

Rachunek prawdopodobieństwa B2

Lista 6

Tomasz Rolski

Twierdzenia graniczne

1. Zmienne losowe $X_1, \dots$, są niezależne i $\mathbf{P}(X_k = k) = \mathbf{P}(X_k = -k) = 1/2$. Niech $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{Var} X_j$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{s_n}.$$

2. Zmienne losowe $X_1, \dots$, są niezależne i mają rozkłady $U(-a_k, a_k)$. Niech $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{Var} X_j$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{s_n},$$

jeśli a) ciąg a_k jest ograniczony i $s_n \rightarrow \infty$; b) jeśli $\sum_j a_j < \infty$.

3. Zmienna X_λ ma rozkład $\text{Poi}(\lambda)$. Zbadać zbieżność wg rozkładu zmiennych losowych

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}},$$

dla $\lambda \rightarrow \infty$.

4. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależne. Pokazać, że jeśli $|X_j| \leq M$ oraz $\sum_j \mathbf{Var}(X_j) = \infty$ to

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{S_n}} \rightarrow_d \mathcal{N}(0, 1).$$

Rozkłady nieskończenie podzielne

1. Pokazać, że rozkład Poissona, złożony rozkład Poissona są rozkładami nieskończenie podzielnymi. Napisać reprezentacje Levy-Chinczyna dla ich funkcji charakterystycznych.
2. Udowodnić twierdzenie Kołmogorowa. Jeśli Z ma rozkład nieskończenie podzielny, oraz ma średnią zero i skończony drugi moment to dla jego funkcji charakterystycznej φ mamy

$$\log \varphi(t) = \int (e^{itx} - 1 - itx)x^{-2} \nu(dx),$$

nie zakłada się braku atomu w zerze, ale $\nu(\mathbb{R}) < \infty$. Czemu jest równe $\nu(\mathbb{R})$?

3. Bez wykorzystania z rozkładu Levy-Chinczyna pokazać, że jeśli rozkład ograniczonej zmiennej losowej jest nieskończenie podzielny, to ta zmienna jest stała.
4. Pokazać, że jeśli φ jest f. charakterystyczną rozkładu nieskończenie podzielnego, to $\psi = |\phi|^2$ też. Wykorzystać ten fakt do pokazania, że f. char. rozkładu podzielnego nie zeruje się. Nie korzystać z rozkładu Levy-Chinczyna.
5. Niech $S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n$, gdzie (X_j) są iid oraz Γ_p niezależna od (X_j) zmienna losowa o rozkładzie geometrycznym na $\{0, 1, \dots\}$. Pokazać, że Γ_p oraz S_{Γ_p} mają rozkład nieskończenie podzielny.
6. Pokazać, że rozkład gamma jest nieskończenie podzielny. Podać rozkład Levy-Chinczyna dla tego rozkładu. Wsk. Pokazać, tożsamość Frullaniego:

$$(1 - z/\alpha)^{-\beta} = \exp\left(-\int_0^\infty (1 - e^{-xz}) \frac{\beta}{x} e^{-\alpha x} dx\right).$$

W tym celu można pokazać wpierw, że dla f mającej ciągłą pochodną, $f(0), f(\infty)$ skończone mamy

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(\infty)) \log(b/a)$$

i następnie podstawić $f(x) = e^{-x}$, $a = \alpha > 0$ oraz $b = \alpha - z$ dla $z < 0$.

7. Przypomnieć sobie rozkład Levy-Chinczyna dla rozkładów stabilnych. Pokazać, że jeśli $\alpha < 1$ to można f. char. tego rozkładu przedstawić w postaci

$$\log \varphi(t) = iuc + m_1 \int_0^\infty (e^{iux} - 1) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + m_2 \int_{-\infty}^0 (e^{iux} - 1) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}.$$

8.

9. Niech X, Y będą niezależnymi z.l. o rozkładzie wykładniczym z gęstością $e^{-x}, x > 0$ oraz $Z = X - Y$. Pokazać, że f. char. Z jest

$$\frac{1}{1 + t^2} = \exp\left(\int_{-\infty}^\infty (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} |x| e^{-|x|} dx\right).$$

10. Przypuśćmy, że dla każdego a, b, a', b' istnieją a'', b'' ($a, a', a'' > 0$) takie, że

$$F(ax + b) * F(a'x + b') = F(a''x + b''),$$

gdzie F jest dystrybucją. Pokazać, że F ma rozkład stabilny.

11. Niech Y_{nk} mają rozkład Poisson($cn^\alpha/|k|^{1+\alpha}$), gdzie $c > 0$ i $0 < \alpha < 2$ oraz $Z_n = n^{-1} \sum_{k=-n^2}^{n^2} k Y_{nk}$. Pokazać, że Z_n zbiega wg rozkładu rozkładu symetrycznego α -stabilnego.