

Rachunek prawdopodobieństwa B2

Lista 5

Tomasz Rolski

Funkcje charakterystyczne

1. Obliczyć funkcje charakterystyczne rozkładów: dwustronnego wykładniczego, Cauchy'ego, Gamma, cosinus hiperboliczny; patrz Tabela 2 w § 9.1 z książki Jakubowskiego Sztencla.
2. Udowodnić, że dla funkcji charakterystycznej ϕ rozkładu μ następujące warunki są równoważne.
 - (i) $\phi(s) = 1$ dla $s \neq 0$.
 - (ii) ϕ ma okres s .
 - (iii) Rozkład μ jest skupiony na zbiorze punktów postaci $\{2\pi k/s : k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Pokazać, że jeśli ϕ jest funkcją charakterystyczną, to $\Re\phi$ oraz $|\phi|^2$ też.
4. Rozwijając f. char. r. normalnego $e^{-t^2/2}$ pokazać, że jeśli $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, to

$$\mathbf{E}X^{2n} = (2n)!/(2^n n!) = (2n-1)!!$$

5. Udowodnić metodami probabilistycznymi

$$\sin(t)/t = \prod_{m=1}^{\infty} \cos(t/2^m).$$

6. Niech $X_1, \dots$ będą niezależne oraz $|X_n| \leq M$ oraz $\sum_n \mathbf{Var} X_n = \infty$. Wtedy $(S_n - \mathbf{E}S_n)/\sqrt{\mathbf{Var} S_n}$ zbiega według rozkładu do standardowego rozkładu normalnego.
7. Pokazać wielowymiarową wersję CTG. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą iii wektorami z R^d , z wektorem średniej μ oraz macierzą kowariancji (skończoną) $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^d$. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Udowodnić, że $(S_n - n\mu)/\sqrt{n^{1/2}}$ zbiega według rozkładu do wielowymiarowego rozkładu normalnego z wektorem średniej 0 i macierzą kowariancji Σ .
8. Niech ϕ będzie funkcją charakterystyczną rozkładu F na R . Jaki rozkład na R^d odpowiada funkcji charakterystycznej $\psi(t, \dots, t_d) = \phi(t_1 + \dots + t_d)$.
9. Niech $\phi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n)$ będzie funkcją charakterystyczną wektora losowego $(X_1, \dots, X_n)$ oraz $\phi_{X_j}(t)$ f.char. zmiennej losowej X_j . Pokazać, że zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\phi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n \phi_{X_j}(t_j).$$

10. Niech wektor $(X_1, \dots, X_n)$ ma wielowymiarowy rozkład normalny z wektorem średniej μ i macierzą kowariancji Σ . Pokazać, że $X_1, \dots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\sigma_{jk} = 0$ dla $j \neq k$.