

ZADANIA DO WYKŁADU Z MATEMATYKI UBEZPIECZEŃ NA ŻYCIE

Bartłomiej Błaszczyszyn Tomasz Rolski

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

2005/2006

1 Zadania MUŻ; lista 1

1.1 W ciągu 5 lat dokonano wpłat/wypłat według tabeli:

rok	0	1	2	3	4	5
wpłata	2	0	-2	1	0	4

Obliczyć obecną wartość oraz zakumulowaną wartość tych wpłat gdy $i = 4\%$.

1.2 Obliczyć zakumulowane wartości po trzech latach dla przepływów kapitału A, B i C danych tabelą

wariant	0 rok	1 rok	2 rok
A	100	110	120
B	110	110	110
C	120	110	100

Który wariant jest najlepszy ? Przeprowadzić dowód, że obliczanie obecnej wartości i zakumulowanej wartości prowadzi do tego samego uporządkowania. Dla obliczeń przyjmij $i = 6\%$.

1.3 (i) Obliczyć obecną wartość następującego przepływu pieniądza: w latach parzystych (tj. $n = 0, 2, \dots$) wpłaty w wysokości 1, w latach nieparzystych (tj. $n = 1, 3, \dots$) wypłaty w wysokości $1/2$. Zapisz powyższą obecną wartość przy użyciu symboli renty oraz czynnika dyskonta.

(ii) Rozpatrzmy przepływ pieniądza z punktu (i), ale w okresie 2 lat tj. gdy $n = 0, 1, 2$. Obliczyć zakumulowaną wartość po dwóch latach.

1.4 Obliczyć efektywną stopę procentową jeśli stopa nominalna wynosi 5% oraz

- (i) kapitalizacja jest kwartalna,
- (ii) kapitalizacja jest półroczna,
- (iii) kapitalizacja jest ciągła.

1.5 Przypuśćmy, że składamy pieniądze w banku, gdy siła stopy procentowej $\delta = 0.05$. Po jakim okresie podwoimy nasz wkład? A jeśli siła stopy procentowej wynosi $\delta = 0.1$? Zakładamy model kapitalizacji ciągłej.

1.6 Przepływy pieniądza pewnej inwestycji są

0 rok	1 rok	2 rok	3 rok	4 rok
-500	-600	400	450	400

Czy ta inwestycja jest opłacalna dla kogoś kto może pożyczać i oszczędzać przy rocznej stopie procentowej $i = 6\%$. Przy jakiej stopie procentowej przestaje się opłacać?

1.7 [EdA5.04.97] Z tytułu renty bezterminowej dokonywane są następujące płatności:

- 1 na końcu pierwszego roku i później co 4 lata,
- 3 na końcu drugiego roku i później co 4 lata,
- 5 na końcu trzeciego roku i później co 4 lata,
- 7 na końcu czwartego roku i później co 4 lata.

Stopa procentowa wynosi $i = 5\%$. Znaleźć obecną wartość renty - podać najbliższą wartość. Odpowiedź: A: 70,25, B: 73,68, C: 76,58, D: 77,56, E: 80,40.

1.8 Bank proponuje następujący kontrakt. Osoba (55)-letnia wpłaca przez 10 lat składkę roczną Π z góry i następnie od 65 roku otrzymuje roczną rentę bezterminową w wysokości 1. Znaleźć Π , jeśli Π jest składką netto, tzn. obliczoną przy warunku, że obecna wartość całego przepływu wynosi 0. Przyjąć $i = 5\%$.

1.9 [EdA16.11.96] Przewidując stałą stopę inflacji 22 % ustalono, że jednorazowa spłata długu 100 jp po dwóch latach wyniesie 190 jp. Realna roczna stopa kosztu długu wyniosła: (i) 15.84%, jeśli poziom inflacji był zgodny z przewidywaniami; (ii) 10.30%, jeśli w pierwszym roku stopa inflacji wyniosła 22%, a w drugim 28%; (iii) 9.40%, jeśli średnia roczna stopa inflacji wyniosła 26%. Prawdziwe są jedynie A: (i)(ii), B: (ii)(iii),

C: (iii), D: (i)(ii)(iii), E: żadne.

Wsk.: w przypadku występowania inflacji wszelkie obliczenia należy prowadzić w tzw. *stałym pieniądzu*. Można więc na przykład kwotę wartość nominalnie R w chwili n wyrazić w „obecnym” pieniądzu posługując się zależnością

$$\tilde{R} = \frac{R}{(1 + i_{\text{infl}})^n},$$

gdzie i_{infl} jest stopą inflacji. Wówczas $\tilde{R}$ jest realną wartością w chwili n kwoty nominalnej R , wyrażoną w stałym pieniądzu. Inaczej: kwota R w chwili n ma siłę nabywczą równą $\tilde{R}$ obecnym jednostek pieniężnych.

Zadania teoretyczne

1.10 Udowodnić

$$1 - v^{1/m} = \frac{1}{m}d^{(m)}$$

oraz

$$\frac{i^{(m)}}{m} = \frac{1 - v^{1/m}}{v^{1/m}}.$$

1.11 Sprawdzić, że

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (1 + i)^{k/m} = \frac{i}{i^{(m)}}.$$

1.12 Przez *rentę pewną malejącą z góry* rozumiemy rentę w której wypłaty następują w odwrotnej kolejności niż przy rencie rosnącej, przez kolejnych n lat. To znaczy

Czas				Wypłata
0	$1/m$	$\dots$	$1 - 1/m$	n/m
1	$1 + 1/m$	$\dots$	$2 - 1/m$	$(n - 1)/m$
2	$2 + 1/m$	$\dots$	$3 - 1/m$	$(n - 2)/m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	$n - 1 + 1/m$	$\dots$	$n - 1/m$	$1/m$
n				0

(1.1)

Wtedy obecna wartość renty malejącej oznaczamy przez $(D^{(n)}\ddot{a})_{\overline{m}|}$. Pokazać, że

$$(I\ddot{a})_{\overline{m}|}^{(n)} + (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{m}|} = (n + 1) \ddot{a}_{\overline{m}|}^{(m)}. \quad (1.2)$$

1.13 Sprawdzić, że

$$(I^{(m)}a)_{\infty}^{(=)} v^{1/m} (I\ddot{a})_{\infty}^{(m)} = \frac{v^{1/m}}{d^{(m)}} \frac{1}{d} = \frac{1}{i^{(m)}} \frac{1}{d} . \quad (1.3)$$

1.14 Wyprowadzić

$$(I\ddot{a})_{\overline{m}}^{(m)} = (I\ddot{a})_{\infty}^{(m)} - v^n (I\ddot{a})_{\infty}^{(m)} - v^n n \ddot{a}_{\infty}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m}} - nv^n}{d^{(m)}} . \quad (1.4)$$

$$(Ia)_{\overline{m}}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m}} - nv^n}{i^{(m)}} . \quad (1.5)$$

1.15 Pokazać, że

$$\frac{1}{a_{\overline{m}}} = \frac{1}{s_{\overline{m}}} + i .$$

1.16 Wyprowadzić wzór na $\ddot{a}_{\overline{m}}^{(m)}$ oraz $\ddot{s}_{\overline{m}}^{(m)}$.

1.17 Obliczyć bieżącą wartość renty pewnej (bezterminowej) z góry i z dołu oraz renty pewnej (bezterminowej) ciągłej.

1.18 Wyprowadzić wzór na obecną, bieżącą i zakumulowaną wartość ciągłego przepływu pieniądza $c(t)$. Czy ma sens mówić o zakumulowanej wartości w przypadku nieskończonego horyzontu czasowego.

1.19 Udowodnić, że ciąg zakumulowanych wartości S_k ($k = 0, \dots, n-1$) dany wzorem

$$S_n = \sum_{j=0}^n C_j (1+i)^{n-j}$$

spełnia tzw. prospektywną zależność

$$S_{k+1} = (1+i)S_k + C_{k+1} ,$$

podczas gdy ciąg rezerw U_k ($k = 0, \dots, n-1$) dany wzorem

$$U_k = \sum_{j=k+1}^n C_j v^{j-k}$$

spełnia tzw. retrospektywną zależność

$$U_k = v(U_{k+1} + C_{k+1}) .$$

Zadania dodatkowe

1.20 [EdA16.11.96] Przez $i(k)$, $i(k) > 0$, oznaczono roczną nominalną stopę procentową z k -krotną kapitalizacją odsetek w ciągu roku, przez i_{ef} oznaczono odpowiadającą jej stopę efektywną, zaś przez $i_c(k)$ równoważną stopę oprocentowania ciągłego (siłę stopy procentowej).

(i) Jeśli $k > 1$, to $i(k) < i_{\text{ef}}(k)$.

(ii) Jeśli $k_1 > k_2$ oraz $i(k_1) = i(k_2)$, to $i_c(k_1) < i_c(k_2)$.

(iii) Jeśli $i_{\text{ef}}(k_1) = i_{\text{ef}}(k_2)$, to $i_c(k_1) = i_c(k_2)$.

(iv) Jeśli $i(k) = i_{\text{ef}}(k)$, to $i(k) = i_{\text{ef}}(k) = i_c(k)$.

Prawdziwe są jedynie: A: (i), B: (i)(ii), C: (i)(iii), D: żadne, E: wszystkie.

1.21 [EdA5.04.97] Dokonujemy na przemian w odstępach 2 tygodniowych wpłat i wypłat w wysokości 1000 do/z funduszu (pierwszą operacją jest w chwili obecnej wpłata). Po 2 latach skumulowana wartość kapitału zgromadzonego w funduszu wynosi 1051 (uwzględniamy ostatnią wpłatę na koniec 2-go roku). Znaleźć roczną efektywną stopę oprocentowania funduszu. Podać najbliższą wartość. (1 rok=12 miesięcy=48 tygodni). Odpowiedź: A: odpowiedź nie jest jednoznaczna, B: 3%, C: 4%, D: 5%, E: 6%. [Wsk. Napisać OW strumienia wpłat/wypłat. Przyrównać do OW zgromadzonego kapitału tj. do $v^2 1051$. Równanie albo rozwiązać numerycznie, albo przez odgadnięcie sprawdzić, że poprawna odpowiedź jest D.]

1.22 [EdA5.04.97] Inwestujemy kapitał równy 1 w funduszu oprocentowanym w sposób ciągły z roczną intensywnością oprocentowania w n -tym roku równą $n\delta$. Znaleźć zakumulowaną wartość kapitału na koniec 3-go roku.

1.23 [EdA5.04.97] Podaj które z poniższych tożsamości są prawdziwe:

(i)

$$\frac{1}{s_{\overline{1}|}} + \frac{2}{s_{\overline{2}|}} + \frac{3}{s_{\overline{3}|}} + 3i = \frac{1}{a_{\overline{1}|}} + \frac{2}{a_{\overline{2}|}} + \frac{3}{a_{\overline{3}|}}.$$

[Wsk. Nie. Skorzystać z zadania 1.15.]

(ii)

$$\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right) \left(1 - \frac{d^{(12)}}{12}\right) = (1 + i)^{1/6}.$$

[Wsk. Nie. Lewa strona równa się 1.]

(iii)

$$108 + i(Is)_{\overline{107}} = s_{\overline{108}}.$$

[Wsk. Tak. Przenieść 108 na prawą stronę i podzielić stronami przez i . Następnie rozpisać renty w jawnej postaci.]

(iv)

$$\frac{s_{\overline{2n}}}{s_{\overline{n}}} - \frac{s_{\overline{3n}}}{s_{\overline{2n}}} = 1 - \frac{s_{\overline{n}}}{s_{\overline{2n}}}.$$

[Wsk. Nie. Dla $i = 0$ mamy $s_{\overline{n}} = n$.]

Odpowiedź: A: tylko (i)(ii), B: tylko (iv), C: tylko (iii), D: tylko (ii),(iv),
E: żadna spośród odpowiedzi A,B,C,D nie jest prawdziwa.

- 1.24 Udowodnić, że jeśli siła stopy procentowej $\delta(t)$ jest funkcją czasu oraz intensywność wypłaty renty pewnej w chwili t wynosi $c(t)$, to obecna wartość tej renty wynosi

$$\int_0^\infty c(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} dt.$$

2 Zadania MUŻ; lista 2

W zadaniach 2.1–2.21 przyjąć, jeśli potrzeba, że spełniona jest odpowiednio hipoteza HA lub HJP.

2.1 Przyjąć HU i obliczyć ${}_{10|1.5}q_{30}$ wiedząc, że $l_{30} = 523$, $l_{40} = 436$, $l_{41} = 427$, $l_{42} = 417$ (dane pochodzą z tablic Halleya).

2.2 Przyszły czas życia osoby nowourodzonej jest wykładniczy z parametrem 0.01. Obliczyć

- (i) prawdopodobieństwo śmierci nie później niż w 45 roku życia,
- (ii) prawdopodobieństwo dożycia 80 lat,
- (iii) prawdopodobieństwo śmierci między 45 a 80 rokiem życia.

Użyć oznaczeń aktuarialnych.

2.3 Wiedząc, że zachodzi HCFM znaleźć korzystając z TTŻ-PL97k

- (i) ${}_{0.5}q_{56}$,
- (ii) $\mu_{58.75}$.

2.4 Na podstawie TTŻ-PL97m obliczyć ${}_{0.5}p_{23}$ i ${}_{15|13}q_{40}$ (przyjąć HU).

2.5 Obliczyć

- d_{20} , p_{20} i q_{20} ,
- prawdopodobieństwo, że (20)-latek umrze pomiędzy 30 i 50-tym rokiem życia
jeśli przyszły czas życia podlega:
TTŻ-PL97m,
TTŻ-PL97k,
TTŻ-HALLEY.

2.6 Obliczyć p_{10} , p_{20} , p_{30} , p_{40} przyjmując, że rozkład trwania życia osoby nowourodzonej podlega prawu Gompertza z parametrami $B = 0.00026155$ i $c = 1.07826$. Porównać z tablicami TTŻ-PL97m.

- 2.7 Oszacować e_0 jeśli czas życia jest opisany przez TTŻ Halley'a. Jaki jest możliwy błąd spowodowany urwaniem się tablic na $x = 83$, jeśli przyjmujemy, że $\omega = 100$?
- 2.8 Zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \geq 50$ oraz $\dot{e}_{50} = 40$ obliczyć p_{60} .
- 2.9 Znaleźć $\mu_{65.25}$ przy założeniu:
- HU,
 - HCFM,
 - HB,
- jeśli rozkład czasu obciętego czasu życia jest dany przez TTŻ-PL97k.
- 2.10 Znajdź l_x jeśli $l_0 = 1000$ i:
- (i) $\mu_t = at$,
 - (ii) $\mu_t = \frac{1}{(a_0 + a_1 t)(b_0 + b_1 t)}$.
- 2.11 Wyznacz ${}_{17}p_{19}$ i ${}_{15|13}q_{36}$, jeśli $s(x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}$, dla $0 \leq x \leq 100$.
- 2.12 Obliczyć prawdopodobieństwo, że (70)-latek umrze pomiędzy 70.5 i 71.5-tym rokiem życia jeśli $q_{70} = 0.04$, $q_{71} = 0.05$ oraz zachodzi
- (i) HU,
 - (ii) HB.
- 2.13 Obliczyć e_x oraz $\dot{e}_x$ gdy
- (i) T_0 ma rozkład wykładniczy z parametrem μ ,
 - (ii) T_0 spełnia prawo de Moivre'a.
- 2.14 Obliczyć ${}_{0.5}q_{56}$, ${}_{2}p_{56.5}$ ${}_{2|1}q_{56.5}$ zakładając, że prawo życia dane jest z TTŻ-PL97k oraz
- (i) HU,
 - (ii) HCFM.

Zaobserwować niewielkie różnice wyników obliczonych przy różnych hipotezach.

2.15 Niech $\mu_{20} = 0.0056044$ oraz $\mu_{30} = 0.0132678$ i T_0 spełnia prawo Gomperta. Obliczyć ${}_{10}p_{25}$.

2.16 Korzystając z tablic TTŻ-PL97m podaj oszacowanie na $l_{58}, l_{58\frac{1}{3}}, l_{58\frac{2}{3}}, {}_{\frac{1}{3}}q_{58}, {}_{\frac{2}{3}}q_{58}$ oraz ${}_{\frac{2}{3}}d_{58}$. Uzasadnij z jakich hipotez korzystałeś.

2.17 Uzasadnij dlaczego można używać przybliżenia $\mu_x \approx q_x$. Założyć HCFM.

2.18 Uzupełnij następującą tablicę trwania życia przy założeniu HU wiedząc, że $p_{20} = 0.99969$, $q_{21} = 0.00032$:

x	l_x
20	98597
20.5	
21	
21.5	
22	

2.19 Na podstawie tabelki i przy założeniu HU obliczyć ${}_5p_{25}$ i ${}_{5.3}p_{24}$

x	q_x
24	0.00133
25	0.00132
26	0.00131
27	0.00130
28	0.00130
29	0.00131
30	0.00133

2.20 Obliczyć e_x° dla $x = 107$; skorzystać z kolumny podającej l_x z tablicy TTŻ-PL97m.

2.21 Korzystając z tablic TTŻ-PL97k oraz TTŻ-PL97m obliczyć ${}_{0.5}q_{55}$ oraz ${}_{2.5}q_{50}$.

2.22 Na podstawie tablicy TTŻ-PL97m zaprojektuj następujące tablice kwartalne i wyjaśnij metodę.

wiek x	liczba dożywających ℓ_x	liczba zmarłych $\frac{1}{4}d_x$
10	98624	
$10\frac{1}{4}$		
$10\frac{1}{2}$		
$10\frac{3}{4}$		
11		*

(Przez ${}_td_x$ oznaczamy liczbę x -latków, którzy zmarli w przeciągu t lat.)

2.23 Medianą przyszłego czasu życia (x)-latka nazywamy rozwiązanie równania ${}_tq_x = 0.5$. Pokazać, że medianą jest rozwiązanie równania $l_{x+t} = 0.5l_x$. Przedyskutować warunki jednoznaczności rozwiązania. Przy założeniach HU, HCFM i HB odpowiednio obliczyć medianę przyszłego czasu życia (30)-latka przy użyciu TTŻ-PL97m.

2.24 Przy założeniu hipotezy HU napisać wzór na $\mu_{40.5}$ w terminach l_{40}, l_{41} .

2.25 Rodzice (25) i (35) wykupili dziecku (0) polisę posagową, dającą dziecku w wieku 20 lat wypłatę (jednostki) tylko wtedy, gdy będzie on zupełną sierotą. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że dojdzie do wypłaty posagu, jeśli natężenie zgonów jest w tej populacji stałe i wynosi $\mu > 0$.

Zadania teoretyczne

2.26 Udowodnić, że $f_x(t) = {}_tp_x \mu_{[x]+t}$.

2.27 Pokazać, że przy założeniu stałego natężenia zgonów $\mu_t = \mu$ ($t \geq 0$) i HJP mamy $q_x = 1 - \exp(-\mu)$.

2.28 Udowodnić, że przy założeniu HJP ${}_{x+t}p_0 = {}_xp_0 {}_tp_x$.

2.29 Udowodnić, że $d({}_tp_x)/dx = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$ (przyjąć HJP).

2.30 Niech T_0 spełnia prawo de Moivre'a. Wyprowadzić wzór na ${}_t p_x$ oraz μ_{x+t} (HJP).

2.31 Wyprowadzić wzory na prawdopodobieństwo przeżycia $s(x)$ oraz ${}_t p_x$ dla praw Gompertza, Makehama i Weibulla.

2.32 Pokazać, że przy HA, dla całkowitych, nieujemnych k, n, x

$${}_{k+n} p_x = {}_k p_x \cdot {}_n p_{x+k} = {}_n p_x \cdot {}_k p_{x+n}.$$

2.33 Pokazać, że przy HA, dla każdego $n = 1, 2, \dots$

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+n-1}.$$

2.34 Zdefiniujmy

$$S^{(m)} = \frac{1}{m} \lfloor mS + 1 \rfloor, \quad (2.1)$$

czyli zaokrąglenie S do najmniejszej większej wielokrotności $1/m$. Zmienna $S^{(m)}$ przyjmuje zatem wartości $1/m, 2/m, \dots, 1$. Pokazać, że przy HU zmienne K i $S^{(m)}$ są niezależne oraz $S^{(m)}$ ma dyskretny jednostajny rozkład

$$\Pr(S^{(m)} = k/m) = 1/m \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

2.35 Pokazać, że S_x ma rozkład ciągły z gęstością $\sum_{n=0}^{\infty} f_x(t+n)$. Znaleźć rozkład S_x gdy T_x ma: (i) rozkład wykładniczy z parametrem λ_x (ii) rozkład jednostajny na $[0, \omega_x]$. (iii) Czy jest możliwe aby S miał rozkład jednostajny na $[0, 1]$?

2.36 Udowodnić, przy założeniu HU

$${}_v q_{[x]+u} = \frac{v q_x}{1 - u q_x}, \quad (2.3)$$

$${}_u p_x \mu_{[x]+u} = q_x, \quad (2.4)$$

$${}_{k+u} p_x q_{[x]+k+u} = (1-u) {}_k p_x q_{[x]+k} + u {}_{k+1} p_x q_{[x]+k+1}. \quad (2.5)$$

dla $x = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq v, u \leq 1, v + u \leq 1$. (Wskazówka: dotyczy (2.5); lewa strona wyraża $\Pr(k+u < T_x \leq k+u+1)$, składniki prawej strony zinterpretować jako $\Pr(k+u < T_x \leq k+1)$, $\Pr(k+1 < T_x \leq k+u+1)$.)

2.37 Niech $x \in \mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że

(i) przy założeniu HU

$${}_{n+u}p_x = {}_{n+1}p_x \frac{1 - uq_{[x]+n}}{1 - q_{[x]+n}}, \quad (2.6)$$

(ii) przy założeniu HCFM

$${}_{n+u}p_x = {}_{n+1}p_x (p_{[x]+n})^{u-1}, \quad (2.7)$$

2.38 Wprowadza się *centralne natężenie śmiertelności* lub *roczny współczynnik natężenia zgonów dla wieku x* wzorem

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{d_x}{L_x},$$

gdzie $L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$. Udowodnić, że przy HU

$$m_x = \frac{q_x}{1 - q_x/2}.$$

Zadania dodatkowe

2.39 [EdA16.11.96] W populacji A natężenie zgonów dane jest wzorem

$$\mu_x^A = \frac{1}{100 - x} \quad \text{dla } x < 100,$$

a w populacji B wzorem

$$\mu_x^B = \frac{n}{100 - x} \quad \text{dla } x < 100,$$

gdzie n jest parametrem. Wiadomo ponadto, że osobniki z populacji A mają przed sobą przeciętnie o 10% więcej życia, niż osobniki z B w tym samym wieku. [Odp. (A) $n = 1.1$, (B) $n = 1.15$, (C) $n = 1.2$, (D) $n = 1.21$, (E) żadna z powyższych.]

2.40 [EdA21.07.96] Natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_{x+t} = be^{x+t}$, gdzie parametr $b > 0$. Dla jakiej wartości parametru b prawdopodobieństwo tego, że 30-latek przeżyje następnych 10 lat, po czym umrze w ciągu kolejnych 5 lat, wynosi r , oraz prawdopodobieństwo ${}_{10}p_{30} = 5r$. [Odp. (A) $\log 5 / (\log 2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$, (B) $\log 5 / (2 \log 2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$, (C) $(\log 5 - \log 2) / (2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$, (D) $\log 5 / (\log 2 \cdot (\exp(45) - \exp(40)))$ (E) $(\log 5 - \log 2) / 2 \cdot (\exp(45) - \exp(40))$].

- 2.41 [EdA5.04.97] Natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_x = x/100$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba w wieku 15 lat umrze między trzydziestym piątym a czterdziestym piątym roku życia. [Odp. (A) $(\exp(4) - 1)/\exp(8)$, (B) $(\exp(5) - 1)/\exp(8)$, (C) $(\exp(6) - 1)/\exp(8)$, (D) $(\exp(4) - 1)/\exp(9)$, (E) $(\exp(5) - 1)/\exp(9)$.]
- 2.42 [EdA05.12.1998] W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym ω . O wieku x wiadomo, że osoby w tym wieku umierają w ciągu doby dwa razy rzadziej niż osoby dwukrotnie starsze. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x dożyje wieku $2x$. [Odp. (A) $1/4$, (B) $1/3$, (C) $1/2$, (D) $2/3$, (E) $3/4$.]
- 2.43 [EdA5.04.97] Jaka jest oczekiwana liczba osób z populacji miliona 35-latków, które umrą po ukończeniu 36 lat i 4 miesięcy życia i przed ukończeniem 37 lat i 8 miesięcy? Przyjmujemy założenie Balducciego dotyczące umieralności w okresach ułamkowych. Dane są również:

$$q_{35} = 3 \cdot 10^{-3} \quad q_{36} = 6 \cdot 10^{-3}, \quad q_{37} = 9 \cdot 10^{-3}.$$

Przyjmij, że 1 miesiąc to $1/12$ roku. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 9934, (B) 9944, (C) 9954, (D) 9966, (E) 9976.]

- 2.44 [EdA9.12.2000] Który z poniższych wzorów na $E(T(x))$ (x – całkowity wiek) jest prawdziwy przy założeniu o stałym natężeniu wymierania osób z danego rocznika ($\mu_{x+k+0.5}$ oznacza poziom natężenia wymierania w przedziale wiekowym $(x+k, x+k+1)$)?

(A)

$$E(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k p_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}} + \frac{1}{2},$$

(B)

$$E(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k p_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}} - \frac{1}{2},$$

(C)

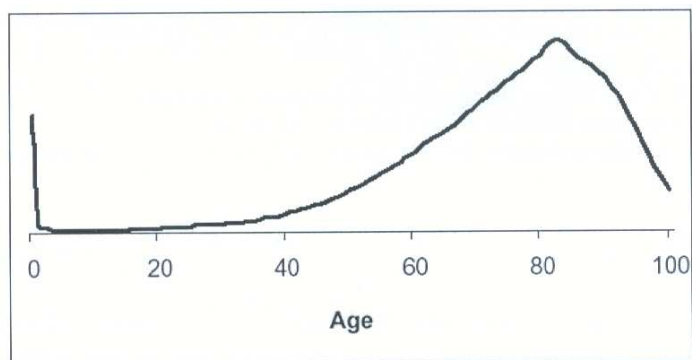
$$E(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k p_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}} + \log 2,$$

(D)

$$E(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k p_x q_{x+k}}{\mu_{x+k+0.5}}.$$

(E) Żaden z wzorów nie jest prawdziwy.

- 2.45 [EdA26.10.96] Wyznacz prawdopodobieństwo przeżycia przez osobę 55 letnią co najmniej 10 lat, jeśli analogiczne prawdopodobieństwo dla osoby 25 letniej wynosi 0.8 oraz natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_x = kx$ dla $x > 0$. [Odp. (A) 0.40, (B) 0.64, (C) 0.80, (D) 0.81, (E) 0.90.]
- 2.46 [SAE05.2001/14]¹ Wykres na rys. [????] jest związany z ludzką śmiertelnością. Którą z następujących funkcji od wieku x najprawdopodobniej prezentuje ? (A) μ_x , (B) $l_x \mu_x$, (C) $l_x p_x$, (D) l_x , (E) l_x^2 .



Rysunek 2.1:

- 2.47 [SAE05.2001/27] Aktuariusz modeluje śmiertelność grupy 1000 osób, każdej w wieku 95 lat, w horyzoncie 3 lat. Korzystając z założenia HU częściowo wypełniona tablica śmiertelność wygląda następująco; patrz tablica 2.47. Jak zwykle liczy się $l_{95+k} = 1000 {}_k p_{95}$, dla $k = 1, 2, 3$. Połówkowe miejsca wypełnia się korzystając z hipotezy HU. Uzupełnij na tej podstawie brakujące miejsca a następnie oblicz oczekiwaną liczbę przeżywających wiek 97.5, przy założeniu, że p_k dla $k = 1, 2, 3$ jak wyżej, ale przy założeniu hipotezy HCFM dla miejsc połówkowych. (A) 270, (B) 273, (C) 276, (D) 279, (E) 282.

¹SAE oznacza zadanie egzaminacyjne Society of Actuaries; 05.2001 oznacza datę natomiast 14 numer zadania.

x	l_x
95	1000
95.5	800
96	600
96.5	480
97	—
97.5	288
98	—

- 2.48 [SAE05.2001/28] Zakładamy o populacji, że
 (i) każda osoba ma stałą natężenie śmiertelności,
 (ii) indywidualna wielkość natężenia śmiertelności jest losowa o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba wylosowana z populacji umrze w przeciągu najbliższego roku.
- 2.49 [SAE11.2002/35] Dane są $R = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}}$ i $R = 1 - e^{-\int_0^1 (\mu_{x+t} + k)}$. Wiedząc, że $S = 0.75R$ obliczyć k . (A) $\log \frac{1-q_x}{1-0.75q_x}$, (B) $\log \frac{1-0.75q_x}{1-p_x}$, (C) $\log \frac{1-0.75p_x}{1-p_x}$, (D) $\log \frac{1-p_x}{1-0.75p_x}$, (E) $\log \frac{1-0.75p_x}{1-q_x}$.

3 Zadania MUŻ; lista 3

- 3.1 Przyjmując TTŻ-PL97m oraz wiedząc, że $A_{40:\overline{4}} = 0.8$ oblicz obowiązującą stopę procentową.
- 3.2 Obliczyć drugi moment obecnej wartości ubezpieczenia Z terminowego na 2 lata dla (65)-latka na sumę ubezpieczenia 10 gdy śmiertelność: TTŻ-PL97m,
stopa procentowa: $i = 5\%$.
- 3.3 Obliczyć $A_{40:\overline{3}}$ zakładając TTŻ-PL97m oraz przy
- (i) $i = 4\%$,
 - (ii) $i = 12\%$.
- Przeprowadzić powyższe obliczenia również zakładając TTŻ-HALLEY.
- 3.4 Obliczyć wariancję obecnej wartości ubezpieczenia terminowego na 3 lata na sumę ubezpieczenia 20 000, dla (40)-latka, zakładając TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.
- 3.5 Jeśli $l_x = 100 - x$, dla $0 \leq x \leq 100$ oraz $i = 0.05$ oblicz $(IA)_{40}$. Zakładamy potrzebne hipotezy.
- 3.6 Zakładając prawo de Moivre'a przeżycie dla (x)-latka z $\omega + x = 4$, obliczyć JSN dla ubezpieczenia na dożycie $\bar{A}_{x:\overline{2}}$. Przeprowadzić obliczenia dla $\delta = 0.06$.
- 3.7 Pokazać, że ${}^2\bar{A}_x$ równa się $\bar{A}_x$ obliczonej przy stopie procentowej $i^2 + 2i$.
- 3.8 Obliczyć $A_{30:\overline{10}}$ przy $i = 4\%$ gdy
- (i) przyszły czas życia podlega TTŻ-PL97m,
 - (ii) przyszły czas życia podlega TTŻ-HALLEY.
- 3.9 Zapisać w terminach funkcji komutacyjnych JSN dla polisy dla (40)-latka z której się wypłaca $2C$ na koniec roku śmierci do wieku 65 lat, natomiast C gdy śmierć nastąpiła po 65 roku życia.

3.10 Jeśli przyszedł czas życia spełnia prawo Makehama, to

$$\bar{A}_x = A\bar{a}_{\overline{x}|} + (\mu_x - A)\bar{a}'_{\overline{x}|}$$

gdzie A jest stałą z wzoru na prawo Makehama oraz $\bar{a}'_{\overline{x}|}$ obliczone jest przy specjalnej stopie procentowej.

3.11 Rozpatrzmy następujące ubezpieczenie rosnące, w którym suma ubezpieczenia rośnie kolejno w przedziałach długości $1/m$ o $1/m$ począwszy od $1/m$ w przedziale $[0, 1/m)$. Wypłata jest na koniec roku śmierci. Pokazać, że JSN dla tego ubezpieczenia, przy założeniu HU wynosi

$$(IA)_x - \frac{m-1}{2m}A_x.$$

3.12 Zakładając TTŻ-PL97k znaleźć aproksymacje dla $\bar{A}_{30}$ oraz $\bar{A}_{1\over 40:\overline{10}|}$, przy stopie procentową $i = 4\%$.

3.13 [Egz98] Portfel składa się z 1000 polis na życie 40-latków, z których wypłaca się jednostkę. Jaki musi być zabezpieczony fundusz w chwili $t = 0$ aby były możliwe wypłaty w najbliższym roku z prawdopodobieństwem .95; w ciągu roku nie wpływają składki i nie bierzemy pod uwagę stopy procentowej. Skorzystaj z tablic TTŻ-PL97m.

3.14 Rozpatrzmy polisę dla osoby nowourodzonej na życie, płatną na koniec roku śmierci według skali:

wiek	korzyść
0	1000
1	2000
2	4000
3	6000
4	8000
5 – 20	10000
powyżej 21	50 000

Napisać JSN w terminach funkcji komutacyjnych.

- 3.15 Produkt jest sprzedawany z 5-letnią gwarancją, obiecującą zwrot $(100 - 20x)\%$ ceny produktu, jeśli się on popsuje w ciągu x lat. Z doświadczenia wiadomo, że produkt uszkodza się w pierwszym roku z prawdopodobieństwem 0.2, w drugim, trzecim i czwartym roku z prawdopodobieństwem 0.1 i w piątym roku z prawdopodobieństwem 0.2. Ponadto zakłada się jednostajny moment uszkodzenia w przeciągu roku. Obliczyć jaką część ceny produktu stanowi cena gwarancji, która jest wyliczona według reguły JSN przy $i = 0.10$.
- 3.16 30-latek kupuje ubezpieczenie emerytalne płacać składkę 1000 na początek każdego roku życia, do ukończenia 60 roku. Ubezpieczenie to gwarantuje wypłatę emerytury, której obecna wartość w momencie ukończenia 60 lat wynosi 100000, pod warunkiem, że ubezpieczony dożyje do 60 roku. Jeżeli natomiast umrze nie osiągnawszy 60 lat życia, to ubezpieczyciel zwróci całą wpłaconą składkę na koniec roku śmierci, bez naliczania procentów. Jaka jest wartość oczekiwana obecnej wartości sumy wypłat tego ubezpieczenia. Przeprowadzić obliczenia zakładając TTŻ-PL97k oraz $i = 4\%$.
- 3.17 Rozpatrujemy 100 członków klubu w wieku (x) , którzy wpłacają kwotę w zł na fundusz. Firma jest zobowiązana do wypłaty 1000 zł w momencie śmierci każdego z członków. Obliczyć w , jeśli firma powinna się wywiązać z obowiązku z prawdopodobieństwem 0.95, i jeśli $\bar{A}_x = 0.06$ i ${}^2\bar{A}_x = 0.01$. Przyjmujemy, że przyszłe czasy życia członków są niezależne.
- 3.18 Obliczyć $\bar{A}_x$ jeśli $\mu_x = \mu$ dla każdego $x > 0$. Wykonać obliczenia dla $\mu = 1/100$ i przy rocznej stopie procentowej $i = 11\%$.
- 3.19 Oblicz obecną wartość aktuariálną ² 1000 do wypłacenia 50-latkowi po 15 latach. Obliczenia wykonaj dla $i = 6\%$ oraz tablic TTŻ-PL97m.
- 3.20 (x) -latek zawarł ubezpieczenie na całe życie płatne na koniec roku śmierci i z sumą ubezpieczenia według tabeli przedstawionej poniżej.

²t.j. wartość oczekiwaną obecnej wartości

Rok śmierci k	Suma ubezpieczenia b_k
1	10
2	10
3	9
4	9
5	9
6	8
7	8
8	8
9	8
10	7
każdy następny rok	7

Podaj wzór na jednorazową składkę netto tej polisy w terminach funkcji komutacyjnych. Przeprowadź też obliczenia dla $x = 33$ jeśli rozkład przeżycia jest zadany przez TTŻ-PL97k.

3.21 Dla ciągłego ubezpieczenia na całe życie $E[v^{2T}] = 0.25$. Załóżmy, że natężenie śmiertelności i stopa procentowa są stałe. Oblicz $E[v^T]$.

3.22 Została wypisana polisa dla (x) -latka:

- jeśli ubezpieczony umrze w przeciągu 10 lat, ubezpieczyciel wypłaci 100 000 zł na koniec roku śmierci,
- jeśli ubezpieczony przeżyje 10 lat, ubezpieczyciel wypłaci 50 000 zł na koniec roku śmierci.

(i) Pokazać, że jednorazowa składka netto dla tego ubezpieczenia jest

$$50000 \times (A_x + A_{1:\overline{10}|}) .$$

(ii) Obliczyć wzór na wariancję obecnej wartości tego ubezpieczenia. Przeprowadzić obliczenia z $x = 40$ korzystając z tablic TTŻ-PL97m.

Zadania teoretyczne

3.23 Udowodnić, że jeśli funkcja korzyści $b(t)$ przyjmuje wartości tylko w zbiorze $\{0, 1\}$, to n -ty moment wartości obecnej sumy ubezpieczenia

$E[Z^n]$ jest równy jednorazowej składce netto tego ubezpieczenia $A = E[Z]$ wyliczonej przy danym czynniku dyskonta v podniesionym do n -tej potęgi, albo też przy danym natężeniu oprocentowania pomnożonym przez n ; tj.

$$E[Z^n] = {}^nA,$$

gdzie ${}^nA @ v = A @ v^n$ lub ${}^nA @ \delta = A @ n\delta$.

3.24 Pokazać

$${}_m|\bar{A}_x = {}_m p_x v^m \bar{A}_{x+m}.$$

3.25 Pokazać przy założeniu hipotezy HJP, że

$$\begin{aligned} (\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^\infty \int_s^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt ds \\ &= \int_0^\infty {}_s|\bar{A}_x ds. \end{aligned}$$

3.26 Udowodnić, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (I^{(m)}\bar{A})_x = (\bar{I}\bar{A})_x.$$

3.27 Pokazać, że ${}^2\bar{A}_x$ równa się wartości $\bar{A}_x$ obliczonej przy stopie procentowej $i^2 + 2i$.

3.28 Udowodnić

$$\text{Var } Z = \text{Var } Z_1 + \text{Var } Z_2 - 2A_{1 \atop x:\overline{n}} A_{\frac{1}{2} \atop x:\overline{n}}.$$

3.29 Udowodnić

$${}_m|A_x = {}_m p_x v^m A_{[x]+m}$$

3.30 Udowodnić

$$\begin{aligned} (IA)_x &= \sum_{m=0}^{\infty} {}_m|A_x, \\ (IA)_{\frac{1}{2} \atop x:\overline{n}} &= \sum_{m=0}^n {}_m|A_x - n {}_x|A_n \\ &= nA_{1 \atop x:\overline{n}} - \sum_{k=1}^{n-1} A_{1 \atop x:\overline{k}}. \end{aligned}$$

3.31 Udowodnić

$$(IA)_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} (IA)_x.$$

oraz

$$\begin{aligned} (DA)_{x:\overline{m}}^1 &= E[(n-K)v^{K+1}1(K < n)] \\ &= (n+1)A_{x:\overline{m}}^1 - (IA)_{x:\overline{m}}^1. \end{aligned}$$

3.32

$$\bar{A}_{x:\overline{m}}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{m}}^1, \quad (3.1)$$

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} \left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} \right) A_x \right], \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

3.33 Udowodnić

$$\bar{A}_x \approx \sqrt{(1+i)} A_x. \quad (3.4)$$

oraz

$$\bar{A}_{x:\overline{m}}^1 \approx \sqrt{(1+i)} A_{x:\overline{m}}^1, \quad (3.5)$$

$$\bar{A}_{x:\overline{m}} \approx \sqrt{(1+i)} A_{x:\overline{m}}^1 + A_{x:\overline{m}}^1. \quad (3.6)$$

3.34 Udowodnić, przyjmując hipotezę HA,

$${}^2A_x = v^2 q_x + v^2 p_x {}^2A_{x+1}.$$

3.35 Udowodnić, przyjmując hipotezę HA, wzór rekurencyjny:

$$(IA)_x = v q_x + v \cdot p_x (A_{x+1} + (IA)_{x+1}).$$

3.36 Pokazać, przy założeniu hipotezy HCFM

$$\bar{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \mu_{[x]+k} \frac{i + q_{[x]+k}}{\delta + \mu_{[x]+k}},$$

gdzie $\mu_{[x]+k} = -\log p_{[x]+k}$.

Zadania dodatkowe

3.37 Udowodnić, przy HU, że dla $0 \leq u < 1$

$$A_{[x]+u} = \frac{1-u}{1-uq_x} A_x + \frac{up_x}{1-uq_x} A_{[x]+1}.$$

(**Wsk.:** Przyjąć jako definicję $A_{[x]+u} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{[x]+u} q_{[x]+k+u}$. Por. też zad. 3.38.)

3.38 Udowodnić następującą zależność uogólniającą tezę zadania 3.37: przy HU, dla dowolnej funkcji h i $0 \leq u < 1$, warunkowa wartość oczekiwana jest równa

$$\begin{aligned} E[h(\lfloor T_x - u \rfloor) | T_x \geq u] &= \frac{E[h(\lfloor T_x - u \rfloor) 1(T_x \geq u)]}{\Pr(T_x \geq u)} \\ &= \frac{1-u}{1-uq_x} E[h(K_x)] + \frac{up_x}{1-uq_x} E[h(K_{[x]+1})], \end{aligned}$$

gdzie $E[h(K_{[x]+1})] = E[h(K_x - 1) 1(K_x \geq 1)]$. W tym celu zauważyć, że

$$\lfloor T_x - u \rfloor = \begin{cases} K_x & \text{gd}y \ S_x \geq u, \\ K_x - 1 & \text{gd}y \ S_x < u. \end{cases}$$

3.39 Udowodnić

$$A_{1_{x:\overline{m}}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \quad (3.7)$$

$${}_n | A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}, \quad (3.8)$$

$$A_{x:\overline{m}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \quad (3.9)$$

3.40 [EdA26.10.96] Na życie pięćdziesięciolatka wystawiono bezterminową polisę dającą wypłatę 1 na koniec roku, w którym nastąpi śmierć. Wyznacz jednorazową składkę netto (podaj najbliższą wartość), jeśli wiadomo że: (i) analogiczna składka dla osoby o rok młodszej wynosi 0.6, (ii) stopa procentowa $i = 10\%$, (iii) dane są wartości funkcji komutacyjnych $D_{49} = 850$ oraz $D_{50} = 765$. [Odp. (A) 0.651, (B) 0.654, (C) 0.657, (D) 0.660, (E) 0.663.]

3.41 [EdA18.01.97] Rozważmy dwa rodzaje polis:

- polisa I, wystawiona na 40-latkę, jest 9-letnim ubezpieczeniem terminowym na życie ze świadczeniem rosnącym z roku na rok o 1000 zł, począwszy od sumy ubezpieczenia 1000 w pierwszym roku. Świadczenia są wypłacane na koniec roku śmierci,
- polisa II ma te same parametry, z tym że świadczenie maleje co roku o 1000 począwszy od kwoty wyjściowej 9000 zł.

Kowariancja wartości obecnej wypłat z pary polis I i II sprzedanych tej samej osobie wynosi $0.005 \cdot 10^6$. Wiadomo ponadto, że

$$A_{1 \over 40:\overline{9}} = 0.025 \quad {}^2A_{1 \over 40:\overline{9}} = 0.006 .$$

Oblicz $E[S]$ oraz $\text{Var}[S]$ dla portfela 100 niezależnych polis, w których występuje po 50 polis obydwu typów. [Odp.

- (A) $E(S) = 12\,500$, $\text{Var}(S) = 24\,525\,000$,
 (B) $E(S) = 16\,200$, $\text{Var}(S) = 24\,525\,000$,
 (C) $E(S) = 17\,900$, $\text{Var}(S) = 25\,615\,000$,
 (D) $E(S) = 16\,200$, $\text{Var}(S) = 26\,375\,000$,
 (E) $E(S) = 12\,500$, $\text{Var}(S) = 26\,375\,000$,]

3.42 [EdA18.01.97] Na osobę w wieku x -lat wystawiono 30-letnią polisę na życie, dającą przez pierwszych 10 lat wypłatę 15 000, przez następne 10 lat kwotę 10 000 oraz 5 000 przez ostatnie 10 lat ważności polisy. Świadczenie pośmiertne jest płatne na koniec roku śmierci. Wyznacz składkę $E(Z) + \text{SD}(Z)$ dla tej polisy (SD oznacza odchylenie standardowe), jeśli wiadomo że:

- Z_1, Z_2, Z_3 to wartości obecne wypłat z 10-letnich polis wystawionych na x -latkę, dających wypłatę 1 na koniec roku śmierci, i odroczonych odpowiednio o 0 lat, 10 lat oraz 20 lat,
- dla zmiennych Z_1, Z_2, Z_3 znane są:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_1) &= 0.007225, & \text{Cov}(Z_1, Z_2) &= -0.0033 \\ \text{Var}(Z_2) &= 0.0036, & \text{Cov}(Z_1, Z_3) &= -0.003 \\ \text{Var}(Z_3) &= 0.003025, & \text{Cov}(Z_2, Z_3) &= -0.00275. \end{aligned}$$

Podaj najbliższą wartość wyznaczonej składki. [Odp. (A) 2230, (B) 2245, (C) 2260, (D) 2275, (E) 2290.]

- 3.43 [EdA7.12.96] Wyznacz jednorazową składkę netto w bezterminowym ubezpieczeniu na życie 25-latka z sumą ubezpieczenia 10 000 zł, płatną na koniec roku, w którym nastąpiła śmierć, jeśli wiadomo że:

1. $v = 0.9$,
2. $q_{24} = 0.00180$ oraz $q_{25} = 0.00160$,
3. $(IA)_{24} = 0.64610$ oraz $(IA)_{25} = 0.68180$.

Wynik zaokrąglaj do 10 groszy. [Odp. (A) 325.60, (B) 354.40, (C) 355.80, (D) 356.40, (E) 357.80.]

- 3.44 [EdA7.12.96] Na x -latka wystawiono polisę, która po 10 latach odroczenia daje 40-letnie ubezpieczenie na życie ze świadczeniem w wysokości 10, płatnym w momencie śmierci. Wyznacz wariancję wypłat z tej polisy według ich wartości na moment wystawienia polisy, jeśli:

1. natężenie zgonów jest stałe: $\mu_{x+t} = 0.05$,
2. natężenie oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$.

[Odp. (A) $25 \cdot ((4/3)e^{-1.5} - e^{-2} + 2e^{-6} - (4/3)e^{-7.5} - e^{-10})$,
 (B) $50 \cdot ((4/3)e^{-1.5} - e^{-2} + 2e^{-6} - (4/3)e^{-7.5} - e^{-10})$,
 (C) $25 \cdot ((4/3)e^{-2} - e^{-6} + (4/3)e^{-8} - e^{-10})$,
 (D) $50 \cdot ((4/3)e^{-2} - e^{-6} + (4/3)e^{-8} - e^{-10})$,
 (E) $25 \cdot ((4/3)e^{-1.5} - 2e^{-6} + (4/3)e^{-7.5} - e^{-10})$.]

- 3.45 [EdA16.11.96] Dla zabezpieczenia 10-letniego kredytu zawarto 10-letnie ubezpieczenie na życie. Wyznacz jednorazową składkę netto, jeśli:

1. świadczenie jest płatne na moment śmierci,
2. suma ubezpieczenia maleje jednostajnie wraz z upływem czasu od 1000 do zera,
3. natężenie oprocentowania $\delta = 0.04$,
4. natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_{x+t} = (1/50)$.

- [Odp. (A) $(2500/3)(\exp(-3/5) - (1/5))$,
 (B) $(2500/3)(\exp(-3/5) - (4/9))$,
 (C) $(5000/9)(\exp(-3/5) - (1/5))$,
 (D) $(5000/9)(\exp(-3/5) - (2/5))$,
 (E) $(5000/9)(\exp(-3/5) - (4/9))$.]

- 3.46 [EdA16.11.96] Niech Z_1, Z_2, Z_3 oznaczają odpowiednio wartości obecne wypłat z następujących polis wystawionych dla 40-latka: terminowej 20-letniej na życie, 20-letniej na dożycie oraz 20-letniej na życie i dożycie. Oblicz $E[Z_1]$ oraz $E[Z_2]$, jeśli wiadomo, że

$$1. \text{Var}(Z_1) = 0.0081; \text{Var}(Z_2) = 0.0625; \text{Var}(Z_3) = 0.0106,$$

$$2. A_{40:\overline{20}|} = 0.4.$$

- [Odp. (A) $E(Z_1) = 0.1, E(Z_2) = 0.3$,
 (B) $E(Z_1) = 0.15, E(Z_2) = 0.3$,
 (C) $E(Z_1) = 0.15, E(Z_2) = 0.25$,
 (D) $E(Z_1) = 0.1, E(Z_2) = 0.35$,
 (E) $E(Z_1) = 0.12, E(Z_2) = 0.28$.]

- 3.47 [EdA05.12.98] Dana jest liczba całkowita x oraz

$$A_x = 0.5, \quad p_x = 0.6 \quad v = 0.95.$$

Oblicz $A_{x+\frac{1}{2}}$ korzystając z założenia o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku. [Odp. (A) 0.360, (B) 0.375, (C) 0.390, (D) 0.405, (E) 0.420.]

- 3.48 [EdA05.12.1998] W dziesięcioletnim ubezpieczeniu na życie i dożycie suma ubezpieczenia wynosi w pierwszym roku 10 000 zł i rośnie o 1 000 zł po każdej rocznicy wystawienia polisy. Świadczenie śmiertelne płatne jest na koniec roku śmierci. Wyznacz jednorazową składkę netto dla ubezpieczonego w wieku 50 lat, jeśli dane są:

$$\begin{array}{lll} A_{50} & = & 0.1831 \quad (IA)_{50} = 2.3686 \quad D_{50} = 7475 \\ A_{60} & = & 0.2922 \quad (IA)_{60} = 2.9000 \quad D_{60} = 2450 \end{array}$$

Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) – 7 480, (B) – 7 690, (C) – 7 900, (D) – 8 110, (E) – 8 330.]

- 3.49 [EdA16.11.96] W związku z koniecznością obniżenia technicznego natężenia oprocentowania o jeden punkt procentowy, wyznacz nowy poziom składki $\bar{A}_x$, jeśli dotychczasowe $A_x = 0.15$, a dotychczasowe $(\bar{I}\bar{A})_x = 2.2$. [Odp. (A) 0.161, (B) 0.172, (C) 0.183, (D) 0.194, (E) Żadna z powyższych.]
- 3.50 [EdA3.10.98] Osoba w wieku (x) rozważa kupno jednego z dwóch bezterminowych ubezpieczeń na życie. W obydwu ubezpieczeniach płaci się jednorazową składkę netto. Pierwsze ubezpieczenie daje świadczenie 1 zł na koniec roku śmierci, a drugie ubezpieczenie świadczenie 1 zł na koniec półroczna śmierci. Składka za drugie ubezpieczenie jest o 1.72% wyższa od pierwszej składki. Zakładając jednostajny rozkład zgonów w ciągu roku, wyznacz techniczną (roczną) stopę procentową i , przy której skalkulowano obydwie składki. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 6%, (B) 7%, (C) 8%, (D) 9%, (E) 10%.]

4 Zadania MUŻ; lista 4

4.1 Obliczyć JSN dla następującej renty dla (30)-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 1000, jeśli żyje pod koniec drugiego roku wypłata wynosi 3000, jeśli żyje on pod koniec trzeciego roku wypłata wynosi 6000. Obliczenia zrobić dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

4.2 Obliczyć, zakładając TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$

(i) a_{40}

(ii) $a_{40:\overline{20}|}$

(iii) ${}_{20|}\ddot{a}_{40}$

(iv) aproksymację dla $\bar{a}_x$ (założyć HU)

(v) $\bar{a}_{40:\overline{20}|}$.

Wsk.: w celu uniknięcia obliczeń można użyć funkcji komutacyjnych.

4.3 Obliczyć $(Ia)_{30:\overline{20}|}$ oraz $(I\ddot{a})_{30:\overline{20}|}$ dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

4.4 Podać wzór na aktuarialną zakumulowaną wartość w wieku 60-lat dla (30)-latka dla następującego ubezpieczenia rentowego:

(i) 1000 na koniec każdego miesiąca w wieku 30 do 40 lat,

(ii) 2000 na koniec każdego miesiąca w wieku 40 do 50 lat,

(iii) 5000 na koniec każdego miesiąca w wieku 50 do 60 lat,

Podać dokładny wynik dla TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$.

4.5 Rozpatrzmy następujący portfel rent z góry:

wiek	liczba rent
60	30
70	20
80	10

Każda renta wypłaca 1 tak długo jak rentobiorca żyje. Zakładamy $i = 4\%$ oraz TTŻ-PL97m. Dla obecnej wartości tych zobowiązań obliczyć

- wartość oczekiwaną,
- wariancję
- kwantyl 5% rozkładu.

Należy założyć, że długości żyć są niezależne. Do obliczenia wariancji wykorzystać następującą tablicę funkcji komutacyjnych obliczonych przy nowym stopie procentowej $i = 8.16\%$:

wiek	M_x	D_x
60	232.093	678.143
70	105.770	220.633
80	30.825	49.092

- 4.6 Zakładając HU, obliczyć $\bar{A}_{45}$, wiedząc, że $\ddot{a}_{45} = 19.864$ oraz $A_{45} = 0.42143$.
- 4.7 Korzystając z tablic trwania życia TTŻ-PL97m, przy rocznej stopie procentowej $i = 4\%$, obliczyć *jednorazową składkę netto czasowej renty na życie* na 3 lata, osoby w wieku $x = 40$, wypłacanej w wysokości $C = 1000$ na początku każdego roku życia.
- 4.8 Zakładając prawo de Moivre'a przeżycia z $\omega = 4$ obliczyć jednorazową składkę netto dla następującego ubezpieczenia życiowo-rentowego: jeśli ubezpieczony $x = 0$ umrze przed upływem 2 lat to wypłata 10 jednostek jest płatna na koniec roku śmierci, po upływie 2 lat wypłacana jest renta wysokości 1 na początek każdego roku życia. Przeprowadzić obliczenia przy $\delta = 0.2$.
- 4.9 Dane są następujące wartości przy $i = 0.03$:

x	72	73	74	75
$\ddot{a}_x$	8.06	7.73	7.43	7.15

Oblicz p_{73} .

- 4.10 Pokazać, że $\bar{a}_{x:\overline{m}|}$ obliczone dla stałego natężenia śmiertelności μ i sile stopy procentowej δ jest równe $\bar{a}_{\overline{m}|}$ obliczone przy sile stopy procentowej $\delta + \mu$.

4.11 Załóżmy, że Y jest obecną wartością renty na całe życie wypłacającą 1 na rok dla (x) -latka. Dane jest $\ddot{a}_x = 10$ przy $i' = 1/24 = e^\delta - 1$, $\ddot{a}_x = 6$ przy $i = e^{2\delta} - 1$. Oblicz wariancję Y .

4.12 Udowodnij oraz powiedz przy jakich założeniach jest prawdziwa równość

(i)

$${}_nE_x = {}_tE_x {}_{n-t}E_{x+t}$$

dla wszystkich $t, n \in Z_+$ i $t \leq n$

(ii)

$${}_nE_x = {}_tE_x {}_{n-t}E_{x+t}$$

dla wszystkich $n \in Z_+$, $t \geq 0$ oraz $t \leq n$.

4.13 Grupa (30)-latków płaci po 1000 zł do funduszu na koniec każdego roku przez 20 lat. Znajdź kwotę przypadającą dla jednego przeżywającego. Obliczenia przeprowadź dla TTŻ-PL97m przy $i = 4\%$. **Wsk.:** można skorzystać z tablicy funkcji komutacyjnych.

Zadania teoretyczne

4.14 Pokazać przy HJP, że wariancja obecnej wartości Y ciągłej renty odroczonej wynosi

$$\text{Var}[Y] = v^{2m} {}_m p_x (1 - {}_m p_x) (\bar{a}_{x+m})^2 + v^{2m} {}_m p_x \frac{{}^2\bar{A}_{x+m} - (\bar{A}_{x+m})^2}{\delta^2}.$$

4.15 Udowodnić

$${}_m|_n\bar{a}_x = v^m {}_m p_x \bar{a}_{[x]+m:\overline{m}},$$

gdzie $\bar{a}_{[x]+m:\overline{m}} = \int_0^m v^t {}_t p_{[x]+m}$ oraz przy HJP

$${}_m|_n\bar{a}_x = v^m {}_m p_x \bar{a}_{x+m:\overline{m}}.$$

4.16 Udowodnić zależność

$$v\ddot{a}_x = a_x + A_x.$$

4.17 Udowodnić następujące związki dotyczące jednorazowej składki netto terminowej renty z dołu

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + A_{x:\overline{n}|}, \\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 + a_{x:\overline{n-1}|}, \\ a_{x:\overline{n}|} &= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}, \\ a_{x:\overline{n-1}|} &= v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}. \end{aligned}$$

4.18 Przy założeniu HA, wyprowadzić wzór na wariancję obecnej wartości odroczonego ubezpieczenia na całe życie

$$\text{Var}[Y] = v^{2n} {}_n p_x (1 - {}_n p_x) (a_{x+n})^2 + v^{2n} {}_n p_x \frac{{}^2 A_{x+n} - (A_{x+n})^2}{d^2},$$

gdzie

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } K = 0, 1, \dots, m-1, \\ v^m + v^{m+1} + \dots + v^K & \text{jeśli } K = m, m+1, \dots \end{cases}$$

4.19 Pokazać, że jednorazowa składka netto rosnącej renty na życie z dołu, tzn. o wypłatach $c_k = k$ ($k=0,1,\dots$) w okresie $0 \leq k \leq K$ wynosi

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k v^k {}_k p_x.$$

4.20 Wyprowadzić następujące wzory na jednorazowe składki netto rosnących rent terminowych z góry i z dołu

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n k v^{k-1} {}_{k-1} p_x, \quad (4.1)$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n k v^k {}_k p_x. \quad (4.2)$$

4.21 Udowodnić następującą zależność:

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &= m(v^{1/m} \ddot{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)}) \\ &= 1 - d^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)}. \end{aligned}$$

4.22 Udowodnić następującą zależność dotyczącą renty zupełnej

$$1 = i^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} + \bar{A}_x.$$

4.23 Rozważając przepływ kapitału dla portfela l_x rent terminowych, udowodnić że zakumulowane wartości odpowiednich rent dyskretnych na koniec okresu dane są wzorami

$$\begin{aligned} s_{x:\overline{n}|} &= \frac{a_{x:\overline{n}|}}{n E_x}, \\ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{n E_x}. \end{aligned}$$

oraz, że analogicznie dla renty ciągłej mamy

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{n E_x}.$$

4.24 Dlaczego nie rozważa się zakumulowanych wartości rent na całe życie?

4.25 Przyjmijmy następującą definicję ciągłej funkcji komutacyjnej

$$\bar{N}_x = \int_0^\infty D_{x+t} dt.$$

Udowodnić, że

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x}.$$

4.26 Udowodnić przy założeniu HU, że

$$\bar{N}_x = \frac{id}{\delta^2} N_x - \frac{i - \delta}{\delta^2} D_x.$$

4.27 Pokazać, że

$$\begin{aligned} s_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}, \\ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}, \\ {}_n k_x &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+n}}. \end{aligned}$$

Zadania dodatkowe

- 4.28 [FAM] Obliczyć $\ddot{a}_{45:\overline{10}|}^{(2)}$, $a_{30:\overline{20}|}^{(12)}$, $\bar{a}_{30:\overline{20}|}$ przy założeniu TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$ korzystając z
- (i) z aproksymacji DL,
 - (ii) zakładając HU.
- 4.29 Dla (65)-latka zakładając TTŻ-PL97m oraz $i = 4\%$ obliczyć aktuariálną obecną wartość renty na całe życie płatnej miesięcznie z góry.
- 4.30 [EdA16.11.1996] Niech Y będzie obecną wartością renty dożywotniej dla 70-latka, dającej mu wypłatę 100 na początek każdego roku. Oblicz $\text{Var}[Y]$ jeśli dane są $A_{69} = 0.55211$, ${}^2A_{69} = 0.34022$, $p_{69} = 0.97$ oraz $v = 0.95$ (podaj najbliższą wartość). [Odp. (A) 119 151, (B) 129 252, (C) 139 353, (D) 149 454, (E) 159 555.]
- 4.31 Obliczyć A_{20} , $\ddot{a}_{20}$, P_{20} przy $i = 6\%$ oraz TFK-PL97m.
- 4.32 [EdA26.10.96] Czterdziestoletnia osoba zaciągnęła kredyt na 10 lat, z roczną ratą w wysokości r spłacaną w formie renty ciągłej z oprocentowaniem δ . Dla pokrycia długu wystawiono polisę dającą w momencie śmierci dłużnika wypłatę równą pozostałej kwocie długu. Przyjmując tę samą stopę procentową δ wskaż formułę wyznaczającą jednorazową składkę netto za tę polisę.
[Odp. (A) $(r/\delta)(\bar{A}_{40:\overline{10}|} + v^{10} \cdot {}_{10}p_{40})$,
(B) $(r/\delta)(\bar{A}_{40:\overline{10}|} - v^{10} \cdot {}_{10}p_{40})$,
(C) $(r/\delta)(\bar{A}_{40:\overline{10}|} - v^{10} \cdot {}_{10}q_{40})$,
(D) $(r/\delta)(A_{40:\overline{10}|}^{\frac{1}{2}} - v^{10} \cdot {}_{10}q_{40})$,
(E) $(r/\delta)(A_{40:\overline{10}|}^{\frac{1}{2}} + v^{10} \cdot {}_{10}q_{40})$.]
- 4.33 [EdA26.10.96] Osobie czterdziestoletniej wystawiono polisę na rentę dożywotnią, odroczoną na 20 lat, płatną w wysokości 1 na początek roku. Wyznacz jednorazową składkę netto za tę polisę, jeśli wiadomo, że:

$$A_{40} = 0.112 \quad \ddot{s}_{40:\overline{20}|} = 77.7 \quad {}_{20}p_{40} = 0.78 \quad i = 0.1 .$$

[Odp. (A) 0.76, (B) 0.80, (C) 0.84, (D) 0.88, (E) 0.92.]

4.34 [EdA5.10.96] Dane są trzy formuły:

- (i) $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} - \frac{d \cdot \ddot{a}_x}{\delta}$,
- (ii) $\bar{A}_{x:\overline{m}} = A_{x:\overline{m}} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right)A_{\overline{m}}$,
- (iii) $(\overline{IA})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x$.

Która z nich jest poprawna przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku?

[Odp. (A) tylko (i), (B) tylko (ii), (C) tylko (iii), (D) tylko (ii) oraz (iii), (E) żadna.]

4.35 [EdA5.10.96] Dane są:

$$\ddot{a}_{x:\overline{3}} = 2.70 \quad i = 0.1 \quad {}_3p_x = 0.9.$$

Przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku $\ddot{a}_{x:\overline{3}}^{(12)}$ wynosi (podaj najbliższą wartość):

[Odp (A) 2.40, (B) 2.45, (C) 2.50, (D) 2.55, (E) 2.60.]

4.36 [EdA7.12.96] Osobie 35-letniej wystawiono polisę na rentę dożywotnią, odroczoną na 30 lat, płatną w wysokości 100 złotych na początku miesiąca. Przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku wyznacz jednorazową składkę netto, płatną w momencie wystawienia tej polisy, jeśli dane są:

- (i) $A_{35}^{(12)} - A_{35} = 0.004212$,
- (ii) $A_{\overline{35:\overline{30}}} = 0.06519$,
- (iii) $\ddot{a}_{35:\overline{30}} = 11.425$,
- (iv) $d = 7.407\%$, $d^{(12)} = 7.672\%$, $\alpha(12) = 1.0005$, $\beta(12) = 0.4713$.

Wynik zaokrąglaj do liczby całkowitej.

[Odp. (A) 513, (B) 660, (C) 807, (D) 954, (E) 1101.]

4.37 [EdA21.06.97] Znajdź wariancję zmiennej losowej $Y = \bar{a}_{\overline{T}}$ przy stałej intensywności oprocentowania $\delta > 0$, wiedząc że:

$\bar{a}_x = 9$ przy intensywności oprocentowania δ ,

$\bar{a}_x = 6$ przy intensywności oprocentowania 2δ oraz ${}^2\bar{A}_x / \bar{A}_x = 2/3$.

[Odp. (A) 3/2, (B) 3, (C) 9, (D) 27/2, (E) 27.]

- 4.38 [EdA3.10.98] W pewnej populacji śmiertelnością rządzi prawo Weibulla z intensywnością wymierania $\mu_x = x/400$. Ponadto intensywność oprocentowania $\delta = 0.05$ oraz $\Phi(u)$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Wyznacz $\bar{a}_{20}$.

[Odp. (A) $20\sqrt{2\pi}e^2(1 - \Phi(2))$,

(B) $40\sqrt{2\pi}e^2(1 - \Phi(2))$,

(C) $\frac{1}{20}\sqrt{2\pi}e^2(1 - \Phi(2))$,

(D) $\frac{1}{20}\sqrt{2\pi}e^4(1 - \Phi(2))$,

(E) $\frac{1}{400}\sqrt{2\pi}e^4(1 - \Phi(2)).$]

- 4.39 Pokazać, że

$$\alpha(m) = 1 + \frac{m^2 - 1}{12m^2}\delta^2 + \frac{2m^4 - 5m^2 + 3}{720m^4}\delta^4 + \dots$$

oraz

$$\beta(m) = \frac{m-1}{2m} \left[1 + \frac{m+1}{3m}\delta + \frac{m(m+1)}{12m^2}\delta^2 + \frac{(m+1)(6m^2-4)}{360m^3}\delta^3 + \dots \right].$$

5 Zadania MUŻ; lista 5

- 5.1 Poniżej dane są informacje o 3-letnim ubezpieczeniu na dożycie płatnym na koniec roku śmierci zawartym przez (x) -latka:

k	b_{k+1}	${}_k q_x$
0	2	0.20
1	3	0.20
2	4	0.3

Składka płacona jest na początku ubezpieczenia i $i = 1/9$. W przypadku przeżycia wypłacana jest kwota $b_3 = 4$.

- (i) Napisz OW sumy tego ubezpieczenia.
 - (ii) Napisz JSN A dla tego ubezpieczenia przy użyciu standardowych oznaczeń.
 - (iii) Oblicz JSN dla tego ubezpieczenia (najlepiej bezpośrednio z definicji).
 - (iv) Oblicz roczną składkę netto płaconą w jednakowej wysokości P tak długo jak ubezpieczony żyje.
 - (v) Oblicz rezerwę netto po pierwszym roku (najlepiej bezpośrednio z definicji). Rozważyć dwa przypadki: (1°) składka netto jest płacona jednorazowo w momencie wypisania polisy, (2°) składka jest płacona corocznie.
- 5.2 Wykupiono polisę na całe życie z składką roczną netto płatną na początku każdego roku jak długo ubezpieczony żyje i wynoszącą 100 zł. Znajdź na jaką sumę ubezpieczenia została wypisana polisa, jeśli $i = 4\%$ oraz przyjęto śmiertelność wg TTŻ-PL97m. Obliczyć rezerwę netto po pierwszym roku.
- 5.3 (i) Napisać obecną wartość całkowitej straty L dla renty z góry na całe życie, odroczonej na 2 lata, sfinansowanej składką netto płaconą w pierwszych dwóch latach; w chwili wypisania polisy w wysokości P oraz, jeśli ubezpieczony dożyje, w następnym roku w wysokości kP . Ile wynosi P jeśli $k = 1$ (przyjąć HJP)?
- 5.4 Rozpatrzmy następującą rentę z góry na całe życie. Co roku wypłacana jest kwota równa 1 i jeśli rentobiorca zmarł przed upływem 5 lat, a na koniec roku śmierci rentobiorcy zostaje zwrócona połowa pobranej na początku JSN P .

- (i) Napisać wzór na całkowitą stratę ubezpieczyciela L .
- (ii) Podać wzór, w terminach standardowych oznaczeń aktuarialnych, na JSN.

- 5.5 (50)-latek nie może płacić dalej składek rocznych ubezpieczenia na całe życie i chce zamienić swoje ubezpieczenie na bezskładkowe. Obliczyć nową sumę ubezpieczenia jeśli konwersja nastąpi po 10 i 15 latach. Przeprowadzić również obliczenia dla (30)-latka, gdy konwersja nastąpi po 5, 10 i 15 latach.
- 5.6 Na życie wystawiono bezterminową polisę dającą wypłatę 1 w momencie śmierci z składką płaconą w formie ciągłej.
- (a) Pokazać, że składka netto $\bar{P}_x = \mu$, jeśli przyjmuje się stałe natężenie zgonów $\mu_x = \mu$ oraz natężenie stopy procentowej δ .
 - (b) Podaj wzór na stratę ubezpieczyciela L .
 - (c) Pokaż, że wariancja L jest równa $\mu/(\mu + \delta)$.
- 5.7 Obliczyć składkę netto płaconą na początek każdego roku życia w ubezpieczeniu na dożycie po 3 latach dla (50)-latka. Obliczenia przeprowadzić przy $i = 6\%$ oraz dla TTŻ-PL97k.
- 5.8 [EdA5.10.96] Na życie (x) wystawiono bezterminową polisę dającą wypłatę 1 w momencie śmierci, ze składką płatną w formie renty ciągłej. Jeśli stratę ubezpieczyciela na polisie opisuje

$$L = v^T - \bar{P}(\bar{A}_x) \cdot \bar{a}_{\overline{T}|}$$

to przy założeniu stałego natężenia zgonów $\mu_x = \mu$ wariancja L wynosi:
 [Odp. (A) – $\mu/(\mu + 2\delta)$, (B) – $\mu/(\mu + \delta)$, (C) – $(\mu + \delta)/(\mu + 2\delta)$, (D) – $(\mu + 2\delta)/(2\mu + 2\delta)$, (E) – $(2\mu + \delta)/(2\mu + 2\delta)$.]

- 5.9 [EdA26.10.96] W pełni ciągłym modelu składki netto przyjmij stałe natężenie zgonów $\mu_x = \mu$ dla wszystkich $x > 0$ oraz daną sumę $\mu + \delta = 0.1$. Składka $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{10}|})$ w dziesięcioletnim ubezpieczeniu na życie i dożycie dla osoby w wieku (x) wynosi: [Odp. (A) – $e/(0.1e - 1) - \delta$, (B) – $(e - 1)/(0.1e) - \delta$, (C) – $(e - 1)/(0.1e) - (0.1 - \delta)$, (D) – $(0.1e - 1)/(e - 1) - \delta$, (E) – żadne z powyższych.]

- 5.10 Udowodnić

$${}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$$

oraz

$${}_kV_{x:\overline{n}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}.$$

Dane jest ${}_{10}V_{25} = 0.1$, ${}_{10}V_{35} = 0.2$. Oblicz ${}_{20}V_{25}$.

Zadania teoretyczne

- 5.11 W przypadku jednostkowej polisy całkowicie ciągłej na całe życie dla (x) -latka, opłacanej składką o stałej intensywności (powiedzmy $\bar{P}$ i nie jest ważne ile ona wynosi), całkowita strata ubezpieczyciela w przypadku gdy ubezpieczony umrze w chwili t wynosi

$$l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t}}.$$

Pokazać, że $l(t)$ jest funkcją malejącą dla $t \geq 0$, $l(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = -\bar{P}/\delta$. Wywnioskować stąd, że istnieje dokładnie jeden moment t_0 taki, że całkowita strata ubezpieczyciela jest równa zero jeśli $T_x = t_0$, dodatnia jeśli $T_x < t_0$ oraz ujemna gdy $T_x > t_0$.

- 5.12 Udowodnić bezpośrednim rachunkiem, że wyrażenia

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \frac{E[{}_tL]}{{}_tp_x} = \frac{1}{v^t{}_tp_x}({}_t\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x){}_t\bar{a}_x). \quad (5.1)$$

oraz

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{s}_{x:\overline{t}} - \frac{\bar{A}_1}{{}_tE_x} = \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{a}_{x:\overline{t}}}{{}_tE_x} - \frac{\bar{A}_1}{{}_tE_x}. \quad (5.2)$$

są równoważne.

- 5.13 Wyprowadzić, następujące wzory na rezerwę składki netto ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}})$ oraz wariancję straty ${}_tL$ dla całkowicie ciągłej polisy ubezpieczenia na dożycie na n lat opłacanej składką netto o stałej intensywności $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}})$ (nie ma tu znaczenia ile ona wynosi) przez czas $0 \leq t \leq n$

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}}) &= \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}} \left(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}})}{\delta} \right) - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}})}{\delta}, \\ \text{Var}[{}_tL|T_x \geq t] &= \left({}^2\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}} - (\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}})^2 \right) \left(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}})}{\delta} \right)^2. \end{aligned}$$

5.14 Dla polisy o której mowa w zadaniu 5.13 wyprowadzić następujące wyrażenie na intensywność składki netto

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}}} \quad (5.3)$$

oraz wzory: przy $t \leq n$

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}}) = (\bar{P}(\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}}))\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}}, \quad (5.4)$$

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}}) = \left(1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}})}{\bar{P}(\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}})}\right)\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}}. \quad (5.5)$$

5.15 Pokazać, że wariancja całkowitej straty L w ubezpieczeniach płatnych na koniec roku śmierci, ze składką płatną rokrocznie z góry wynosi:

(a) dla ubezpieczenia na całe życie

$$\text{Var}[L] = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2},$$

(b) dla ubezpieczenia terminowego na życie

$$\text{Var}[L] = \frac{{}^2A_{\overline{x:\overline{n}}} - (A_{\overline{x:\overline{n}}})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}})^2},$$

(c) dla ubezpieczenia na dożycie

$$\text{Var}[L] = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}} - (A_{x:\overline{n}})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}})^2}.$$

5.16 Rozważyć ubezpieczenie terminowe dla (x) -latka na n lat, w którym składka netto w wysokości ${}_nk_x$ jest płacona w chwili n jeśli ubezpieczony dożyje. Podać wzór na całkowitą stratę L oraz pokazać, że

$${}_nk_x = \frac{1}{{}_xE_n} A_{\overline{x:\overline{n}}}.$$

5.17 Obliczyć składkę netto P dla następującego czystego ubezpieczenia na dożycie, na n lat. W przypadku śmierci przed ustalonym w umowie czasem n suma pobranych składek jest zwracana w wysokości $h\%$ (*ubezpieczenie na dożycie z refundacją składek*).

- 5.18 Udowodnić następującą wersję wzoru rekurencyjnego, zwaną wzorem Facklera:

$${}_{k+1}\mathcal{V} = ({}_k\mathcal{V} + P_k) \frac{1+i}{p_{[x]+k}} - b_{k+1} \frac{q_{[x]+k}}{p_{[x]+k}}.$$

- 5.19 Wyprowadzić następujący wzór, określający równoważną postać zmiennych losowych Λ_k

$$\Lambda_k = \begin{cases} -P_k^r & \text{dla } k < K, \\ -P_k^r + (b_{k+1} - {}_{k+1}V) & \text{dla } k = K, \\ 0 & \text{dla } k > K, \end{cases} \quad (5.6)$$

gdzie P_k^r jest tzw. składką na ryzyko określoną wzorem $P_k^r = v(b_{k+1} - {}_{k+1}\mathcal{V})q_{[x]+k}$.

- 5.20 Pokazać na przykładzie bezterminowego ubezpieczenia na sumę 1 opłacanego składką netto w równych ratach, że zmienne losowe Λ_k nie są niezależne. Rozważyć np. zdarzenia $\Lambda_k = 0$ i $\Lambda_h = 0$ dla $k \neq h$.

- 5.21 Korzystając z twierdzenia Hattendorffa wyprowadzić następujący wzór na warunkową wariancję straty ${}_kL$

$$\text{Var} [{}_kL] = \sum_{h=0}^{\infty} (b_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2 v^{2h+2} {}_{h+1}p_{[x]+k} q_{[x]+k+h}.$$

- 5.22 Pokazać, że dla $h \leq n$:

$${}_hP_{x:\overline{n}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}},$$

$${}_hP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}}.$$

Zadania dodatkowe

- 5.23 [EdA16.11.96] Osoba w wieku 40 lat zakupiła rentę dożywotnią w wysokości 100, płatną raz w roku, od 65 roku życia. Wyznacz (podaj najbliższą wartość) roczną składkę płatną z góry na kolejny rok ubezpieczenia, aż do wypłaty pierwszej renty (ostatnia składka w 64 roku życia), jeśli wiadomo, że:

1. $i = 0.05$,
2. $\ddot{a}_{40:\overline{25}|} = 13.51$,
3. $\ddot{a}_{65} = 9.15$,
4. $M_{40} - M_{65} = 2\,100$,
5. $D_{40} = 13\,215$.

[Odp. (A) – 13.20, (B) – 13.40, (C) – 13.60, (D) – 13.80, (E) – 14.00.]

5.24 [EdA26.10.96] Uprość wyrażenie:

$$\frac{(P_{40:\overline{10}|} - {}_{10}P_{40}) \cdot \ddot{a}_{40:\overline{10}|}}{v^{10} \cdot {}_{10}p_{40}},$$

gdzie *duże* P oznaczają roczne (płatne na początku roku) składki netto w pełni dyskretnym modelu, a mianowicie:

- $P_{40:\overline{10}|}$ składkę w terminowym ubezpieczeniu na życie i dożycie,
- ${}_{10}P_{40}$ 10-letnią składkę w bezterminowym ubezpieczeniu na życie.

[Odp. (A) – A_{40} , (B) – $1 - A_{40}$, (C) – $A_{\frac{1}{40:\overline{10}|}}$, (D) – A_{50} , (E) – $1 - A_{50}$.]

5.25 [EdA07.12.1996] Bezterminowa polisa na życie x -latka daje wypłatę 10 000 zł na koniec roku śmierci. Kupując tę polisę x -latek ma do wyboru dwa ekwiwalentne sposoby płacenia dożywotniej składki:

- (i) na początku każdego roku w wysokości 500 zł,
- (ii) na początku każdego miesiąca w wysokości π zł.

Wyznacz wysokość (podaj najbliższą wartość) π przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku oraz stopie procentowej $i = 4\%$.

[Odp. (A) 41.43, (B) 42.44, (C) 43.45, (D) 44.46, (E) 45.47.]

5.26 [EdA28.02.98] W pewnym ubezpieczeniu rentowym dla osoby w wieku x lat ubezpieczony płaci aż do wieku $x + w(x)$ lat składki netto w formie renty ciągłej ze stałą intensywnością $\bar{P}$ na rok, a następnie otrzymuje dożywotnią rentę ciągłą z tą samą intensywnością wypłat $\bar{P}$ na rok. Oblicz $w(x)$ jeśli wiadomo, że długość życia w tej populacji ma rozkład wykładniczy z parametrem μ , a techniczna intensywność oprocentowania wynosi δ . [Odp. (A) – $1/(\mu + \delta)$, (B) – $(\ln 2)/((\mu + \delta))$, (C) – $(\ln 2)/((\mu + 2\delta))$, (D) – $1/(2(\delta + \mu))$, (E) – $1/(2\mu)$.]

5.27 [EdA18.01.97] Kupując bezterminowe ubezpieczenie, 35-latek ma do wyboru dwie równoważne formuły rocznych składek netto, płaconych dożywotnio na początku roku:

- roczna składka rosnąca według wzoru $20 + 5 \cdot (k + 1)$, gdzie $k = 0, 1, \dots$,
- roczna składka rosnąca według wzoru $1 + b \cdot (k + 1)$, gdzie $k = 0, 1, \dots$.

Wyznacz wartości parametru b , jeżeli znane są:

$$D_{35} = 12\,260 \quad N_x = 176\,410 \quad S_{35} = 2\,165\,170$$

[Odp. (A) – 6.05, (B) – 6.55, (C) – 7.05, (D) – 7.55, (E) – 8.05.]

5.28 [EdA18.01.97] Osobie 40-letniej wystawiono 10-letnią polisę na życie ze świadczeniem w wysokości 10 000 płatnym na koniec roku śmierci. Kontrakt przewiduje ponadto zwrot składek netto bez odsetek w formie renty 10-letniej w przypadku dożycia do wieku 50 lat (składki będą zwracane co miesiąc, nie dłużej niż do 60 roku życia). Oblicz (podaj najbliższą wartość) miesięczną składkę netto dla tego ubezpieczenia, jeśli zgony mają jednostajny rozkład w ciągu roku, a ponadto wiadomo, że

$$D_{40} = 9\,000 \quad D_{50} = 4\,800 \quad D_{60} = 2\,500 \quad N_{40} = 135\,000$$

$$N_{50} = 64\,500 \quad N_{60} = 27\,700 \quad d = 0.05 \quad \alpha(12) \approx 1 \quad \beta(12) \approx 11/24$$

[Odp. (A) – 14.90, (B) – 15.65, (C) – 16.40, (D) – 17.15, (E) – 17.90.]

5.29 [EdA16.11.96] W ubezpieczeniu na całe życie pięćdziesięciolatka ze świadczeniem w wysokości 1 wypłacanym w momencie śmierci, stała roczna składka opłacana jest w formie renty ciągłej. Wyznacz poziom rezerwy składek netto po 25 latach ubezpieczenia, jeśli dane są:

1. natężenie oprocentowania $\delta = 0.1$,
2. ${}_t p_{50} = 1 - \frac{t}{50}$, dla $0 < t \leq 50$,
3. ${}_t p_{75} = 1 - \frac{t}{25}$, dla $0 < t \leq 25$.

[Odp. (A) $(\exp(-5) - 2 \exp(-5/2) + 1)/(\exp(-5) + 5)$, (B) $(\exp(-5) - 2 \exp(-5/2) + 1)/(\exp(-5) + 4)$, (C) $(\exp(-5) - 2 \exp(-5/2) + 1)/(\exp(-5) + 3)$, (D) $(\exp(-5) - 2 \exp(-5/2) + 2)/(\exp(-5) + 5)$, (E) $(\exp(-5) - 2 \exp(-5/2) + 12)/(\exp(-5) + 4)$]

- 5.30 Na 35-latkę wystawiono 25-letnią polisę na życie i dożycie z wypłatą 10 000 zł w momencie śmierci lub dożycia do 60 lat. Przez cały okres ubezpieczenia płacone są raz w roku, na początku roku, składki netto w wysokości 250 zł. Wyznacz (podaj najbliższą wartość) rezerwę netto składek netto na koniec 10 roku tego ubezpieczenia, jeśli dane są

$$A_{\overline{15}|45} = 0.1 \quad A_{\overline{15}|45} = 0.3 \quad i = 5\%$$

oraz obowiązuje założenie o jednostajnym rozkładzie zgonów w ciągu roku. [Odp. (A) 850, (B) 875, (C) 920, (D) 945, (E) 1010.]

- 5.31 W bezterminowym ubezpieczeniu na życie osoby trzydziestoletniej w piętnastym roku ubezpieczenia składka płatna na początku roku wynosi 50, a świadczenie śmiertelne płatne na koniec roku wynosi 3000. Rezerwa netto liczona przy 10% stopie wyniosła na koniec czternastego roku ubezpieczenia 550. Przy jakim poziomie współczynnika zgonów rezerwa netto na koniec piętnastego roku powinna osiągnąć 600. [Odp. (A) – 0.0143, (B) – 0.0167, (C) – 0.0200, (D) – 0.0250, (E) – 0.0333.]

- 5.32 W ubezpieczeniu na całe życie czterdziestolatka ze świadczeniem 10 000 zł, płatnym na koniec roku, w którym nastąpiła śmierć, roczna składka opłacana jest w czterech kwartalnych ratach po 30 zł. Składkę tę wyznaczono przy stopie procentowej $i = 0.1$ oraz przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku. Wyznacz poziom rezerwy składek netto po dziesięciu latach ubezpieczenia (podaj najbliższą wartość), jeśli wiadomo, że $A_{50} = 0.19$ oraz $\ddot{a}_{50} = 8.90$. [Odp. (A) – 0.19, (B) – 915, (C) – 1288, (D) – 1525, (E) – 1645.]

- 5.33 [EdA18.01.1997] Osoba 33-letnia kupiła bezterminowe ubezpieczenie na życie ze świadczeniem 10000 płatnym na koniec roku śmierci, płacąc na początku każdego roku składkę netto w wysokości P . Po 21 latach osoba ta przerywa płaconie składek i otrzymuje propozycję ekwiwalentnych aktuarialnie rozwiązań:

- zamiany polisy na bezskładową ze świadczeniem zredukowanym do 6 000,
- albo wypłaty rezerwy netto w formie dożywotniej renty w wysokości 300, płatnej na początku każdego roku.

Dysponując tymi informacjami wyznacz składkę netto P . [Odp. (A) 200, (B) 250, (C) 300, (D) 350, (E) 400.]

6 Zadania

- 6.1 Załóżmy, że życia (x) i (y) są niezależne. Wyrazić za pomocą ${}_np_x$ i ${}_np_y$:
- prawdopodobieństwo, że $(x : y)$ przeżyje n lat,
 - prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna osoba (x) lub (y) przeżyje n lat,
 - prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna z osób, (x) lub (y) , przeżyje n lat
 - prawdopodobieństwo, że oboje (x) i (y) umrą w przeciągu n lat.
- 6.2 Wyznaczyć $A_{x:y}$ przy pomocy $A_{x+1:y+1}$.
- 6.3 Dwie osoby w wieku (x) oraz (y) zakupiły ubezpieczenie wypłacające świadczenie w wysokości 20 000 zł na koniec roku pierwszej śmierci oraz 10 000 zł na koniec roku drugiej śmierci. Oblicz JSN w tym ubezpieczeniu mając dane $A_x = 0.07$, $A_y = 0.4$, $A_{x:y} = 0.03$.
- 6.4 Osoby (x) i (y) chcą wykupić ubezpieczenie dla 2-ch osób, które ma być wypłacone w wysokości $C = 2000$, na koniec roku pierwszej śmierci oraz $D = 1000$ na koniec roku drugiej śmierci. Mając dane $A_x = 0.04$, $A_y = 0.05$ oraz $A_{x:y} = 0.03$ obliczyć JSN tego ubezpieczenia.
- 6.5 Małżonkowie (x) i (y) chcą wykupić rentę, która ma być wypłacana w wysokości $C = 1000$, począwszy od śmierci jednego z nich, na początek każdego kolejnego roku życia drugiego. Mając dane $\ddot{a}_x = 4$, $\ddot{a}_y = 5$ oraz $\ddot{a}_{x:y} = 3$ obliczyć JSN tej renty wdowiej.
- 6.6 Zakładając, że mąż (45) oraz żona (40) mają życia niezależne, oraz że ich rozkłady są zgodne odpowiednio z tablicami TTŻ-PL97m i TTŻ-PL97k obliczyć ${}_3p_{45:40}$.
- 6.7 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym odpowiednio z parametrami α i β . Pokazać, że
- $\Pr(X < Y) = \alpha/(\alpha + \beta)$,
 - $\Pr(\min(X, Y) > x) = e^{-(\alpha+\beta)x}$, $x \geq 0$.
- 6.8 Natężenie zgonów dla żony (30) i męża (40) są stałe i wynoszą odpowiednio $\mu_x^{(z)} = 1/40$ i $\mu_x^{(m)} = 1/30$. Oblicz wartość oczekiwaną długości życia (całego życia) tej osoby, która umrze wcześniej (podaj najbliższą wartość). [Odp. (A) 47.143, (B) 48.571, (C) 50, (D) 51.429, (E) 52.857.]

6.9 Wyrazić ${}_t p_u$ przez ${}_t p_{x_i}$, ${}_t p_{x_i:x_j}$, ${}_t p_{x_i:x_j:x_k}$, ${}_t p_{x_1:x_2:x_3:x_4}$ ($i, j, k = 1, \dots, 4$) gdy

- $u = \overline{(x_1 : x_2)} : \overline{(x_3 : x_4)}$,
- $u = \overline{(x_1 : x_2)} : (x_3 : x_4)$,
- $u = \overline{\overline{(x_1 : x_2)} : (x_3 : x_4)}$.

Napisać $T(u)$ w języku $\max, \min$ i równoważnie $\vee, \wedge$.

6.10 Obliczyć JSN dyskretnej renty wdowiej $a_{x|y}$, która zaczyna wypłaty w wysokości 1 od końca roku śmierci (x) i kończy się z momentem śmierci (y).

6.11 Pokazać, że

$$\bar{a}_{\overline{x:y}:z} = \bar{a}_{x:z} + \bar{a}_{y:z} - \bar{a}_{x:y:z}.$$

6.12 Ojciec (x) i matka (y) wykupują rentą ciągłą wypłacającą z intensywnością 1 przez całe życie dziecka (z) od momentu śmierci drugiego z rodziców aż do jego śmierci. Obliczyć JSN $\bar{a}_{\overline{x:y}|z}$ tego ubezpieczenia. **Wsk.:** skorzystać z Zad. 6.9 oraz z tego, że

$$\bar{a}_{\overline{x:y}|z} = \bar{a}_z - \bar{a}_{\overline{x:y}:z}.$$

6.13 Obliczyć $\bar{a}_{x|y}$ dla niezależnych żyć (x) i (y) jeśli wiadomo, że $\mu_{[x]+t} = 0.05$ oraz $\mu_{[y]+t} = 0.04$.

6.14 Zadanie o skojarzeniach formułuje się następująco. Zakłada się, że m uczestników przyjęcia przy wyjściu losowo zabiera swoje parasole. Niech N będzie liczbą parasoli, które wróciły do swojego właściciela. Pokazać, że

$$E s^N = \sum_{j=0}^m \frac{(s-1)^j}{j!}.$$

Zadania dodatkowe

6.15 [EdA05.04.1997]Bezterminowe ubezpieczenie na życie dwojga osób w wieku x oraz y lat daje wypłatę w wysokości 5 000 po śmierci pierwszej osoby oraz wypłatę 2 000 po śmierci drugiej osoby. Świadczenia pośmiertne płacone są na koniec roku śmierci. Wyznacz jednorazową

składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli dane są: $\ddot{a}_x = 18.5$, $\ddot{a}_y = 8.5$, $A_{x:y} = 2A_{\overline{x:y}}$, $v = 0.95$. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 2 600 (B) 2 625 (C) 2 650 (D) 2 800 (E) 2 825.]

- 6.16 [EdA05.12.1998] Polisa grupowa ubezpiecza na życie czterech osób określona jest w następujący sposób. Świadczenie wypłacane jest na koniec roku każdej z trzech pierwszych śmierci, wszystkim pozostającym przy życiu w chwili tej śmierci (ewentualnie innej osobie uprawnionej w przypadku nie dożycia końca roku), każdemu po 1 zł. Jednoczesna śmierć dwojga lub więcej osób nie jest możliwa. Nie ma żadnej wypłaty za śmierć ostatniej osoby. Śmiertelność w tej populacji ma stałą intensywność wymierania $\mu_x = 0.04$, natomiast $\delta = 0.05$. Oblicz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 3.3 (B) 3.4 (C) 3.5 (D) 3.6 (E) 3.7.]

- 6.17 [EdA18.01.1997] Mąż (x -lat) i żona (x -lat) mają do wyboru:

- kupić bezterminowe ubezpieczenie na życie męża, ze świadczeniem w wysokości 10 000 zł płatnym na koniec roku śmierci,
- kupić bezterminowe ubezpieczenie na życie obojga, ze świadczeniem 10 000 zł płatnym na koniec roku śmierci.

Jeśli wybiorą pierwszy sposób ubezpieczenia, to roczna składka netto, płatną na początku roku, będzie wynosić 100 zł. Wyznacz roczną składkę netto, płatną na początek roku, dla drugiego typu ubezpieczenia, jeśli wiadomo, że śmiertelnością w tej populacji rządzi prawo Gomperta, z natężeniem zgonów

$$\mu_{x+t} = B \cdot 2^{x+t}$$

oraz $p_x = 0.995$, $v = 0.95$. Wskaż najbliższą wartość. [Odp. (A) 103.20, (B) 103.35, (C) 103.50, (D) 103.65, (E) 103.80.]

- 6.18 [EdA28.02.1998] Mąż (x) i żona (y) rozważają zakup ubezpieczenia rentowego typu $A \rightarrow B$. Wypłaca ono A tysięcy złotych w każdą rocznicę polisy (od zaraz) aż do pierwszej śmierci, a potem dożywotnio B tysięcy złotych w każdą rocznicę polisy owdowiałej osobie. Dla pary małżeńskiej równoważne są dwa przypadki takiego ubezpieczenia: $12 \rightarrow 7$ $14 \rightarrow 4$. Oblicz jednorazową składkę netto w takim ubezpieczeniu, jeśli: $\ddot{a}_x = 11$ oraz $\ddot{a}_y = 13$. [Odp. (A) 130 tys., (B) 135 tys., (C) 140 tys., (D) 145 tys., (E) 150 tys.]

6.19 Rozpatrujemy rentę wdowią dla pary (x) i (y) . Renta wypłaca w następujący sposób:

1. gdy (x) umrze jako pierwszy, (y) zaczyna otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 2 na rok,
2. gdy (y) umrze jako pierwsza, (x) zaczyna otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 1 na rok.

Składki za to ubezpieczenie są płacone w postaci renty ciągłej aż do pierwszej śmierci z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto $\bar{P}$. Podaj rezerwę ${}_{10}\bar{V}$ obliczoną na jedną polisę. Dane są:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\overline{x}|} &= 13, & \bar{a}_{\overline{y}|} &= 17, \bar{a}_{\overline{x:y}|}, \\ \bar{a}_{\overline{x+10}|} &= 10.5, & \bar{a}_{\overline{y+10}|} &= 15, & \bar{a}_{\overline{x+10:y+10}|} &= 6, \\ {}_{10}p_x &= 0.85, & {}_{10}p_y &= 0.97.\end{aligned}$$

Wskaż najbliższą odpowiedź. [Odp. () 11.6, (B) 12.2, (C) 12.8, (D) 13.4, (E) 14.0.]

6.20 [EdA15.01.2000]Trzy osoby w wieku (x) , (y) , (z) zakupiły bezterminowe ubezpieczenie na życie, wypłacające 20 000 zł na koniec roku pierwszej śmierci oraz 10 000 zł na koniec roku drugiej śmierci. Roczna składka płacona jest w stałej wysokości na początku każdego roku ubezpieczenia do drugiej śmierci. Podaj roczną składkę w tym ubezpieczeniu. Dane są: $\ddot{a}_{x:y} = 7$, $\ddot{a}_{x:z} = 10$, $\ddot{a}_{y:z} = 11$, $\ddot{a}_{x:y:z} = 8$, $d = 6\%$. [Odp. (A) 472, (B) 660, (C) 1 100, (D) 1 220, (E) 1 533.]

6.21 [EdA08.04.2000]Ubezpieczenie dla dwóch niezależnych osób (z tej samej populacji) w wieku (x) oraz $(x + 1)$ płaci 1 000 zł na koniec roku pierwszej śmierci. Wyznacz składkę netto dla tego ubezpieczenia, płatną w stałej kwocie na początku każdego roku aż do pierwszej śmierci, jeśli wiadomo, że $p_x = 0.9$, $p_{x+1} = 0.85$, $A_{x+1,x+2} = 0.24$, $v = 0.95$. [Odp. (A) 29, (B) 31, (C) 33, (D) 35, (E) 37.]

6.22 [EdA14.010.2000]Żona (30) i mąż (35) rozważają zawarcie umowy ubezpieczenia ich wspólnego życia, z sumą ubezpieczenia 1 zł, wypłacaną na koniec roku pierwszej śmierci osobie pozostającej przy życiu lub innym uprawnionym. Regularna składka roczna $P_{30:35}$ płatna do pierwszej śmierci jest o 1% mniejsza niż odpowiednia składka $P_{31:36}$, którą

musieliby płacić, jeśli się ubezpieczą za rok. Dane ponadto: $q_{30} = 0.00055$, $q_{35} = 0.003$, $v = 0.95$. Obliczyć $P_{30:35}$. [Odp. (A) 0.003, (B) 0.004, (C) 0.005, (D) 0.006, (E) 0.007.]

6.23 [EdA03.10.2000]

- ${}_t p_x = 1 - t^2 q_x$, $t \in [0, 1]$
- ${}_t p_y = 1 - t^3 q_y$, $t \in [0, 1]$
- $q_x = 0.2$
- $q_y = 0.4$
- $T(x)$ i $T(y)$ są niezależne.

Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba (x) umrze w ciągu 9 miesięcy oraz jej śmierć będzie poprzedzona przez śmierć osoby (y). Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 0.001, (B) 0.003, (C) 0.005, (D) 0.007, (E) 0.009.]

6.24 [EdA24.11.1997] Mąż (30) wykupuje dla żony (20) rentę wdowią ciągłą, płacącą z intensywnością 12 000 zł na rok od momentu jego śmierci. Składki płacone są do momentu pierwszej śmierci w formie renty ciągłej z intensywnością P na rok. Oblicz P jeśli dane są

$$\mu_{30+t}^{(m)} = 0.02 \quad \mu_{20+t}^{(z)} = 0.01 \quad \delta = 0.05.$$

[Odp. (A) 3800, (B) 4000, (C) 4200, (D) 4400, (E) 4600.]

6.25 [EdA07.12.1996] Rodzice (25) i (35) wykupili dziecku (0) polisę posagową, dającą dziecku w wieku 20 lat wypłatę tylko wtedy, gdy będzie ono całkowitą sierotą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dojdzie do wypłaty posagu, jeśli natężenie zgonów jest w tej populacji stałe i wynosi $\mu > 0$. [Odp. (A) $\exp(-45\mu) + \exp(-55\mu) - 1$, (B) $(\exp(-45\mu) + \exp(-55\mu))/2$, (C) $\exp(-20\mu) - 2\exp(-40\mu) + \exp(-60\mu)$, (D) $(\exp(-20\mu) - 2\exp(-40\mu) + \exp(-60\mu))/2$, (E) $(\exp(-45\mu) + \exp(-55\mu) + \exp(-100\mu))/3$.]

6.26 [EdA214.10.2000] Oblicz $\dot{e}_{40:50}$, jeśli wiadomo że:

- osoba w wieku 50 lat jest niepaląca,
- osoba w wieku 40 lat jest paląca,
- $\mu_x^p = 2 \cdot \mu_x^n$,

- $l_x^n = 100 \cdot (100 - x)$ dla $0 \leq x \leq 100$,

gdzie indeks górny n oznacza osobę niepalącą, natomiast p osobę palącą.

[Odp. (A) 11, (B) 14, (C) 17, (D) 20, (E) 24.]

7 Zadania

- 7.1 W następującym fragmencie tablicy szkodowości dla obu płci łącznie TSZ-PL99 z dodatku dla $x = 50, \dots, 54$ uzupełnić brakujące kolumny.

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$
50	91708	661	85			
51	90961	656	85			
52	90221	650	84			
53	89487	645	83			
54	88759	640	83			
55	88037	991	80			

Korzystając z tej tablicy policzyć ${}_k p_{50}^{(\tau)}$, dla $k = 2, 3, 4$, ${}_2 q_{52}^{(1)}$, ${}_2 q_{52}^{(1)}$. Ile wynosi $l_{56}^{(\tau)}$?

- 7.2 Na podstawie tablicy 7.1 obliczyć (i) prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku z powodu przyczyny 1 w wieku 24 lat, (ii) prawdopodobieństwo, że (25)-latek umrze w ciągu roku z dowolnej przyczyny, (iii) prawdopodobieństwo, że (26)-latek umrze w ciągu dwóch lat z powodu przyczyny 2.

Tablica 7.1: Tablica na 2 ryzyka

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
24	97526	33	102
25	97391	35	105
26	97251	37	110
27	97104	39	115
28	96950	39	122
29	96789	42	126

- 7.3 [EdA13.04.2002] Osoba, która 1 stycznia kończy 50 lat, należąca do populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 80 lat będzie 1 października uczestniczyła wraz z grupą osób w krótkotrwałej imprezie (ekstremalny sport), którą przeżywa 90 % uczestników. Obliczyć $q_{50}^{(1)}$ i $q_{50}^{(2)}$, gdzie 1 oznacza śmierć naturalną, a 2 śmierć podczas wspomnianej imprezy.

- 7.4 Obliczyć o ile procent wzrośnie składka na ubezpieczenie jednoroczne dla osoby, kończącej 1 stycznia 40 lat, planującej 1 października uczestniczyć wraz z grupą osób w krótkotrwałej imprezie (ekstremalny sport), którą przeżywa 90 % uczestników. Przyjąć czas rozkład przyszłego czasu życia tej osoby jest dany przez TTŻ-PL97m oraz $i = 3\%$. Z polisy jest wypłacona suma ubezpieczenia 1 jedynie z powodu śmierci nie będącej następstwem branie udziału w imprezie.
- 7.5 Osoba, która 1 stycznia kończy 50 lat, należąca do populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 80 lat będzie 1 lipca oraz 1 października uczestniczyła wraz z grupą osób w krótkotrwałych imprezach (ekstremalny sport), każdą z nich przeżywa 80 % uczestników. Obliczyć $q_{50}^{(1)}$ i $q_{50}^{(2)}$, gdzie 1 oznacza śmierć naturalną, a 2 śmierć podczas wspomnianej imprezy.
- 7.6 Rozważmy ubezpieczenie od śmierci, której natężenie jest stałe i równe 0.05 oraz od nieszczęśliwego wypadku powodującego trwałe kalectwo, którego natężenie wystąpienia równa się 0.01. W chwili śmierci wypłacona jest suma ubezpieczenia 1, natomiast od momentu inwalidztwa aż do śmierci płacona jest ciągła renta z intensywnością 1. Obliczyć JSN.
- 7.7 Dla 1000 osób w wieku 25 lat obliczyć oczekiwaną liczbę osób które umrą w przeciągu roku z powodu przyczyny 1. Również policzyć oczekiwaną liczbę osób, które przeżywszy pierwszy rok umrą w następnym z powodu przyczyny 1. Obliczenia przeprowadzić dla dwuszkodowej tablicy 7.1.
- 7.8 Odejścia z pracy mogą być z dwóch powodów: śmierć (1) lub zmiana pracy (2). Zmiana pracy może następować jedynie w dniu 1 października. Zakładając, że w ciągu roku śmiertelność jest jednostajna oraz TTŻ-PLm97 oraz z powodu zmiany pracy opuszcza 5% pracowników, obliczyć prawdopodobieństwo $q_{50}^{(\tau)}$, że (50)-latek w ciągu roku przestanie pracować (przyjąć, że 1 stycznia jest dniem urodzin pracowników).

Zadania teoretyczne

- 7.9 Opisać przy pomocy T_x i J_x dopełnienie zdarzenia $\{T_x \leq t, J_x = j\}$. Zauważyć, że ogólnie $1 - {}_tq_x^{(j)} \neq \Pr(T_x > t, J_x = j)$. Czy znając historię

życia (x) -latka od chwili zawarcia umowy do czasu t da się rozstrzygnąć, czy w jego przypadku zaszło zdarzenie $\{T_x > t, J_x = j\}$? A zdarzenia $\{T_x \leq t, J_x = j\}$, $\{T_x > t\}$?

7.10 Udowodnić, że

$$\Pr(J_x = j | T_x = t) = \frac{f_x(t, j)}{f_x(t)} = \frac{\mu_{[x]+t}^{(j)}}{\mu_{[x]+t}^{(\tau)}}.$$

(Formalna definicja tego warunkowego prawdopodobieństwa, którego warunek ma prawdopodobieństwo 0, wymaga aby była to funkcja dwu zmiennych j, t spełniająca

$$\Pr(J_x = j, a < T_x \leq b) = \int_a^b \Pr(J_x = j | T_x = t) f_x(t) dt$$

dla każdego $j = 1, \dots, m$, $0 \leq a \leq b$.)

7.11 Udowodnić tożsamość

$${}_t q_x^{(j)} = \frac{{}_t d_x^{(j)}}{{}_t d_x^{(\tau)}} {}_t q_x^{(\tau)}.$$

7.12 Udowodnić przy założeniu HCFM-D

$${}_s p_x'^{(j)} = ({}_s p_x^{(\tau)})^{r q_x^{(j)} / r q_x^{(\tau)}}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 < r < 1. \quad (7.1)$$

Stąd przechodząc z $r \rightarrow 1$ mamy

$${}_s p_x'^{(j)} = ({}_s p_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)} / q_x^{(\tau)}}, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (7.2)$$

Pokazać, że (7.2) jest również prawdziwe przy HU-D. Przekształcając udowodnić, że

$${}_s q_x^{(j)} = \frac{\log {}_r p_x'^{(j)}}{\log {}_r p_x^{(\tau)}} {}_s q_x^{(\tau)}. \quad (7.3)$$

7.13 Udowodnić, że przy założeniu HU'-D mamy

$${}_t q_x^{(1)} = q_x'^{(1)}(t - q_x'^{(2)} \frac{t^2}{2}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

skąd wywnioskować, że HU-D nie może wtedy być prawdziwa.

- 7.14 Udowodnić, że jeśli T_x jest skończone, to warunek $\int_0^\infty \mu_{[x]+s}^{(\tau)} ds = \infty$ musi być spełniony. Podać przykład i interpretację gdy nie zachodzi $\int_0^\infty \mu_{[x]+s} ds = \infty$ ($j = 1, \dots, m$).

Zadania dodatkowe

- 7.15 [EdA14.10.2000] W modelu o *dwóch ryzykach współbieżnych* [*double decrement model*] niech $q_x^{(i)}$, $\mu_x^{(i)}$ oznaczają odpowiednio prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia oraz natężenie zdarzenia w *stowarzyszonym modelu pojedynczego ryzyka* [*associated single decrement model*]. Przyjmijmy następujące oznaczenia: s – śmierć oraz n – śmierć w wyniku nieszczęśliwego wypadku. Dane jest:

1. $q_x^{(s)} = 0.6$ oraz jest równomiernie rozłożone w ciągu roku,
2. $\mu_{x+t}^{(n)} = 0.04$ dla $0 \leq t \leq 1$.

Wyznacz składkę netto za ubezpieczenie na okres 1 roku (bez uwzględnienia oprocentowania) z którego w przypadku zajścia zdarzeń objętych umową wypłacane są następujące świadczenia:

- 1000 w przypadku śmierci naturalnej (zajście zdarzenia s),
 - 2000 w przypadku śmierci w wyniku wypadku (zajście zdarzenia n).
- Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 133, (B) 134, (C) 135, (D) 136, (E) 137.]

- 7.16 [EdA05.12.1998] Mąż, obecnie w wieku x , ubezpiecza się na wypadek śmierci i na wypadek inwalidztwa. Natężenia obu rodzajów szkodowości wynoszą odpowiednio $\mu_{x+t}^{(ms)} = 0.015$, $\mu_{x+t}^{(mi)} = 0.005$. Jeśli mąż zostanie inwalidą, to nie ma szans na wyjście z inwalidztwa i przechodzi do podpopulacji o wyższej śmiertelności $\mu_{x+t}^{(mis)} = 0.04$. Natężenie wymierania kobiet wynosi $\mu_{x+t}^{(z)}$. Jeśli mąż umrze (nie będąc inwalidą), to jego żona, obecnie w wieku y , będzie pobierać dożywotnio rentę ciągłą z intensywnością roczną $\bar{P}$. Jeśli natomiast mąż zostanie inwalidą, to do końca życia będzie pobierał rentę ciągłą z intensywnością roczną $2\bar{P}$. Mąż płaci składki w formie renty ciągłej z intensywnością roczną $\bar{\pi}$, aż do wystąpienia jednego ze zdarzeń: własnej śmierci, inwalidztwa lub śmierci żony. Intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.05$. Oblicz $\bar{\pi}/\bar{P}$. Podaj najbliższą wartość. [Odp. (A) 0.377, (B) 0.431, (C) 0.452, (D) 0.486, (E) 0.547.]

7.17 [EdA26.10.1996] W ubezpieczeniu na życie z terminem 20 lat świadczenie jest płatne w momencie śmierci i wynosi:

- (1) 1.50 zł, gdy przyczyną śmierci był wypadek,
- (2) 1 zł, gdy śmierć spowodowała inna przyczyna.

Natężenie zgonów według obydwu przyczyn opisują odpowiednio:

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{60}, \quad \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{t}{40}.$$

Wyznacz jednorazową składkę netto za tę polisę przy zerowej stopie procentowej. [Odp. (A) $1 - \exp(-5)$, (B) $\frac{5}{6}(1 - \exp(-20/3))$, (C) $\frac{3}{2}(1 - \exp(-20/3))$, (D) $\frac{6}{5}(1 - \exp(-25/3))$, (E) $\frac{3}{2}(1 - \exp(-25/3))$.]

7.18 Pokazać, że jeśli $b(t) = \bar{s}_a$ i $\bar{\Pi}$ jest stałą intensywnością składki netto, to ${}_t\bar{\mathcal{V}} = \bar{\Pi}\bar{s}_a$.³

³Za Bowers et al, str. 253.