

7 Zadania

Zadania laboratoryjne

Zadania na wykorzystanie instrukcji MATLAB-owskich: `rand`, `rand(m,n)`, `rand('state', 0)`, `randperm`, `randn`.

- 7.1 Napisać program na sprawdzenie generatorów MATLABowskich przy użyciu
- testu Kołmogorowa–Smirnowa,
 - testu serii z $t = 3$. Obliczyć p_r (patrz 2.2) dla $d = 4$, $n = 2^m$; ($m = 10, 11, \dots, 20$).

- 7.2 [Savicky] Uruchomić procedurę

```
Z=rand(28,100000);
condition = Z(1,:) < 1/16;
scatter(Z(16,condition), Z(28,condition), 'r');
```

Uzasadnić, że w przypadku teoretycznym gdy Z jest macierzą składającą się z zmiennych losowych niezależnych o rozkładzie jednostajnym to na rysunku powinniśmy otrzymać chmurę par (U_{1i}, U_{2i}) ($i = 1, \dots, 100000$), gdzie U_{ij} są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Rysunek powinien więc wyglądać jak

```
Z=rand(2,100000);
condition = Z(1,:) < 1/16;
scatter(Z(1,:), Z(2,:), 'r');
```

Różnicę łatwo zauważyć. A co się dzieje gdyby użyć metody 'twister'. Wyjaśnić jak powinna wyglądać chmura w wypadku 'idealnym'.

- 7.3 Dla przykładu 2.9, przy $n = 2^{14}$ i $k = 2^{20}$ uzupełnić tabelkę:

liczba kolizji $\leq$	100	110	120	130	140	150	160	170
z prawdopodobieństwem	?	?	?	?	?	?	?	?

- 7.4 Uzasadnić, że procedura generowania losowej permutacji z wykładu daje losową permutację po rozwiązaniu następującego zadania z rachunku prawdopodobieństwa, w którym indukcyjnie definiujemy ciąg n permutacji zbioru $[n]$. Zerową permutacją π_0 jest permutacja identity. Dla $k = 1, 2, \dots, n - 1$ definiujemy indukcyjnie π_k -tą z π_{k-1} -szej następująco: zamieniamy element k -ty z J_k -tym gdzie J_k jest losowe (tj. o rozkładzie jednostajnym) na $\{k, \dots, n\}$, niezależnie od $J_1, \dots, J_{k-1}$. Pokazać, że π_{n-1} jest permutacją losową.
- 7.5 Napisać procedurę na losowanie
1. z n obiektów wybieramy losowo k ze zwracaniem,
 2. z n obiektów wybieramy k bez zwracania.
 3. wybierając losowy podzbiór k elementowy $\{1, \dots, n\}$.
- 7.6 Napisać procedurę generowania losowej permutacji `randpermm` na podstawie algorytmu z podrozdziału 3.1. Porównać szybkość swojej procedury z matlabowską `randperm`.
- 7.7 Obliczyć przez symulację prawdopodobieństwo p_n tego, że w permutacji losowej liczb $1, \dots, n$, żadna liczba nie jest na swoim miejscu. Zrobić obliczenia dla $n = 1, \dots, 10$. Do czego może zdążać p_n gdy $n \rightarrow \infty$.
- 7.8 Napisać procedurę n rzutów monetą $(\xi_1, \dots, \xi_n)$.
Jeśli orzeł w i -tym rzucie to niech $\xi_i = 1$ jeśli reszka to $\xi_i = -1$. Niech $S_0 = 0$ oraz $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$. Obliczyć pierwszy moment i wariancję ξ_1 . Zrobić wykres $S_0, S_1, \dots, S_{1000}$. Na wykresie zaznaczyć linie: $\pm \text{Var}(\xi)\sqrt{n}$, $\pm 2\text{Var}(\xi)\sqrt{n}$, $\pm 3\text{Var}(\xi)\sqrt{n}$.
Zrobić zbiorczy wykres 10 replikacji tego eksperymentu.
- 7.9 Rzucamy N razy symetryczną monetą i generujemy błędzenie przypadkowe $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$. Napisać procedury do obliczenia:
1. Jak wygląda absolutna różnica pomiędzy maximum i minimum błędzenia przypadkowego gdy N rośnie?
- 7.10 Rozważamy ciąg $(S_n)_{0 \leq n \leq 2N}$. Przez prowadzenie w odcinku $(i, i + 1)$ rozumiemy, że $S_i \geq 0$ oraz $S_{i+1} \geq 0$. Niech X będzie łączną długością prowadzeń dla N rzutów.
1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden gracz będzie przeważał

między 50% a 55% czasu? Lub więcej niż 95% czasu? Zrobić obliczenia symulacją. Eksperymentalnie sprawdzić ile powtórzeń należy zrobić aby osiągnąć stabilny wynik.

3. Niech $N = 200$. Zrobić histogram wyników dla 10000 powtórzeń tego eksperymentu.

7.11 Napisać procedurę do zadania dni urodzin.

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród n losowo wybranych osób przynajmniej dwie mają ten sam dzień urodzin?

2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród n losowo wybranych osób przynajmniej dwie mają urodziny w przeciągu r dni jeden od drugiego?

3. Przypuśćmy, że osoby pojawiają się kolejno. Jak długo trzeba czekać aby pojawiły się dwie mające wspólne urodziny? Zrobić histogram dla 1000 powtórzeń.

7.12 [Test odstępów dni urodzin] Używając symulacji znaleźć funkcję prawdopodobieństwa statystyki R . Sprawdzić czy wyniki się pokrywają jeśli do obliczeń używa się różnych generatorów.

7.13 [Zagadnienie komiwojażera] Komiwojażer opuszcza miasto 0 i musi odwiedzić wszystkie miasta $1, \dots, n$ przed powrotem do punktu wyjściowego. Odległości pomiędzy miastem i a miastem j jest c_{ij} . Jeśli nie ma drogi do kładziemy $c_{ij} = \infty$. Jest $n = 100$ miast do odwiedzenia, których odległości są zadane w następujący sposób. Zacząć od `rand('state', 0)`. Przydzielić odległości kolejno wierszami c_{ij} gdzie $i = 0, \dots, 100$ oraz $j = 0, 1, \dots, 100$ - odległość między adresem i oraz j . (W ten sposób wszyscy będą mieli taką samą macierz odległości). Znaleźć jak najlepszą drogę $0, \pi_1, \dots, \pi_{100}, 0$ minimizującą przejechaną trasę. Czy uda się odnaleźć najkrótszą trasę. Znaleźć najkrótszą po 100, 200, itd. losowaniach.

Projekt

Projekt 1 Bob szacuje, że w życiu spotka 3 partnerki, i z jedną się ożeni. Zakłada, że jest w stanie je porównywać. Jednakże, będąc osobą honorową, (i) jeśli zdecyduje się umawiać z nową partnerką, nie może wrócić do już odrzuconej, (ii) w momencie decyzji o ślubie randki z pozostałymi są niemożliwe, (iii) musi się zdecydować na którąś z spotkanych partnerek. Bob przyjmuje, że można zrobić między partnerkami ranking: 1=dobra, 2=lepsz, 3=najlepsza, ale ten ranking nie jest mu wiadomy. Bob spotyka kolejne partnerki w losowym porządku.

Napisz raport jaką strategię powinien przyjąć Bob. W szczególności w raporcie powinny się znaleźć odpowiedzi na następujące pytania.

- (a) Bob decyduje się na ślub z pierwszą spotkaną partnerką. Oblicz prawdopodobieństwo P (teoretyczne), że ożeni się z najlepszą. Oblicz też oczekiwany rangę r
- (b) Użyj symulacji aby określić P i r dla następującej strategii. Bob nigdy nie żeni się z pierwszą, żeni się z drugą jeśli jest lepsza od pierwszej, w przeciwnym razie żeni się z trzecią.
- (c) Rozważać zadanie z 10-cioma partnerkami, które mają rangi $1, 2, \dots, 10$. Obliczyć teoretycznie prawdopodobieństwo P i oczekiwaną rangę r dla strategii jak w zadaniu (a).
- (d) Zdefiniować zbiór strategii, które są adaptacją strategii z zadania (b) na 10 partnerek. Podać jeszcze inną strategię dla Boba. Dla każdej strategii obliczyć P i r .

10 Zadania

Zadania teoretyczne

10.1 Niech $F \sim \text{Exp}(\lambda)$ i $Z_1 = F^{-1}(U)$, $Z_2 = F^{-1}(1 - U)$. Pokazać, że

$$\mathbb{E} Z_i = 1/\lambda, \quad \mathbb{E} Z_i^2 = 2/\lambda^2,$$

oraz

$$\text{corr}(Z_1, Z_2) = -0.6449.$$

$$\text{Wsk. } \int_0^1 \log x \log(1 - x) dx = 0.3551.$$

10.2 Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Pareto $\text{Par}(\alpha)$.

10.3 Niech $Z_1 = F^{-1}(U)$, $Z_2 = F^{-1}(1 - U)$. Obliczyć korelację $\text{corr}(Z_1, Z_2)$ gdy F jest dystrybuantą:

- (a) rozkładu Poissona; $\lambda = 1, 2, \dots, 10$,
- (b) rozkładu geometrycznego $\text{Geo}(p)$.

10.4 Niech X ma dystrybuantę F i chcemy wygenerować zmienną losową o warunkowym rozkładzie $X|X \in (a, b)$ gdzie $\mathbb{P}(X \in (a, b)) > 0$. Niech

$$V = F(a) + (F(b) - F(a))U.$$

Jaki rozkład ma V . Pokazać, że $Y = F^{-1}(V)$ ma żadaną warunkową dystrybuantę G , gdzie

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, & a \leq x < b, \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

10.5 Podać procedurę generowania liczb losowych o rozkładzie trójkątnym $\text{Tri}(a, b)$, z gęstością

$$f(x) = \begin{cases} c(x - a), & a < x < (a + b)/2, \\ c((b - a)/2 - x), & (a + b)/2 < x < b, \end{cases}$$

gdzie stała normująca $c = 4/(b - a)^2$. Wsk. Rozważyć najpierw gęstość $U_1 + U_2$.

10.6 Pokazać, że

$$X = \log(U/(1-U))$$

ma rozkład *logistyczny* o dystrybuancie $F(x) = 1/(1 + e^{-x})$.

10.7 Podać procedurę na generowanie liczby losowej z gęstością postaci

$$f(x) = \sum_{j=1}^N a_j x^j, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

gdzie $a_j \geq 0$. Wsk. Obliczyć gęstość $\max(U_1, \dots, U_n)$ i następnie użyć metody superpozycji.

10.8 Podać procedurę generowania zmiennej losowej X z gęstością $f(x) = n(1-x)^{n-1}$.

10.9 Podać procedurę generowania liczby losowej o rozkładzie Cauchego.

10.10 Niech F jest dystrybuantą rozkładu Weibulla $W(\alpha, c)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-cx^\alpha), & x \geq 0 \end{cases}.$$

Pokazać, że

$$X = \left(\frac{-\log U}{c} \right)^{1/\alpha}$$

ma rozkład $W(\alpha, c)$.

10.11 Podać przykład pokazujący, że c w metodzie eliminacji (zarówno dla przypadku dyskretnego jak i ciągłego) nie musi istnieć skończone.

10.12 a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(\lfloor U^{-1} \rfloor = i) = \frac{1}{i(i+1)}$, dla $i = 1, 2, \dots$

b) Podać algorytm i obliczyć prawdopodobieństwo akceptacji na wygenerowanie metodą eliminacji dyskretnej liczby losowej X z funkcją prawdopodobieństwa $\{p_k, k = 1, 2, \dots\}$, gdzie

$$p_k = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

10.13 Podaj metodę generowania liczby losowej z gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -\infty < x < 0 \\ e^{-2x}, & 0 < x < \infty \end{cases}$$

10.14 *Rozkład beta* $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ ma gęstość

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < x < 1.$$

gdzie beta funkcja jest zdefiniowana przez

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Przy założeniu $\alpha, \beta > 1$ podać algorytm wraz z usadnieniem generowania liczb losowych $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ metodą eliminacji. Wsk. Przyjąć $g(x) = \mathbf{1}(0 < x < 1)$.

10.15 Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z gęstością $f(x, y)$ i niech $B \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem takim, że

$$\int_B f(x, y) dx dy < \infty.$$

Pokazać, że $X|(X, Y) \in B$ ma gęstość

$$\frac{\int_{y:(x,y) \in B} f(x, y) dy}{\int_B f(x, y) dx dy}.$$

10.16 [Marsaglia [?]] Niech J ma funkcję prawdopodobieństwa $(p_m)_{m=0}^\infty$ z $p_m = 1/(ce^{m+1})$ i $c = 1/(e - 1)$. Niech I ma funkcję prawdopodobieństwa $(q_n)_{n=1}^\infty$, gdzie $q_n = c/n!$. Zakładamy, że I, J oraz $U_1, \dots$ są niezależne. Pokazać, że $X = J + \min(U_1, \dots, U_I)$ ma rozkład wykładniczy $\text{Exp}(1)$. Powyższa własność rozkładu wykładniczego daje możliwość napisania algorytmu na generowanie wykładniczych zmiennych losowych bez użycia kosztownej funkcji $\log$.³

³A jak szybko generować liczby losowe I, J ?

Zadania laboratoryjne

- 10.17 Podać wraz z uzasadnieniem jak generować liczbę losową X o rozkładzie $U[a, b]$. Napisać MATLABowska funkcję $\text{Unif}(a, b)$ na generowanie liczby losowej X .
- 10.18 W literaturze aktuarialnej rozważa się *rozkład Makehama* przyszłego czasu życia T_x dla x -latka z ogonem rozkładu

$$\mathbb{P}(T_x > t) = e^{-At - m(c^{t+x} - c^x)}.$$

Napisać procedurę $\text{Makeham}(A, m, c, x)$ generowania liczb losowych o takim rozkładzie. Przyjąć $A = 5 \cdot 10^{-4}$, $m = 7.5858 \cdot 10^{-5}$ oraz $c = \log 1.09144$ (tzw. G82). Wsk. Zinterpretować probabilistycznie jaką operacja prowadzi do faktoryzacji $e^{-At - m(c^{t+x} - c^x)} = e^{-At} e^{-m(c^{t+x} - c^x)}$. Zastanowić się czy rozkład z ogonem dystrybucyjny $e^{-m(c^{t+x} - c^x)}$ można przedstawić jako warunkowy.

- 10.19 Napisać procedurę $\text{Poi}(\text{lambda})$ generowania liczb losowych o rozkładzie $\text{Poi}(\lambda)$. Uzasadnić jej poprawność.
- 10.20 Napisać funkcję $\text{Gamma}(a, b)$ na generowanie liczby losowej o rozkładzie $\text{Gamma}(a, b)$. Wsk. Algorytm musi się składać z dwóch części: $a < 1$ oraz $a \geq 1$.
- 10.21 Przeprowadzić następujący eksperyment z MATLABowskimi generatorami. Obliczyć objętość kuli $k = 30$ wymiarowej o promieniu 1 i porównać z wynikiem teoretycznym na objętość takiej kuli:

$$V_k = \frac{2}{k} \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}.$$

- 10.22 Porównać dwie procedury generowania rozkładu wielomianowego $M(n, \mathbf{a})$. Pierwsza metoda jest uogólnieniem metody ad hoc dla rozkładu dwumianowego (patrz podrozdział 4). Polega na generowaniu niezależnych wektorów losowych przyjmujących wartości $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (jedynek na i -tym miejscu) z prawdopodobieństwem a_i i następnie zsumowanie liczby jedynek na każdej koordynacie. Natomiast druga metoda wykorzystuje unikalną własność rozkładu wielomianowego wektora $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$: rozkład X_{j+1} pod warunkiem $X_1 = k_1, \dots, X_j = k_j$ jest

dwumianowy $B(n - k_1 - \dots - k_j, a_{j+1}/(a_1 + \dots + a_j))$ i X_1 ma rozkład $B(n, a_1)$. Do generowania rozkładu dwumianowego wykorzystać procedurę ITR. Przeprowadzić eksperyment z $n = 10$ i $a_1 = 0.55, a_2 = \dots = a_{10} = 0.05$. Porównać szybkość tych procedur mierząc wykonanie 100 000 replikacji dla każdej z nich.

10.23 Napisać procedurę generowania liczb losowych z gęstością

$$f(x) = pe^{-x} + \frac{(1-p)}{0.2} \left(\frac{1}{1 + (x/0.2)} \right)^{1.2}.$$

Zrobić wykładniczy i paradowski wykres kwantylowy dla 300 zmiennych losowych wygenerowanych z $p = 0.05$ i $p = 0.95$.

Projekt

- 10.24 Napisać procedurę MATLAB-owską generowania liczby losowej $N(0,1)$ (tablicy liczb losowych $N(0,1)$)
- (i) metodą eliminacji (`randnrej`),
 - (ii) 1-szą metodą Boxa-Mullera (`randnbmfirst`),
 - (iii) 2-gą metodą Boxa-Mullera (`randnbmsec`). Przeprowadzić test z pomiarem czasu 100 000 replikacji dla każdej z tych metod oraz MATLAB-owskiej `randn`. Użyć instrukcji `TIC` i `TOC`. Każdy eksperyment zacząć od `rand('state',0)`. Sporządzić raport z eksperymentów. Zrobić wykresy kwantylowe dla każdej z procedur z 1000 replikacji.
- 10.25 Używając rozważania z ćwiczenia 10.16 napisać algorytm na generowanie liczb losowych o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(1)$. Zastanowić się jak optymalnie generować liczby losowe I, J z zadania 10.16. Przeprowadzić test z pomiarem czasu 100 000 replikacji dla tej metody i metody ITM ($-\log U$). Każdy eksperyment zacząć od `rand('state',0)`. Sporządzić raport z eksperymentów.

Zadania teoretyczne

- 1.1 Przypuśćmy, że chcemy obliczyć I metodą Monte Carlo, gdzie $I = I' I''$ oraz wiemy, że $I' = \mathbb{E} Y'$, $I'' = \mathbb{E} Y''$. Niech $Y'_1, \dots, Y'_R$ będzie R niezależnych replikacji Y' oraz niezależnie od nich niech $Y''_1, \dots, Y''_R$ będzie R niezależnych replikacji Y'' . Pokazać, że następujące estymatory są nieobciążone dla I :

$$\hat{Z}_1 = \left(\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y'_i \right) \left(\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y''_i \right)$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y'_i Y''_i .$$

Pokazać, że $\hat{Z}_1$ ma mniejszą wariancję.

- 1.2 Zanalizować przykład I.2.8 pod kątem odpowiedniości liczby replikacji. Jak dobrać δ aby poza $k = 27$ na wykresie I.2.2 trudno byłoby rozróżnić krzywą wysumulowaną od teoretycznej. Czy lepiej byłoby przyjąć $\delta = 0.05$.
- 1.3 [Igła Buffona a liczba π] W zadaniu Buffona o liczbie π oblicza się prawdopodobieństwo

$$p = \frac{2L}{\pi}$$

przecięcia jednej z równoległych prostych oddalonych od siebie o 1 przez igłę o długości L . Wiadomo, że przeprowadzając niezależne eksperymenty mamy nieobciążony estymator $\hat{p}$ prawdopodobieństwa p . Wtedy $\pi = (2L)/p$. Zaplanować obliczenie $f(I)$ z dokładnością $b = 0.01$ na poziomie $\alpha = 0.05$, gdy $f(x) = (2L)/x$ oraz $I = \mathbb{E} Y$, gdzie $Y = 1$, gdy igła przecina linię, natomiast $Y = 0$ w przeciwnym razie.

- 1.4 Ile należy zrobić replikacji na poziomie ufności $\alpha = 0.05$ aby błąd $b = \sigma/50$.
- 1.5 Wiadomo, że jeśli $Y_1, \dots, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $N(0,1)$ to

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2/\sigma^2 - n + 1}{\sqrt{2n-2}} \xrightarrow{D} N(0, 1) ,$$

gdy $n \rightarrow \infty$; patrz [?], str. 27. Natomiast jeśli zmienne są o rozkładzie dowolnym, to

$$\sqrt{n} \left(\hat{S}_n^2 - \sigma^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mu_4 - \sigma^4)$$

gdzie $\mu_4 = \mathbb{E} (Y - \mathbb{E} Y)^4$ jest momentem centralnym rzędu 4. Ile należy zrobić prób aby wyestymować σ^2 z dokładnością do 5-ciu % na poziomie $\alpha = 0.05$.

Zadania laboratoryjne

- 1.6 a. Napisać algorytm na wygenerowanie punktu losowego o rozkładzie jednostajnym $U(\Delta)$ w trójkącie Δ o wierzchołkach $(1, 1), (-1, -1), (1, -1)$. Policzyc średnią liczbę liczb losowych $U_1, U_2, \dots$ do wygenerowania jednej liczby V o rozkładzie $U(\Delta)$.
b. Napisać algorytm na obliczenia całki

$$\int_{\Delta} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

zgrubną metodą MC.

- 1.7 Wyprodukować 10 000 przedziałów ufności postaci $(\hat{Y}_n \pm \frac{z_{1-\alpha/2} \hat{S}_n}{\sqrt{n}})$ dla $Y = \mathbf{1}(U \leq u)$, $n = 1000$ oraz $I = \mathbb{E} Y$ następnie sprawdzić jaki procent tych przedziałów pokryje $I = 0.5, 0.9, 0.95$ gdy odpowiednio $u = 0.5, 0.9, 0.95$. Wyjaśnić otrzymane wyniki.

Projekt

- 1.8 Obliczyć składkę netto z dokładnością do czterech miejsc po przecinku, dla 40-latka w ubezpieczeniu na całe życie, gdy techniczna stopa procentowa wynosi $r = 0.05$, przyszły czas życia $T = T_{40}$ ma rozkład Makehama (można użyć funkcji Makeham z zadania II.10.18). Wzór na składkę netto gdy suma ubezpieczenia wynosi 1 zł jest

$$\pi = \frac{\mathbb{E} e^{-rT}}{\mathbb{E} \int_0^T e^{-rt} dt} .$$

Zadania teoretyczne

- 5.1 W szczelinowym modelu ALOHA z $\lambda = 0.31$ oraz $h = 0.1$ policzyć funkcję

$$\phi(k) = \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | X_n = k] = \lambda - b_1(k)a_0 - b_0(k)a_1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

gdzie A_i mają rozkład Poissona. Zrobić wykres. Czy można na podstawie tego wykresu skomentować rys. 3.3 i 3.4.

Zadania laboratoryjne

- 5.2 Wygenerować $A_1, A_2, \dots$ w odcinku $[0, 1000]$, gdzie $A_0 = 0$ oraz $A_1 < A_2 < \dots$ są kolejnymi punktami w niejednorodnym procesie Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t) = a(2 - \sin(\frac{2\pi}{24}t))$. Przyjąć $a = 10$. Niech $A(t)$ będzie liczbą punktów w odcinku $[0, t]$. Zastanowić się jaki ma rozkład $A(t)$ i znaleźć jego średnią. Policzyć z symulacji $A(1000)/1000$ – średnią liczbą punktów na jednostkę czasu, zwaną asymptotyczną intensywnością $\bar{\lambda}$. Porównać z

$$\int_0^{24} \lambda(t) dt / 24.$$

- 5.3 Kontynuacja zad. refzad.proc.Poissona. Wygenerować $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{1000}$, gdzie $\tau_i = A_i - A_{i-1}$, $A_0 = 0$ oraz $A_1 < A_2 < \dots$ są kolejnymi punktami w niejednorodnym procesie Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t) = a(2 - \sin(\frac{2\pi}{24}t))$. Przyjąć $a = 10$. Obliczyć średni odstęp między punktami $\hat{\tau} = \sum_{i=1}^{1000} \tau_i / 1000$.

- 5.4 Zbadać jak szybko $P(L(t) = 1)$ w alternującym procesie *on-off* zbiega do współczynnika gotowości. Rozpatrzyć kilka przypadków:

- $F_{\text{on}} F_{\text{off}}$ są wykładnicze,
- $F_{\text{on}} F_{\text{off}}$ są Erlanga odpowiednio $\text{Erl}(3, \lambda)$ i $\text{Erl}(3, \mu)$,
- $F_{\text{on}} F_{\text{off}}$ są Pareto.

Przyjąć $\mathbb{E} T^{\text{on}} = 1$ i $\mathbb{E} T^{\text{off}} = 2$.

- 5.5 Obliczyć średnią $\mathbb{E} L(i)$ ($i = 1, \dots, 10$) w systemie M/M/1 z
- $\lambda = 1/2$ i $\mu = 1$,
 - $\lambda = 1$ i $\mu = 1$, jeśli $L(0) = 0$.
- 5.6 Przeprowadzić symulację dobroci *czystego protokołu ALOHA*. Bardziej dokładnie, przypuśćmy, że pakiety przybywają zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ i wszystkie są długości 1. W przypadku kolizji, każdy z pakietów jest retransmitowany po czasie wykładniczym z parametrem μ . Zakładamy, że wszystkie zmienne są niezależne. W modelu musimy obliczyć następujące zmienne. Na podstawie symulacji zastanowić się nad przepustowością γ przy tym protokole.
- 5.7 Napisać algorytm na symulację protokołu ETHERNET.
- 5.8 Obliczyć średni czas do awarii systemu składającego się z N elementów połączonych równolegle z jednym konserwatorem, jeśli czas życia elementu ma rozkład wykładniczy $\text{Exp}(1/2)$, natomiast czas naprawy przez konserwatora $\text{Exp}(1)$). Policzyc dla $N = 1, \dots, 10$. Porównać z średnim czasem do awarii systemu składającego się z N elementów połączonych równolegle, ale bez konserwatora.

Projekt

Projekt 3 Zbadać dobroć protokołu szczelinowa ALOHA ze względu na parametr λ . Przez symulację znaleźć wartości krytyczne dla λ i określić typowe zachowanie się protokołu. Zbadać inną modyfikację protokołu szczelinowa ALOHA, w której dopuszcza się, że użytkownicy mają też dodatkową wiedzę o stanie X_n , i wtedy w n -tej szczelinie przyjmować $h = 1/X_n$. Czy ten protokół może być stabilny, tzn. mający przepustowość $\gamma > 0$; jeśli tak to kiedy.

Projekt 4 Produkt jest składany z komponentów na dwóch stanowiskach. Po zakończeniu prac na pierwszym stanowisku jest dalej opracowywany na drugim, z którego wychodzi gotowy produkt. Produkcja trwa każdego dnia przez 8 godzin. Na początku dnia w magazynie jest przygotowane n_1 komponentów, które sukcesywnie są dostarczane na stanowisko pierwsze. Przed stanowiskiem drugim może oczekiwać co najwyżej k_1 , w przeciwnym razie praca na stanowisku pierwszym jest zablokowana. Ile należy przygotować komponentów n_1 i jak duży bufor k_1 aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym 0.9 była zapewniona produkcja przez cały dzień, tj. 8 godzin. Jak duży należy przygotować magazyn $n_1 + k_1$. Przyjąć, że

- czas pracy na pierwszym stanowisku ma rozkład Erlanga $\text{Erl}(2,10)$,
- natomiast na drugim stanowisku jest mieszkanką rozkładów wykładniczych z gęstością $0.8 \times 9e^{-9x} + 0.2 \times 3e^{-3x}$,
- koszty magazynowania przed rozpoczęciem pracy czy w oczekiwaniu na prace na drugim stanowisku są liniowe od $n_1 + k_1$.

Projekt 5 Mamy dwa następujące warianty pracy 2-ch procesorów.
1. Dwa procesory pracują osobno. Zadania napływają do i -tego procesu zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ_i i mają rozkład rozmiaru $G^{(i)}$. Niech $D^{(i)}(t)$ będzie liczbą zadań obsłużonych przez i -ty procesor to chwili t . Zakładamy, że $\lambda_i < \int_0^\infty x dG^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$. Wtedy przepustowość

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D^{(i)}(t)/t = \lambda_i,$$

a więc dwa procesory, jeśli pracują osobno mają przepustowość $\lambda_1 + \lambda_2$.

2. Możemy tak zmienić konstrukcję, że w przypadku gdy jeden z procesów nie ma pracy, to drugi pracuje z szybkością 2.

Zbadać o ile efektywniejszy jest zparowany procesor, w zależności od intensywności wejścia i rozkładów rozmiarów zadań. Przyjąć $\lambda_1 = 1$.

Projekt 6 W banku jest c stanowisk obsługi. Klienci zgłaszają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ i ich czasy obsługi mają rozkład G . Zbadać następujące protokoły kolejowania.

1. Przed każdym okienkiem jest osobna kolejka. Klienci wybierają okienko w sposób losowy.
2. Przed każdym okienkiem jest osobna kolejka. Klienci wybierają kolejne okienko, tj. $1, 2, \dots, c, 1, 2, \dots$
3. Jest jedna kolejka i gdy nadchodzi czas klient idzie do akurat uwolnionego okienka.