

Rachunek prawdopodobieństwa B2

Lista 4

Tomasz Rolski

W zadaniach poniżej $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$.

Martyngały

1. Niech $\xi_1, \dots$ będą niezależne z $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ i $\mathbf{Var}\xi_i = \sigma_i^2 < \infty$ i niech $s_n^2 = \sum_{m=1}^n \sigma_m^2$. Pokazać, że $S_n^2 - s_n^2$ jest martyngałem.
2. Niech $\xi_1, \dots$ będą niezależne z $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Wtedy

$$X_n^{(k)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k}$$

jest martyngałem

3. Pokazać, że jeśli $\mathbf{P}(\lim_n \frac{Z_n}{\mu^n} = 0) < 1$, to to prawdopodobieństwo równe jest ρ i stąd

$$\{\lim_n \frac{Z_n}{\mu^n} > 0\} = \{Z_n > 0 \text{ for all } n\}, \quad \text{p.n.}$$

4. Galton i Watson interesowali się problemem dziedziczenia nazwisk arystokratycznych. W XIX wieku nazwiska dziedziczyli tylko mężczy potomkowie. Przyjmując, że w każdej rodzinie jest 3-ka dzieci, mamy funkcję prawdopodobieństwa liczby męskich potomków $p_0 = 1/8, p_1 = 3/8, p_2 = 3/8, p_3 = 1/8$. Policzyc prawdopodobieństwo ρ , że nazwisko wymrze, gdy $Z_0 = 1$.
5. Rozważmy następującą modyfikację procesu gałązkowego z funkcją prawdopodobieństwa $(p_n)_{n \geq 1}$. Zakłada się dodatkowo, że każdy osobnik z umiera z prawdopodobieństwem $q \in (0, 1)$ zanim będzie mógł mieć potomstwo (niezależnie jeden od drugiego). Podać warunki w języku q i (p_n) , że populacja wymrze z prawdopodobieństwem 1.
6. Niech Z_n oznacza liczbę osób w n -tej generacji. Zakładamy, że średnia liczba potomków wynosi μ i wariancja $\sigma^2 < \infty$. Pokazać, że
 - (i) $E(Z_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = \mu^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n$.
 - (ii) Niech $M_n = Z_n / \mu^n$. Pokazać, że jeśli $\mu > 1$, to istnieje $C < \infty$ takie, że

$$\mathbf{E}(M_n^2) < C.$$

- (iii) Pokazać, że tak nie jest gdy $\mu \leq 1$.

7. Niech $(S_n)_{n \geq 1}$ będzie prostym symetrycznym błędzeniem przypadkowym. Pokazać, że istnieje $C < \infty$, takie, że dla wszystkich $a > 0$

$$\mathbf{P}(\max(S_1, \dots, S_n) \geq a\sqrt{n}) \leq Ce^{-a}$$

dla dostatecznie dużych n . Wsk. Pokazać najpierw, że

$$\mathbf{P}(\max(S_1, \dots, S_n) \geq a\sqrt{n}) \leq e^{-a} \mathbf{E}(e^{S_n/\sqrt{n}}).$$

8. Niech $(S_n)_{n \geq 1}$ będzie prostym symetrycznym błędzeniem przypadkowym. Pokazać, że dla każdego $\beta > 0$ istnieje $C_\beta < \infty$ takie, że dla każdego n

$$\mathbf{P}(\max(S_1, \dots, S_n) \geq a\sqrt{n}) \leq C_\beta e^{-a^\beta}.$$

Stąd pokazać, że dla każdego $c > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\max(S_1, \dots, S_n) \geq \sqrt{n} \log n) < \infty.$$

Jako wniosek wydedukować

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}(\log n)} = 0 \quad \text{p.n..}$$

9. Niech $(M_n)_{n \geq 0}$ będzie martyngałem z $M_0 = 0$ oraz $\mathbf{E}M_n^2 < \infty$. Pokazać, że

$$\mathbf{P}(\max(M_1, \dots, M_n) \geq x) \leq \frac{\mathbf{E}M_n^2}{(\mathbf{E}M_n^2 + x)}.$$

Wsk. Użyć submartyngału $(M_n + c)^2$ i następnie zoptymalizować względem c .