tau_1}$, gdzie $\phi(\theta) = pe^\theta + qe^{-\theta}$. Podstawiając $\phi(\theta) = s$ i rozwiązując dla $x = e^{-\theta}$ pokazać, że
- $$\mathbf{E} s^{\tau_1} = (1 - \{1 - 4pqs^2\}^{1/2})/2qs.$$
11. Niech Z_n będzie procesem gałęzkowym z (offspring) funkcją prawdopodobieństwa p_n , i niech $\phi(\theta) = \sum_k p_k \theta^k$. Przypuśćmy, że dla $\rho < 1$ mamy $\phi(\rho) = \rho$. Pokazać, że ρ^{Z_n} jest martyngałem i wykorzystać ten fakt do pokazania
- $$\mathbf{P}(Z_n = 0 \text{ dla pewnego } n | Z_0 = x) = \rho^x.$$
12. Używając twierdzenia o zbieżności martyngałów udowodnić twierdzenie o 2-ch szeregach.