

Rozdział XI

Zarys teorii ubezpieczeń wielostanowych

¹ Dotychczas mieliśmy do czynienia z prostymi modelami, gdzie po wystąpieniu zdarzenia (wyjścia ze statusu) jest wypłacone świadczenie i na tym ubezpieczenie się kończy. Istnieje jednakże potrzeba wyceny bardziej skomplikowanych ubezpieczeń lub rent, gdy to czy jest płacona składka, wypłacana renta lub ubezpieczenie zależy od sytuacji w danej chwili, którą dalej nazywamy *stanem*. *Przejścia* pomiędzy stanami mogą być dozwolone lub zabronione w zależności od kontekstu zadania. Stany zmieniają się z czasem w trakcie ubezpieczenia. Będziemy na razie² zajmować się tylko modelami ze skończoną liczbą stanów, ponumerowanymi od $0, 1, \dots, m$ a przestrzeń stanów oznaczać przez $\mathcal{E}$. Oczywiście w konkretnych modelach jest też możliwe oznaczanie stanów literami. Przez $J(t)$, $t \geq 0$ ³ będziemy oznaczali przebieg zmian stanów życiowych wraz ze zmianą *parametru czasu* t . Parametr t może przebiegać na przykład liczby nieujemne jak to jest wyżej, może być z przedziału $[0, n]$ lub liczbą nieujemną całkowitą. Na przykład dla (x) -latka rozpatrujemy proces stanów życia $J_x(t)$ z parametrem t należącym do $[0, \omega - x]$, ale podobnie jak to było w przypadku prawa śmiertelności Makehama w modelowaniu teoretycznym przyjmować będziemy czas $t \geq 0$. Jeśli

¹Rozdział przygotowany przez T. Rolskiego, stanowi w zamierzeniu rozdział 10 książki Błaszczyszyna i TR (2004).

²Na przykład w ubezpieczeniach chorobowych intensywność powrotu do aktywności jest zależna od wieku osoby w momencie zachorowania jak i od czasu od momentu zachorowania.

³A może zamiast $J(t)$ pisać $S(t)$.

$J(t) = j$, to oznacza że w chwili t życia osoba jest w stanie j . Śmierć jest tylko jednym ze stanów i jeśli nie rozróżniamy jej powodu przypisujemy jej stan o numerze 0. Nietety nie ma możliwości deterministycznego opisu zmian stanów w czasie życia. Dlatego też przyjmuje się, że $J(t)$ jest zmienną losową dla każdego t . Wtedy $J(t)$, $t \geq 0$ jest *procesem stochastycznym*. A więc przebieg procesu jest funkcją od zdarzenia elementarnego z przestrzeni zdarzeń elementarnych. Jeśli to zdarzenie elementarne ustalimy, to wtedy ten przebieg, jako funkcja od t nazywa się *realizacją procesu*. Wszystkie rysunki przebiegu zmian stanów, które tu przedstawimy są więc realizacjami.⁴ Będziemy zakładać, że realizacje są kawałkami stałe, tj. z definicji⁵ ze skończoną liczbą skoków w przedziałach skończonych prawostronnie ciągłe i z lewostronnymi granicami. Takie założenie jest możliwe do przyjęcia dla procesów rozpatrywanych w tym rozdziale. Stan z którego nie ma wyjścia nazywamy *stanem pochłaniającym* lub *absorbującym*. Zbiór wszystkich stanów absorbujących oznaczamy przez $\mathcal{E}_{\text{abs}}$. Pozostałe stany nazywamy *przechodnimi*⁶ i oznaczamy je przez $\mathcal{E}_{\text{tra}}$. Stan śmierci – D jest oczywiście stanem pochłaniającym.

Najlepiej będzie jak rozpatrzymy na początku znane już sytuacje ale w nowym ujęciu. Z przyszłym czasem życia $T = T_x$ będziemy wiązać proces stochastyczny

$$J_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } T_x \leq t, \\ 1 & \text{jeśli } T_x > t. \end{cases} \quad (0.1)$$

Ten model będziemy zwali “aktywny–śmierć”, w skrócie AD. Równolegle możemy rozważyć proces z czasem dyskretnym. Niech $K = K_x$ będzie obcietym przyszłym czasem życia (x)-latka. Wtedy definiujemy

$$J_x(k) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } K_x < k, \\ 1 & \text{jeśli } K_x \geq k, \end{cases} \quad (0.2)$$

$k = 0, 1, \dots$ W tym przykładzie $\mathcal{E}_{\text{abs}} = \{0\}$, $\mathcal{E}_{\text{tra}} = \{1\}$. Na przykład ubezpieczenia/renty rozpatrywane w rozdziałach od 3 do 7 są związane z przejściem procesu $J(t)$ ze stanu 1 do stanu 0. Natomiast co się dzieje dalej w wcześniejszych rozdziałach już nas nie interesowało. Ten model będziemy nazywać *życie – śmierć*. Jednakże istnieją polisy, z których wypłaca się świadczenia po śmierci ubezpieczonego; patrz zadanie 5.3 gdzie rozpatruje się tzw. ubezpieczenie zaopatrzenia rodzinnego [family income insurance].

⁴Trzeba dać jakiś przykładowy przebieg realizacji. TR

⁵Jeśli tylko używamy słowa “kawałkami” to będzie oznaczać, że tych kawałków jest skończona ilość w skończonych przedziałach.

⁶A może tranzytywnymi. TR

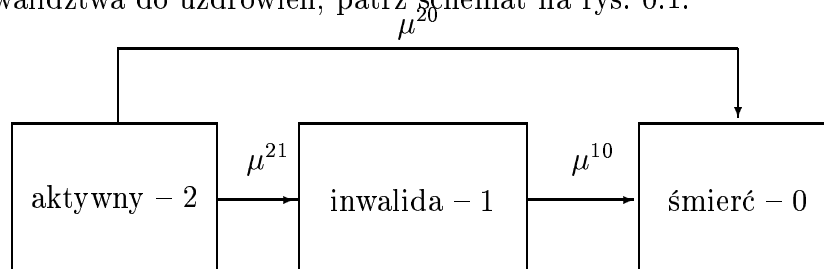
W przypadku wielu ryzyk $j = 1, \dots, m$ rozważamy T_x, J_x jak w rozdziale X. Wprowadzamy proces $J_x(t)$ przyjmujący wartości $1, 0_1, \dots, 0_m$, gdzie

$$J_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } T_x > t \\ 0_1 & \text{jeśli } T_x \leq t, J_x = 1 \\ 0_2 & \text{jeśli } T_x \leq t, J_x = 2 \\ \dots & \dots \\ 0_m & \text{jeśli } T_x \leq t, J_x = m \end{cases} \quad (0.3)$$

W tym przykładzie $\mathcal{E}_{\text{abs}} = \{0_1, \dots, 0_m\}$.

Celem tego rozdziału jest przeglądnięcie pojęć i metod związanych z ubezpieczeniami opartych o przebieg zmian stanów. Przykładem takich zmian jest proces $J(t)$ dla modelu “aktywny – niesprawny – śmierć”, który będzie w skrócie oznaczony AID. W tym modelu stany są “aktywny” (na przykład może płacić składkę), “niesprawny” (na przykład nie może płacić składki lub należy mu się renta) oraz “śmierć”. Będziemy też oznaczać te stany odpowiednio A, I oraz D lub 2, 1 oraz 0. Będziemy rozważać dwa typy modelu AID

- bez uzdrowień, w którym jedynymi możliwymi przejściami są z A do I, z A do D, z I do D; jest możliwość uzdrowień, tj. przejść ze stanu inwalidztwa do uzdrowień; patrz schemat na rys. 0.1.

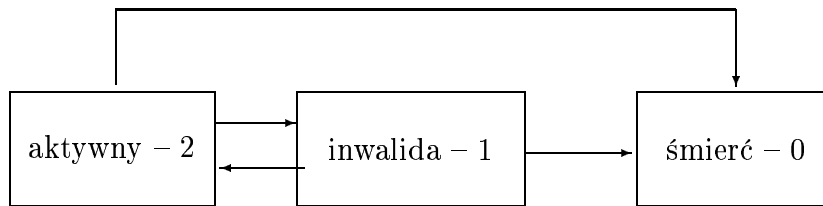


Rysunek 0.1: Schemat przejść w ubezpieczeniu na życie i inwalidztwo bez uzdrowień

- z uzdrowieniami, w którym dopuszcza się też jest możliwość uzdrowień, tj. przejść ze stanu inwalidztwa do uzdrowień; patrz schemat na rys. 0.2.

Niech będzie dany przebieg zmian stanów życia $J_x(t)$, $t \geq 0$ dla (x) -latka. Na tej bazie definiujemy proces

$$I_x^i(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w chwili } t \text{ stan życia jest } i \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$



Rysunek 0.2: Schemat przejść w ubezpieczeniu na życie i inwalidztwo (AID) z uzdrowieniami

Przez $N_x^{ij}(t)$ będziemy oznaczali inną ważną wielkość liczącą wszystkie przejścia ze stanu i do j do czasu t ; $i \neq j$. Zauważmy, że $N_x^{ij}(t)$ jako funkcja od t jest niemalejąca, kawałkami stała, ze skokami jednostkowymi. Na bazie procesów $I_x^i(t)$ oraz $N_x^{ij}(t)$, $t \geq 0$ można wyrazić wielkości aktuarialne.

Przez ${}_t p_x^{ij}$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że (x) -latek będąc w stanie i po czasie t będzie w stanie j . W szczególności p_x^{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że (x) latek będąc w stanie i po roku będzie w stanie j . Również przez ${}_s p_{[x]+t}^{ij}$ oznaczamy prawdopodobieństwo tego, że wchodząc do systemu jako (x) -latek będąc po czasie t w stanie i jeszcze po czasie s będzie w stanie j . Formalnie

$${}_t p_x^{ij} = \Pr(J_x(t) = j | J_x(0) = i),$$

oraz

$${}_s p_{[x]+t}^{ij} = \Pr(J_x(t+s) = j | J_x(t) = i).$$

Ponadto wprowadza się *intensywności przejścia*,

$${}_h p_{[x]+t}^{ij} - 1(i=j) = h\mu_{[x]+t}^{ij} + o(h),$$

jeśli tylko t jest punktem ciągłości $\mu_{[x]+t}^{ij}$. Należy zauważyć, że istnienie wielkości $\mu_{[x]+t}^{ij}$ nie jest w ogólności oczywiste. W szczególnym przypadku przyjęcia modelu Markowskiego można pokazać, że pojęcie intensywności ma sens. Będziemy też zakładać, że funkcje $\mu_{[x]+t}^{ij}$ są kawałkami ciągłe, przez co rozumiemy, że są prawostronnie ciągłe z lewsotronnymi granicami i skończoną liczbą skoków w skończonych przedziałach.

Przykład 0.1 Rozważmy ubezpieczenie terminowe na n lat dla (x) -latka, którego życie podlega zmianom jak w modelu AID z uzdrowieniami. Stanami więc będą A, I oraz D. Będziemy przyjmować, co jest zresztą naturalne, że w

momencie wystawienia polisy ubezpieczony jest w stanie A, tzn. $J_x(0) = A$. W umowie ubezpieczenia, jest on zwolniony z płacenia składki w okresach inwalidztwa, natomiast w momentach przejścia ze stanu aktywności do stanu inwalidztwa wypłacane jest świadczenie jednostkowe. Jeśli $\bar{\Pi}$ jest stałą intensywnością składki, to OWA pobranych składek wynosi, przy natężeniu stopy procentowej δ ,

$$\begin{aligned}\bar{a}^{AA} &= E \left[\int_0^n e^{-\delta t} I_x^A(t) dt \right] \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \Pr(J_x(t) = A | J_x(0) = A) dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{AA} dt.\end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz napisaniem wzoru na OW wypłaconych świadczeń. Najprościej byłoby wypisać wszystkim kolejne momenty $\tau_1^{21} < \tau^{21} < \dots$ przejść procesu $J_x(t)$ z A do I, jednakże nie jest to wygodne, choćby z powodu, że liczba tych przejść, choć skończona, jest losowa. Wtedy OW wynosiłaby $\sum_{j \geq 1} e^{\delta \tau_j^{21}}$. Z pewnych względów jest wygodniejsze zapisanie OW świadczeń przy użyciu całki Riemanna-Stieltjesa:

$$\int_0^n e^{-\delta t} dN_x^{AI}(t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} e^{-\delta k/\ell} (N_x^{AI}((k+1)/\ell) - N_x^{AI}(k/\ell)). \quad (0.4)$$

Ze względu na założenie o skończonej liczbie skoków w skończonych przedziałach, stąd można pokazać (to nie jest formalny argument tutaj), że

$$\begin{aligned}E N^{AI}([t, t+h]) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \Pr(N^{AI}([t, t+h]) = \ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{j' \in \mathcal{E}} \ell \Pr(N^{AI}([t, t+h]) = \ell, J_x(t+h) = j' | J_x(t) = A) \Pr(J_x(t) = A | J_x(0) = A) \\ &= \Pr(N^{AI}([t, t+h]) = 1, J_x(t+h) = I | J_x(t) = A) \Pr(J_x(t) = A | J_x(0) = A) \\ &\quad + \sum_{\ell > 1} \sum_{j' \neq A} \ell \Pr(N^{AI}([t, t+h]) = \ell, J_x(t+h) = j' | J_x(t) = i) \Pr(J_x(t) = A | J_x(0) = A) \\ &= {}_t p_x^{AA} \Pr(J(t+h) = I | J(t) = A) + o(h),\end{aligned}$$

skąd mamy

$$\mathbb{E} N^{ij}(\mathrm{d}t) = {}_t p_x^{\mathrm{AA}} \mu_{[x]+t}^{ij} \mathrm{d}t.$$

A więc, OWA wypłaconych świadczeń wynosi

$$A^{\mathrm{AI}} = \mathbb{E} \left[\int_0^n e^{-\delta t} \mathrm{d}N_x^{\mathrm{AI}}(t) \right]$$

Teraz biorąc pod uwagę, że $J_x(t)$ jest kawałkami stałe mamy

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{AI}} &= \\ &= \mathbb{E} \left[\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} e^{-\delta k/\ell} (N_x^{\mathrm{AI}}((k+1)/\ell) - N_x^{\mathrm{AI}}(k/\ell)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} e^{-\delta k/\ell} 1(J_x(k/\ell) = \mathrm{A}, J_x((k+1)/\ell) = \mathrm{I}) | J_x(0) = \mathrm{A} \right] \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} e^{-\delta k/\ell} \mathbb{E} [1(J_x(k/\ell) = \mathrm{A}, J_x((k+1)/\ell) = \mathrm{I}) | J_x(0) = \mathrm{A}] \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{\mathrm{AA}} \mu_{[x]+t}^{\mathrm{AI}} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że pierwsza równość wynika z tego, że $J_x(t)$ ma kawałkami stałe realizacje, natomiast druga jest uzasadniona przez twierdzenie Lebesgue'a o ograniczonej zbieżności, a trzecia wynika z definicji ([??mundef??]) oraz twierdzenia II.1.7. Stąd mamy, że jeśli $\bar{\Pi}$ jest składką netto, to musi być spełnione równanie równoważności

$$\int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{\mathrm{AA}} \mu_{[x]+t}^{\mathrm{AI}} \mathrm{d}t - \bar{\Pi} \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{\mathrm{AA}} \mathrm{d}t$$

skąd

$$\bar{\Pi} = \frac{\int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{\mathrm{AA}} \mu_{[x]+t}^{\mathrm{AI}} \mathrm{d}t}{\int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x^{\mathrm{AA}} \mathrm{d}t}.$$

Jak się okaże procesy stochastyczne $J(t)$ z wzorów 0.1 i 0.3, są niejednorodnymi w czasie łańcuchami Markowa; patrz przykład 2.3 oraz zadanie 5.4. Natomiast w zadaniu 5.5 proponujemy czytelnikowi udowodnić, że jeśli $x = x_1 = \dots = x_m$, to $J(t)$ z przykładu (5.1) jest również łańcuchem Markowa. Jest to jednym z powodów, że naturalnym narzędziem do modelowania przebiegu stanów życia są niejednorodne w czasie łańcuchy Markowa.

W następnym podrozdziale przedstawimy zarys teorii łańcuchów Markowa, zarówno w dyskretnym jak i w ciągłym czasie.⁷ Użycie tej teorii wydaje się naturalne, jeśli przyjmiemy za naturalne użycie metody ryzyk konkurujących⁸ z rozdziału X.1.3 Natomiast w podrozdziale 3 będą podane równania rekurencyjne i układy równań różniczkowych Thielego dla polis ubezpieczeniowo-rentowych zmieniających się w zależności od stanów.

1 Łańcuchy Markowa i wielostanowe tablice trwania życia

1.1 Łańcuchy Markowa w czasie dyskretnym

Przez *macierz stochastyczną* rozumie się macierz $\mathbf{P} = (r^{ij})_{i,j=0}^m$, której elementy są nieujemne i taką, że $\sum_{j=0}^m r^{ij} = 1$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, m$. W zadaniu 5.4 polecamy czytelnikowi pokazać, że iloczyn macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną.⁹ Mówimy, że ciąg zmiennych losowych J_k , $k = 0, 1, \dots$ jest *łańcuchem Markowa* zdefiniowanym przez rodzinę macierzy stochastycznych zwanych tutaj *macierzami przejścia*:¹⁰ $\mathbf{P}(k) = (r^{ij}(k))_{i,j=0}^m$, $k = 0, 1, \dots$, jeśli dla dowolnego $k = 1, 2, \dots$, oraz $i, j, j_\ell = 0, 1, \dots, m$

$$\Pr(J(1) = j_1, \dots, J(k) = j_k | J(0) = j_0) = r^{j_0 j_1}(0) r^{j_1 j_2}(1) \dots r^{j_{k-1} j_k}(k-1). \quad (1.5)$$

Jeśli $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}(1) = \dots$, to mamy przypadek łańcucha *jednorodnego w czasie*. Dla naszych celów rzadko taki przypadek jest potrzebny, w odróżnieniu od większości zastosowań, gdzie występują prawie wyłącznie jednorodne w czasie łańcuchy Markowa.¹¹

Fakt 1.1

$$\begin{aligned} \Pr(J_k = j | J_0 = i) &= \sum_{j_1, \dots, j_{k-1} \in \mathcal{E}} r^{i j_1}(0) \dots r^{j_{k-1} j}(k-1) \\ &= (\mathbf{P}(0) \mathbf{P}(1) \dots \mathbf{P}(k-1))^{ij}. \end{aligned}$$

⁷Niektórzy autorzy przy rozpatrywaniu w czasie ciągłym mówią proces Markowa.

⁸współzawodniczących. TR

⁹Będziemy wykorzystywali notację macierzową. A więc $(\mathbf{P})^{ij} = r^{ij}$.

¹⁰Przeważnie mówi się o macierzach prawdopodobieństw przejścia.

¹¹Wyjaśnić. TR

Fakt 1.2 Ciąg zmiennych losowych jest łańcuchem Markowa zadany przez rodzinę macierzy przejścia $\mathbf{P}(k)$, $k = 0, 1, \dots$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $i, j, i_k \in \mathcal{E}$ oraz $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \Pr(J_k = j | J_0 = j_0, J_1 = j_1, \dots, J_{k-1} = i) \\ = \Pr(J_k = j | J_{k-1} = i) = r^{ij}(k-1). \end{aligned} \quad (1.6)$$

jeśli tylko

$$\Pr(J_0 = j_0, J_1 = j_1, \dots, J_{k-1} = i) > 0. \quad (1.7)$$

Dla $k < k'$ definiujemy $\mathbf{P}(k, k') = \mathbf{P}(k)\mathbf{P}(k+1)\dots\mathbf{P}(k'-1)$. Możemy zauważyć, że $\Pr(J(k') = j | J(k) = i) = (\mathbf{P}(k)\mathbf{P}(k+1)\dots\mathbf{P}(k'-1))^{ij}$. Odpowiednik rodziny macierzy stochastycznych $\mathbf{P}(k, k')$ będzie odgrywał ważną rolę w teorii w czasie ciągłym.

Przykład 1.3 Pokażemy, że ciąg zmiennych losowych $J_x(k)$, $k = 0, 1, \dots$ zdefiniowany w (0.2) jest łańcuchem Markowa i wyjaśnimy rolę hipotezy HA. Zauważmy wprawdzie, że ciąg $j_0, \dots, j_{k-1}, i$ musi być niemalejący, bo w przeciwnym razie warunek (1.7) nie jest spełniony. Biorąc to pod uwagę piszemy:

$$\begin{aligned} \Pr(J_x(k) = 1 | J_x(0) = 1, \dots, J_x(k-1) = 1) \\ = \Pr(J_x(k) = 1 | J_x(k-1) = 1) = p_{[x]+k-1}. \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Pr(J_x(k) = 0 | J_x(0) = 1, \dots, J_x(k-1) = 1) \\ = \Pr(J_x(k) = 0 | J_x(k-1) = 1) = q_{[x]+k-1}. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy $i = 0$

$$\begin{aligned} \Pr(J_x(k) = 1 | J_x(0) = 1, \dots, J_x(k-1) = 0) \\ = \Pr(J_x(k) = 1 | J_x(k-1) = 0) = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\Pr(J_x(k) = 0 | J_x(0) = 1, \dots, J_x(k-1) = 0) = 1$$

Stąd mamy, że macierz przejścia

$$\mathbf{P}(k-1) = \begin{pmatrix} p_{[x]+k-1} & q_{[x]+k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Łańcuchy Markowa w czasie ciągłym

2.1 Definicja i podstawowe własności

Będziemy mówić, że proces stochastyczny $J(t)$, $0 \leq t$ jest łańcuchem Markowa z czasem ciągłym, jeśli dla dowolnego ciągu $0 = t_0 < t_1 < \dots$, ciąg $J_k = J(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$ jest łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym. Przy definicji łańcucha Markowa z czasem ciągłym $J(t)$, gdzie parametr czasowy należy do przedziału $y_0 \leq t \leq y_1$ w definicji powyżej musimy ograniczyć się do $y_0 \leq t_0 < t_1 < \dots \leq y_1$.

Rozpatrzmy rodzinę macierzy stochastycznych $\mathbf{P}(t, t') = (r^{ij}(t, t'))_{i,j \in \mathcal{E}}$ gdzie $0 \leq t \leq t'$, spełniających

- $\mathbf{P}(t, t) = \mathbf{I}$ dla wszystkich $t \geq 0$,
- dla wszystkich $0 \leq t \leq s \leq t'$,

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{P}(t, s)\mathbf{P}(s, t'). \quad (2.8)$$

Każda taka rodzina macierzy $\mathbf{P}(t, t')$, $0 \leq t \leq t'$ nazywa się *macierzą funkcji przejścia*. Natomiast równanie macierzowe (2.8) nazywa się *równaniem Chapmana–Kolmogorowa*. Jeśli $\mathbf{P}(0, y) = \mathbf{P}(t, t + y)$, dla wszystkich $t, y \geq 0$, to mówimy, że łańcuch Markowa jest *jednorodnym w czasie łańcuchem*. Dla naszych celów potrzebne jednak będą niejednorodne w czasie łańcuchy Markowa i dlatego dalej nie będziemy tego zaznaczali. Można pokazać następujący fakt.

Fakt 2.1 *Proces stochastyczny $J(t)$, $t \geq 0$ jest łańcuchem Markowa jeśli istnieje macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$, $0 \leq t \leq t'$*

$$\begin{aligned} \Pr(J(t_1) = i_1, \dots, J(t_k) = i_k | J(t_0) = i_0) \\ = r^{i_0 i_1}(t_0, t_1) r^{i_1 i_2}(t_1, t_2) \dots r^{i_{k-1} i_k}(t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (2.9)$$

dla $k = 0, 1, \dots$, $i_0, i_1, \dots, i_k \in \mathcal{E}$, $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_k$.

Dowód zostawiamy czytelnikowi w zadaniu [??zt10.2.1??]. Podobnie do faktu 1.2 możemy udowodnić następujące warunek równoważny.

Fakt 2.2 *Proces stochastyczny $J(t), t \geq 0$ jest łańcuchem Markowa wtedy i tylko wtedy gdy istnieje macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$, $0 \leq t \leq t'$ taka, że dla wszystkich $k \geq 1$, $i_0, i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_k$,*

$$\begin{aligned} \Pr(J(t_k) = i_k \mid J(t_{k-1}) = i_{k-1}, \dots, J(t_1) = i_1, J(t_0) = i_0) \\ = r^{i_{k-1}, i_k}(t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (2.10)$$

jeśli tylko $\Pr(J(t_{k-1}) = i_{k-1}, \dots, J(t_1) = i_1, J(t_0) = i_0) > 0$.

Dowód podobny do dowodu faktu 1.2 zostawiamy czytelnikowi w zadaniu 2.3.

Przykład 2.3 Niech $T = T_0$ będzie przyszłym czasem życia osoby nowourodzonej i definiujemy proces $J(t)$ jak w (0.1). Będziemy zakładać hipotezę HJP. Przypomnijmy, że $\Pr(T > x) = \exp(-\int_0^x \mu(s) ds)$. Pokażemy, że proces $J(t)$ jest łańcuchem Markowa. Mianowicie dla $n \geq 1$, $i_0, i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ i $t_0 < t_1 < \dots < t_n$,

$$\begin{aligned} \Pr(J(t_n) = i_n \mid J(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, J(t_1) = i_1, J(t_0) = i_0) \\ = \Pr(J(t_n) = i_n \mid J(t_{n-1}) = i_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

jeśli tylko $\Pr(J(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, J(t_1) = i_1, J(t_0) = i_0) > 0$. Dalej mamy

$$\Pr(J(t_n) = i_n \mid J(t_{n-1}) = i_{n-1}) = \begin{cases} p_{t_n - t_{n-1}} & i_n = 1 \\ q_{t_n - t_{n-1}} & i_n = 0 \end{cases}$$

Będziemy zakładać następującą różniczkowalność macierzy funkcji przejścia: dla $t \geq 0$

$$\boldsymbol{\mu}_t = \lim_{t' \downarrow t} \frac{\mathbf{P}(t, t') - \mathbf{I}}{t' - t} = \lim_{t' \uparrow t} \frac{\mathbf{P}(t', t) - \mathbf{I}}{t - t'} \quad (2.12)$$

istnieje poza być może przeliczalną liczbą punktów. To założenie pociąga że macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$ jest ciągła w t dla wszystkich $t \geq 0$, tj.¹² $\lim_{t' \downarrow 0} \mathbf{P}(0, t') = \mathbf{I}$ i

$$\lim_{t' \downarrow t} \mathbf{P}(t, t') = \lim_{t' \uparrow t} \mathbf{P}(t', t) = \mathbf{I} \quad (2.13)$$

dla $t > 0$.

¹²A co w t' . TR

Fakt 2.4 Dla $i \neq j$, $\mu_t^{ij} \geq 0$, $\mu_t^{ii} \leq 0$ oraz dla $i \in \mathcal{E}$ oraz $t \geq 0$,

$$\sum_{j \in \mathcal{E}} \mu_t^{ij} = 0. \quad (2.14)$$

Ponadto, jeśli $i \in \mathcal{E}_{\text{abs}}$ jest stanem pochłaniającym, to $\mu^{ij} = 0$, $j \in \mathcal{E}$.

Dowód

Będziemy dalej pisać

$$\mu_t^i = \sum_{j \neq i} \mu_t^{ij}.$$

Rozpisana macierz intensywności przejścia wygląda więc następująco: W dalszej części w przykładach będziemy numerować wiersze i kolumny od m do 0:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} -\mu_t^0 & \mu_t^{01} & \dots & \mu_t^{0m} \\ \mu_t^{10} & -\mu_t^1 & \dots & \mu_t^{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_t^{m0} & \mu_t^{m1} & \dots & -\mu_t^m \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że w języku łańcucha Markowa $J(t)$ mamy $1 - \Pr(J(t+h) \neq i | J(t) = i) = h\mu_t^i + o(h)$, jeśli tylko $\boldsymbol{\mu}_t$ jest ciągła w t . Podobnie, dla $i \neq j$ mamy $\Pr(J(t+h) = j | J(t) = i) = h\mu_t^{ij} + o(h)$.

Funkcję $\boldsymbol{\mu}_t$, $t \geq 0$ nazywa się *macierzą intensywności przejścia* łańcucha Markowa $J(t)$. Ze względu na późniejsze potrzeby będziemy zakładać następujące własności macierzy intensywności przejścia:

(A.i) $\boldsymbol{\mu}_t$ jest też *kawałkami ciągła*, przez co rozumiemy funkcję prawostronnie ciągłą z lewostronnymi granicami i w skończonych przedziałach skończoną liczbą skoków.

(A.ii) dla $i \neq j$

$$\sup_{a \leq t \leq b, h > 0} \frac{r^{ij}(t, t+h)}{h} < \infty,$$

co pociąga, że μ_t^{ij} jest lokalnie ograniczona.

Założenia (A.i) oraz (A.ii) pozwalają na udowodnienie w teorii procesów stochastycznych, że realizacje są kawałkami stałe, prawostronnie ciągłe i z lewostronnymi granicami.¹³

¹³RSST ?

Przykład 2.5 Kontynuując przykład [??proces1B??] znajdziemy macierz intensywności μ_t dla procesu Markowa z (0.1). Będziemy zakładać, że funkcja gęstości $f_x(t)$ jest kawałkami ciągła. Zauważmy, że korzystając ze wzorów (III.1.7) oraz (III.1.14) mamy ¹⁴

$$r^{\text{AD}}(t, t') = \Pr(T_0 \leq t' \mid T_0 > t) = 1 - \exp\left(-\int_t^{t'} \mu_s ds\right), \quad t' \geq t$$

i stąd

$$\mu_t^{\text{AD}} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{r^{\text{AD}}(t, t')}{t' - t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\int_t^{t'} \mu_s ds}{t' - t} = \mu_t$$

gdzie ostatnia równość jest prawdziwa tylko wtedy gdy μ_t jest ciągła w t . Podobnie możemy pokazać, że

$$\boldsymbol{\mu}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_t & -\mu_t \end{pmatrix},$$

dla wszystkich punktów ciągłości t funkcji μ_t . W punktach nieciągłości definiujemy wartości $\boldsymbol{\mu}$ tak aby powstała funkcja była prawostronnie ciągła z lewostronnymi granicami. Zauważmy na koniec, że wiersz związany z stanem pochłaniającym 0 jest zerowy.

Przykład 2.6 Do modelowania teoretycznych problemów aktuarialnych stosuje się macierz intensywności Makehama, która ma wejścia $\mu_t^{ij} = A + Bc^t$, gdzie jak w podrozdziale III.2.2 postuluje się $B \geq 0$, $A \geq -B$ i $c > 1$.

Przykład 2.7 Rozważmy teraz proces 5.1 zdefiniowany przez T_x, J_x z rozdziału X i przyjmujemy hipotezę HJP-D. Można pokazać, że macierz intensywności przejścia

$$\begin{pmatrix} \mu_t^{11} & \mu_{x+t}^{10_1} & \cdots & \mu_{x+t}^{10_m} \\ \mu_{x+t}^{0_1 1} & \mu_{x+t}^{0_1 0_1} & \cdots & \mu_{x+t}^{0_1 0_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{x+t}^{0_m 1} & \mu_{x+t}^{0_m 0_1} & \cdots & \mu_{x+t}^{0_m 0_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{x+t}^{(\tau)} & \mu_{x+t}^{(1)} & \cdots & \mu_{x+t}^{(m)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Uwaga Naturalne w praktyce aktuarialnej jest przyjęcie maksymalnego czasu życia. Wtedy dla (x) -latka proces stanów życia $J_x(t)$ jest rozpatrywany

¹⁴Dać więcej detali. TR

na $[0, \omega - x]$, co pociąga za sobą aby do czasu $\omega - x$ proces doszedł do stanu pochłaniającego. Zakładamy hipotezę HJP-M która mówi, że $\mu_{[x]+t} = \mu_{x+t}$. W przypadku jedyne go stanu pochłaniającego 0 musi być spełnione¹⁵

$$\int_{\omega-\epsilon}^{\omega} \mu_t^j dt = \infty, \quad j = 1, \dots, m.$$

Pozornie to się kłóci z założeniem lokalnej ograniczoności, ale przez odpowiednią zmianę czasu (trik matematyczny), można model rozpatrywany w tym podrozdziale sprowadzić do analizy modelu na skończonym przedziale czasu.

Twierdzenie 2.8 *W punktach ciągłości μ_t istnieją pochodne cząstkowe $\partial/(\partial t)r^{ij}(t, t')$ oraz $\partial/(\partial t')r^{ij}(t, t')$ i funkcje przejścia spełniają następujący układ równań różniczkowych:*

$$\frac{\partial}{\partial t} r^{ij}(t, t') = - \sum_{k \in \mathcal{E}} \mu_t^{ik} r^{kj}(t, t') \quad (2.16)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t'} r^{ij}(t, t') = \sum_{k \in \mathcal{E}} r^{ik}(t, t') \mu_{t'}^{kj}. \quad (2.17)$$

Dowód Niech $h > 0$ będzie takie, że $t + h \leq t'$. Z (2.8) mamy

$$\begin{aligned} r^{ij}(t + h, t') - r^{ij}(t, t') &= r^{ij}(t + h, t') - \sum_{k \in \mathcal{E}} r^{ik}(t, t + h) r^{kj}(t + h, t') \\ &= r^{ij}(t + h, t') (1 - r^{ii}(t, t + h)) - \sum_{k \neq i} r^{ik}(t, t + h) r^{kj}(t + h, t'). \end{aligned}$$

Korzystając z ciągłości mamy¹⁶

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (r^{ij}(t + h, t') - r^{ij}(t, t')) = - \sum_{k \in \mathcal{E}} \mu_t^{ik} r^{kj}(t, t').$$

W ten sam sposób,

$$\lim_{h \uparrow 0} h^{-1} (r^{ij}(t - h, t') - r^{ij}(t, t')) = - \sum_{k \in \mathcal{E}} \mu_t^{ik} r^{kj}(t, t').$$

¹⁵Czy to wystarczy !.TR

¹⁶Rozpisać. TR

co dowodzi (2.16). Dowód (2.17) jest podobny. $\square$

Równania (2.16) i (2.17) są nazywane odpowiednio *retrospektywnym równaniem Kolmogorowa* i *prospektywnym równaniem Kolmogorowa*. W notacji macierzowej możemy te równania zapisać następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t, t') = -\boldsymbol{\mu}_t \mathbf{P}(t, t') \quad (2.18)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{P}(t, t') = \mathbf{P}(t, t') \boldsymbol{\mu}_{t'} \quad (2.19)$$

z warunkiem brzegowym $\mathbf{P}(t, t) = \mathbf{I}$ dla $t \geq 0$. Możemy po scałkowaniu tych równania otrzymać następujący rezultat:

Przykład 2.9 Kontynuujemy przykład [???) i dla modelu AD napiszemy prospektywny układ równań Kolmogorowa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} r^{AA}(t, t') &= r^{AA}(t, t') \mu_{t'}^{AA} + r^{AD}(t, t') \mu_{t'}^{DA} \\ &= -r^{AA}(t, t') \mu_t \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} r^{AD}(t, t') &= r^{AA}(t, t') \mu_{t'}^{AD} + r^{AD}(t, t') \mu_{t'}^{DD} \\ &= r^{AA}(t, t') \mu_t \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} r^{DA}(t, t') &= r^{DA}(t, t') \mu_{t'}^{AD} + r^{DD}(t, t') \mu_{t'}^{DA} \\ &= -r^{DA}(t, t') \mu_t \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} r^{DD}(t, t') &= r^{DA}(t, t') \mu_{t'}^{AD} + r^{DD}(t, t') \mu_{t'}^{DD} \\ &= r^{DA}(t, t') \mu_{t'} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Teraz musimy jeszcze napisać warunki brzegowe

$$r^{AA}(t, t) = 1 \quad (2.24)$$

$$r^{AD}(t, t) = 0 \quad (2.25)$$

$$r^{DA}(t, t) = 0 \quad (2.26)$$

$$r^{DD}(t, t) = 1 \quad (2.27)$$

Rozwiązując równania Kolmogorowa otrzymujemy

Twierdzenie 2.10 *Spełnione jest następujące równanie całkowe: $\mathbf{P}(t, t')$*

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \int_t^{t'} \boldsymbol{\mu}_s \mathbf{P}(s, t') ds \quad (2.28)$$

i

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \int_t^{t'} \mathbf{P}(t, s) \boldsymbol{\mu}_s ds. \quad (2.29)$$

dla wszystkich $0 \leq t < t'$.

Można pokazać, że istnieje jedyna macierz funkcji przejścia $\mathbf{P}(t, t')$ rozwiązująca (2.28) i (2.29). Wynikać to będzie z następującego twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie 2.11 *Przy założeniach twierdzenia 2.10 mamy $0 \leq t \leq t'$,*

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{t'} \int_{s_1}^{t'} \dots \int_{s_{n-1}}^{t'} \boldsymbol{\mu}_{s_1} \dots \boldsymbol{\mu}_{s_n} ds_n \dots ds_1 \quad (2.30)$$

lub

$$\mathbf{P}(t, t') = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{t'} \int_t^{s_1} \dots \int_t^{s_{n-1}} \boldsymbol{\mu}_{s_1} \dots \boldsymbol{\mu}_{s_n} ds_n \dots ds_1. \quad (2.31)$$

Uwaga Załóżmy, że $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}_{[t]}$, dla wszystkich t . To założenie jest odpowiadające hipotezie HCFM dla przypadku modelu wielostanowego. Wtedy mamy dla $0 \leq u \leq 1$

$$\mathbf{P}(x, x+n+u) = \mathbf{P}(x, x+n) (\mathbf{P}(x+n, x+n+1))^u;$$

por. wzór (III.3.10). Ponadto

$$\mathbf{P}(x, x+n) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\mu}_{x+k}\right);$$

por. wzór III.3.9. Aby to pokazać, rozważmy

Jeśli $i \in \mathcal{E}_{\text{abs}}$ to $\mu_t^{ij} \equiv 0$. Jeśli proces do czasu ω jest w $\mathcal{E}_{\text{abs}}$ to musi być spełnione

$$\int_0^{\omega} \mu_s^i ds = \infty, \quad i \neq \mathcal{E}_{\text{abs}}.$$

2.2 Wielostanowe tablice trwania życia

2.3 Spojrzenie na ewolucję łańcucha Markowa

Rozpatrzmy łańcuch Markowa $J(t)$ zadaną macierzą intensywności przejścia μ_t . Zakładamy hipotezę HJP-M. Tutaj podamy opis ewolucji tego łańcucha. Wprowadza się

$$r^{ii}(t, t') = \Pr(\text{proces jest w stanie } i \text{ w odcinku } [t, t'] | J(t) = i).$$

Można pokazać, że

$$r^{ii}(tt') = e^{-\int_t^{t'} \mu_s^i ds}.$$

Stąd mamy, że jeśli proces w chwili x jest w stanie i oraz T_x^i jest czasem wyjścia z tego stanu, to ta zmienna ma gęstość $\mu_{x+t}^i \exp[-\int_x^{x+t} \mu_s^i ds]$. Wzorem rozdziału X wprowadzamy zmienną J_x^i , która jest numerem stanu po wyjściu ze stanu i . Można pokazać, że gęstość $T_x^i, J_x^i = j$ jest dana przez $\mu_{x+t}^{ij} \exp[-\int_x^{x+t} \mu_s^i ds]$.

Niech $\tau_1, \tau_2, \dots$ będą kolejnymi momentami skoków procesu $J(t)$ oraz $Z_j = J(\tau_j)$ będzie stanem tuż po skoku (pamiętajmy o założeniu prawostronnej ciągłości i granic z lewej strony). Okazuje się, że ciąg zmiennych losowych (τ_j, Z_j) , $j = 1, 2, \dots$ jest łańcuchem Markowa. Zauważmy, że ze względu na kawałkami ciągle realizacje, mamy $J(\tau_j - 0) = Z_{j-1}$.

2.4 Procesy liczące zdefiniowane przez łańcuch Markowa

Zacniemy od przypadku czasu dyskretnego. Niech J_k będzie łańcuchem Markowa. Definiujemy dwa procesy: dla $i \neq j$

$$I_k^i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w chwili } k \text{ stan życia jest } i \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

i

$$I_k^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w chwili } k \text{ jest przejście z } i \text{ do } j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

W języku indykatorów możemy to precyzyjnie zapisać $I_k^{(i)} = 1(J_k = i)$ oraz $I_k^{(ij)} = 1(J_k = i, J_{k+1} = j)$.

Lemat 2.12 Niech $J_0 = i_0$ oraz $i \neq j$. Jeśli $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$, to

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k I_k^i \right] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_{0k}^{i_0 i},$$

oraz

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k I_k^{ij} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{i_0 i}(0, k) r^{ij}(k, k+1),$$

Dowód

Ciągiem liczącym przejścia z i do j (w przypadku ciągłym to będzie miało sens gdy $i \neq j$) do czasu k nazywa się □

$$N_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} I_{\ell}^{ij}.$$

Rozpatrzmy teraz łańcuch Markowa $J(t)$ w czasie ciągłym i zdefiniujmy proces liczący $N^{ij}(t)$ przejścia z i do j do chwili t . Musimy oczywiście założyć $i \neq j$. Formalnie procesem liczącym jest

$$N^{ij}(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} 1(\tau_{\ell} \leq t), \quad t \geq 0.$$

Lemat 2.13 Niech $c(t)$, $0 \leq t \leq n$ będzie funkcją kawałkami ciągłą (i stąd ograniczoną). Niech $J(0) = i_0$. Wtedy

$$\mathbb{E} \left[\int_0^n c(t) 1(J(t) = i) dt \right] = \int_0^n c(t) r_{0t}^{i_0 i} dt,$$

oraz

$$\mathbb{E} \left[\int_0^n c(t) dN^{ij}(t) \right] = \int_0^n c(t) r^{i_0 i}(0t) \mu_t^{ij} dt.$$

Dowód Bedziemy rozpatrywać rodzinę łańcuchów Markowa w czasie dyskretnym $J_k(\ell) = J(\frac{k}{\ell})$, $k = 0, 1, \dots$ z macierzą przejścia $(r^{ij}(\ell))_{i,j=0}^m$. Dowód będzie wynikał po pokazaniu następujących równości:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} c(k/\ell) r^{i_0 i}(0, \frac{k}{\ell}) \mu_{\frac{k}{\ell}}^{ij} = \int_0^n c(t) r^{i_0 i}(0, t) \mu_t^{ij} dt, \quad (2.32)$$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \left(\sum_{0 \leq k \leq n\ell} c(k/\ell) r_{(0, k/\ell)}^{i0i} r^{ij}(k/\ell, (k+1)/\ell) - \frac{1}{\ell} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} c(k/\ell) r^{i0, i}(0, \frac{k}{\ell}) \mu_{k/\ell}^{ij} \right) = 0, \quad (2.33)$$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n\ell} c(k/\ell) 1(J(k/\ell) = i, J(k/\ell) = j) = \int_0^n c(t) dN^{ij}(t), \quad (2.34)$$

oraz

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} E \left[\sum_{0 \leq k \leq n\ell} c(k/\ell) 1(J(k/\ell) = i, J(k/\ell) = j) \right] = E \left[\int_0^n c(t) dN^{ij}(t) \right]. \quad (2.35)$$

2.5 Dalsze przykłady

Zajmiemy się teraz modelem Markowskim zmian stanów życia AID dla (x)-latka bez uzdrowień. W modelu mamy trzy stany: 2 - aktywny (zdolny do płacenia składek), 1 - inwalida oraz 0 - śmierć i macierz intensywności przejścia jest¹⁷ z $\mu_t^{21} = \sigma_{x+t}$, $\mu_t^{12} = \rho_{x+t}$, $\mu_t^{20} = \mu_{x+t}$ i $\mu_t^{10} = \nu_{x+t}$; patrz schemat przejść na rys. 0.2. W szczególności jeśli $\mu_t^{12} = 0$ to mamy tak zwany model AID bez wyzdrowień; patrz schemat przejść na rys. 0.1.

Dla tego procesu jeszcze można znaleźć jawną postać $\mathbf{P}(t, t')$. Mianowicie

$$r^{22}(t, t') = e^{-\int_t^{t'} \mu_s^2 ds} \quad (2.36)$$

$$r^{11}(t, t') = e^{-\int_t^{t'} \mu_s^1 ds} \quad (2.37)$$

$$r^{21}(t, t') = \int_t^{t'} \mu_s^{21} e^{-\int_t^s \mu_v^2 dv} e^{-\int_s^{t'} \mu_v^1 dv} ds \quad (2.38)$$

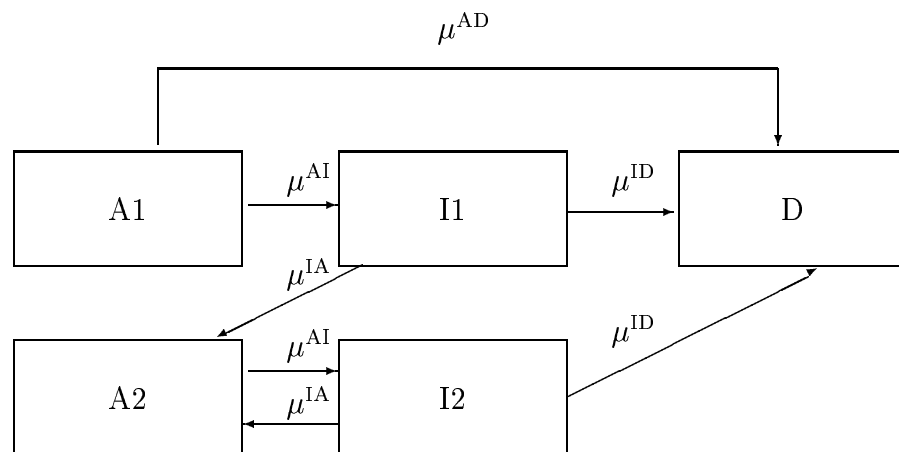
$$r^{10}(t, t') = 1 - e^{-\int_t^{t'} \mu_s^1 ds} \quad (2.39)$$

Jeśli ponadto przyjmiemy $\mu_t^{21} = \mu_{x+t}$ and $\sigma_{x+t} = \mu_t^{20} = \mu_t^{10}$ dla pewnych nieujemnych funkcji μ_{x+t} i σ_{x+t} , to

$$\begin{aligned} r^{22}(tt') &= \exp\left(-\int_t^{t'} (\mu_{x+s} + \sigma_{x+s}) ds\right), \\ r^{21}(tt') &= \exp\left(-\int_t^{t'} \sigma_{x+s} ds\right) \left(1 - \exp\left(-\int_t^{t'} \mu_{x+s} ds\right)\right), \\ r^{11}(tt') &= \exp\left(-\int_t^{t'} \sigma_{x+s} ds\right). \end{aligned}$$

¹⁷A może μ_{x+t}^{21} . TR

Uwaga Pokażemy teraz jak zaprojektować następujące ubezpieczenie terminowe na n lat dla (x) -latka na sumę ubezpieczenia 1. Dane są: funkcje intensywności: śmierci gdy jest aktywny μ_t^{AD} oraz śmierci podczas inwalidztwa μ^{ID} . Ponadto dana jest intensywność przejścia ze stanu aktywności do inwalidztwa μ_t^{AI} oraz wyzdrowienia μ_t^{IA} . Ubezpieczony płaci składki w stałej wysokości Π w stanie aktywności, ale jest z tego obowiązku zwolniony za pierwszym byciem w stanie "I". Przy wszystkich pozostałych okresach inwalidztwa ubezpieczony musi pokrywać składkę. W celu analizy tego ubezpieczenia proponujemy następujące stany życia: A1 – aktywny w momencie zawarcia ubezpieczenia, I1 – pierwszy raz w stanie inwalidztwa, A2 – aktywność po pierwszym ozdrowieniu, I2 – inwalidztwa po raz drugi, itd., D – śmierć. Będziemy te stany numerować następująco: A1=4, I1=3, A2=2, I2=1, D=0. Zakładamy, że stany życia przebiegają zgodnie z procesem Markowa $J_x(t)$ ze stanami $\mathcal{E} = \{A1, A2, I1, I2, D\}$. Schemat przejść jest dany na rysunku 2.3. Aby obliczyć OWA składki piszemy



Rysunek 2.3: Schemat przejść w AID z wyróżnionym pierwszym stanem inwalidztwa

$$\begin{aligned}
\Pi a &= \Pi \mathbb{E} \left[\int_0^n v^t 1(J_x(t) \in \{A1, A2, I2\}) dt \mid J_x(0) = A1 \right] \\
&= \Pi \int_0^n v^t (\Pr(J_x(t) = A1 \mid J_x(0) = A1) dt \\
&\quad + \int_0^n v^t \Pr(J_x(t) = A2 \mid J_x(0) = A1) dt) \\
&\quad + \Pi \int_0^n v^t \Pr(J_x(t) = I2 \mid J_x(0) = A1) dt) .
\end{aligned}$$

Teraz policzymy OWA wypłaconych świadczeń. Mamy

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{E} \left[\int_0^n v^t d(N^{A1 \ D}(t) + N^{A2 \ D}(t) + N^{I1 \ D}(t) + N^{I2 \ D}(t)) \right] \\
&= \int_0^n v^t ({}_t p_x^{A1 \ A1} \mu_t^{A1 \ D} + {}_t p_x^{A1 \ A2} \mu_t^{A2 \ D} + {}_t p_x^{A1 \ I1} \mu_t^{I1 \ D} + {}_t p_x^{A1 \ I2} \mu_t^{I2 \ D}) dt .
\end{aligned}$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z Lematu 2.13. Teraz jeśli chcemy aby Π było składką netto, to z równania równoważności mamy $\Pi = A/a$.

Zadania teoretyczne

- 2.1 Pokazać, że iloczyn dwóch macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną.
- 2.2 Udowodnić fakt 2.1.
- 2.3 Udowodnić fakt 2.2.
- 2.4 Pokazać, że jeśli łańcuch ma dokładnie jeden stan pochłaniający 0, to na to aby z prawdopodobieństwem 1 nastąpiło pochłonięcie wystarczy aby $\mu_t^{ij} > 0$ oraz $\int_0^\infty \mu_t^j dt = \infty$, $j = 1, \dots, m$.

3 Wielostanowe modele ubezpieczeniowo rentowe

Przez ${}_t p_x^{ij}$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że (x) -latek będąc w stanie i po czasie t będzie w stanie j . W szczególności ${}_t p_x^{ij}$ oznacza prawdopodobieństwo, że x latek będąc w stanie i po roku będzie w stanie j . W tym podrozdziale

będziemy zakładać, że stany życia są Markowskie, i dla ułatwienia że odpowiednio HJP-M lub HA-M jest w mocy. To założenie nie jest potrzebne do napisania warunku na składkę netto, ale tzw. równanie Chapmana-Kołmogorowa jest użyte do wyprowadzenia odpowiednio równania rekurencyjnego lub różniczkowego Thielego. W oznaczeniach poprzedniego podrozdziału ${}_t p_x^{ij} = r^{ij}(x, x+t)$.

3.1 Model dyskretny

Rozpatrujemy następujący model dyskretny. W chwili $k = 0, 1, \dots$ po zawarciu ubezpieczenia (x) -latek jest w stanie $J_x(k)$. Przyjmujemy HA-M, tzn $p_{[x]+t}^{ij} = p_{x+t}^{ij}$. Rozpatrzmy teraz wielostanowy model ubezpieczeniowo rentowy. Będziemy więc rozpatrywali następującą polisę:¹⁸

- stany $0, 1, \dots, m$, gdzie 0 jest stanem pochłaniającym (śmierć),
- na okres n ,
- jeśli między k a $k+1$ następuje zmiana stanu z i na j , to w chwili $k+1$ wypłacone zostaje świadczenie b_{k+1}^{ij} ; zauważmy, że $b_k^{ii} = 0$,
- jeśli $J_x(k) = i$, to wypłacona jest renta z intensywnością c_k^i ,
- jeśli $J_x(k) = i$, to wpłacona jest składka z intensywnością Π_k^i ,
- jeśli ubezpieczony przeżył do momentu n , to wypłacone jest jednorazowe świadczenie w wysokości b_n^i ,
- obowiązuje czynnik dyskonta v .

Ponieważ w jednym momencie, teoretycznie możliwe są wpłaty i wypłaty, więc wprowadzamy wielkość wynikową:

$$H_k^i = \begin{cases} c_k^i - \Pi_k^i & 0 \leq k < n \\ b_n^i & n = k \end{cases}$$

Zauważmy pewną logiczną trudność, że nie rejestrujemy w modelu dyskretnym przejść w ciągu roku. Jak zwykle wypiszmy najpierw prospektywną

¹⁸Komentarz o składkach i rentach.

stratę

$$\begin{aligned} {}_kL &= \sum_{j' \neq j} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v^{\ell+1} b_{\ell+1}^{jj'} 1(J_x(k+\ell) = j, J_x(k+\ell+1) = j') \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_{k+\ell}^j 1(J_x(k+\ell) = j). \end{aligned}$$

Prospektywną rezerwę składki w chwili k nazywamy

$${}_k\mathcal{V}^i = \mathbb{E} [{}_kL | J_x(k) = i], \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Twierdzenie 3.1

$$\begin{aligned} {}_k\mathcal{V}^i &= \sum_{j \neq j'} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_{k+\ell}^j {}_\ell p_{x+k}^{ij}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ponadto mamy następujące równanie rekurencyjne Thielego

$${}_k\mathcal{V}^i - H_k^i = v \sum_{j \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ij} ({}_{k+1}\mathcal{V}^j + b_{k+1}^j),$$

dla $0 \leq k < n$ oraz ${}_n\mathcal{V}^j = b_n^j$ dla $j \in \mathcal{E}$.

Dowód Korzystając z tego, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [1(J_x(k+\ell) = j, J_x(k+\ell+1) = j') | J_x(k) = i] &= {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} \\ \mathbb{E} [1(J_x(k+\ell) = j) | J_x(k) = i] &= {}_\ell p_{x+k}^{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_k\mathcal{V}^i &= \mathbb{E} \left[\sum_{j \neq j'} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v^{\ell+1} b_{\ell+1}^{jj'} 1(J_x(k+\ell) = j, J_x(k+\ell+1) = j') | J_x(k) = i \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_{k+\ell}^j 1(J_x(k+\ell) = j) | J_x(k) = i \right] \\ &= \sum_{j \neq j'} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_\ell^j {}_\ell p_{x+k}^{ij} \end{aligned}$$

Aby udowodnić równanie rekurencyjne Thiego piszemy

$$\begin{aligned}
 {}_k\mathcal{V}^i &= \sum_{j,j' \in \mathcal{E}: j' \neq j} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v^{\ell+1} b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'} \\
 &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell=0}^{n-k} v^\ell H_{k+\ell}^j p_{x+k}^{ij} \\
 &= v \sum_{j,j' \in \mathcal{E}: j' \neq j} (b_{k+1}^{jj'} 1(j=i) p_{x+k}^{jj'} + \sum_{\ell=1}^{n-k-1} v^\ell b_{k+\ell+1}^{jj'} {}_\ell p_{x+k}^{ij} p_{x+k+\ell}^{jj'}) \\
 &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} (H_k^j 1(j=i) + v \sum_{\ell=1}^{n-k} v^{\ell-1} H_{k+\ell}^j {}_\ell p_{x+k}^{ij}).
 \end{aligned}$$

Teraz korzystamy z równania Chapmana-Kolmogorowa dla $\ell = 1, 2, \dots$

$${}_\ell p_{x+k}^{ij} = \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} {}_{\ell-1} p_{x+k+1}^{i'j},$$

oraz podstawienia $\ell' = \ell - 1$, skąd dalej mamy

$$\begin{aligned}
 v \sum_{i' \in \mathcal{E}} b_{k+1}^{ij'} p_{x+k}^{ii'} &+ v \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} \sum_{j,j' \in \mathcal{E}: j' \neq j} \sum_{\ell'=0}^{n-k-2} v^{\ell'+1} b_{k+1+\ell'+1}^{i'j} {}_{\ell'+1} p_{x+k+1}^{i'j} p_{x+k+1+\ell'}^{jj'} \\
 &+ H_k^i + v \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} \sum_{j \in \mathcal{E}} \sum_{\ell'=0}^{n-k-1} v^{\ell'} H_{k+1+\ell'}^j {}_{\ell'+1} p_{x+k+1}^{i'j} \\
 &= H_k^i + v \sum_{i' \in \mathcal{E}} p_{x+k}^{ii'} (b_{k+1}^{ii'} + {}_{k+1}\mathcal{V}^{i'}).
 \end{aligned}$$

□

Przykład 3.2 Rozważmy ubezpieczenie ogólne na życie na n lat dla (x) -latka, z funkcją korzyści b_k , składką Π_k , $k = 0, 1, \dots$ oraz wypłatą b_n^* wypłacaną jeśli ubezpieczony przeżyje n lat. Jeśli zakłada się hipotezę HA, to jest równoważne założeniu, że życie ma dwa stany $\mathcal{E} = \{0, 1\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 {}_{k+1}\mathcal{V}^1 + \Pi_k^1 &= v(p_{x+k}^{11}({}_{k+1}\mathcal{V}^1 + b_{k+1}^{11}) + p_{x+k}^{10}({}_{k+1}\mathcal{V}^0 + b_{k+1}^{10})) \\
 {}_{k+1}\mathcal{V}^0 + \Pi_k^0 &= v(p_{x+k}^{00}({}_{k+1}\mathcal{V}^0 + b_{k+1}^{00}) + p_{x+k}^{01}({}_{k+1}\mathcal{V}^1 + b_{k+1}^{01})).
 \end{aligned}$$

Oczywiście mamy $p_{x+k}^{11} = p_{x+k}$, $p_{x+k}^{10} = q_{x+k}$, $b_k^{11} = 0$, $b_k^{10} = b_k$, $p_{x+k}^{00} = 1$, $p_{x+k}^{01} = 0$ oraz warunki brzegowe: ${}_n\mathcal{V}^1 = b_n^*$, ${}_n\mathcal{V}^0 = 0$. Wtedy powyższy układ rekurencyjny Thiego sprowadza się do

$$\begin{aligned} {}_{k+1}\mathcal{V}^1 + \Pi_k^1 &= v(p_{x+k} {}_{k+1}\mathcal{V}^1 + q_{x+k} ({}_{k+1}\mathcal{V}^0 + b_{k+1})) \\ {}_{k+1}\mathcal{V}^1 + \Pi_k^0 &= v {}_{k+1}\mathcal{V}^0 \end{aligned}$$

Stąd korzystając z warunków brzegowych otrzymujemy, że ${}_k\mathcal{V}^0 = 0$, dla $k = 0, \dots, n$ oraz

$${}_{k+1}\mathcal{V}^1 + \Pi_k^1 = v(p_{x+k} {}_{k+1}\mathcal{V}^1 + q_{x+k} b_{k+1}),$$

co zostało wcześniej wyprowadzone w rozdziale VII.1.4.

3.2 Model ciągły

Jeśli dla osoby nowourodzonej zmiany stanów podlegają łańcuchowi Markowa $J(t)$ z macierzą intensywności przejścia μ_t , to dla (x) -latka, zmiany stanów życiowych podlegają łańcuchowi Markowa $J_x(t)$ z macierzą intensywności przejścia μ_{x+t} ; przyjmujemy HJP-M. Przypomnijmy, że

$${}_h p_{x+t}^{ij} - 1(i = j) = h\mu_{x+t}^{ij} + o(h),$$

jeśli tylko t jest punktem ciągłości μ_t^{ij} . Rozpatrzmy teraz wielostanowy model ubezpieczeniowo rentowy. Będziemy więc rozpatrywali następującą polisę:¹⁹

- stany $0, 1, \dots, m$, gdzie 0 jest stanem pochłaniającym (śmierć),
- na okres n ,
- jeśli w chwili t następuje zmiana stanu z i na j , to wypłacone zostaje świadczenie $b^{ij}(t)$; zauważmy, że $b^{ii}(t) = 0$,
- jeśli $J_x(t) = i$, to płacona jest renta z intensywnością $c^i(t)$,
- jeśli $J_x(t) = i$, to płacona jest składka z intensywnością $\Pi^i(t)$,
- jeśli ubezpieczony przeżył do momentu n , to wypłacone jest jednorazowe świadczenie w wysokości $b^i(n)$,

¹⁹Komentarz o składkach i rentach

- obowiązuje stałe natężenie stopy procentowej δ oraz zmiany stanów podlegają macierzy intensywności $\boldsymbol{\mu}_{x+t}$.

W dalszej części zakładamy, że funkcje $c^i(t)$ oraz $\Pi^i(t)$ są kawałkami ciągłe. Piszemy $H^i(t) = c^i(t) - \Pi^i(t)$.

Jak zwykle wypiszmy najpierw prospektywną stratę

$$\begin{aligned} {}_tL &= \sum_{j \neq j'} \int_t^n v^{s-t} b^{jj'}(s) \, dN^{jj'}(s) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} v^{n-t} b^j(n) 1(J_x(n) = j) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \int_t^n v^s H^j(s) 1(J_x(s) = j) \, ds. \end{aligned}$$

Prospektywną rezerwę składki w chwili k nazywamy

$${}_t\bar{\mathcal{V}}^i = E[{}_tL | J_x(t) = i], \quad 0 \leq t \leq n.$$

Pokażemy, że rezerwy spełniają układ równań różniczkowych Thielego. Nieformalnie można ten układ dostać rozpatrując model dyskretny z krokiem $h = 1/\ell$, tj. łańcuch Markowa $J(k/\ell)$, $k = 0, 1, \dots$. Wtedy zamiast czynnika dyskonta v musimy rozpatrzyć $\exp(\delta/\ell)$.

Twierdzenie 3.3 Dla $0 \leq t \leq n$

$$\begin{aligned} {}_t\bar{\mathcal{V}}^i &= \sum_{j, j' \in \mathcal{E}} \int_t^n v^{s-t} {}_{s-t}p_{x+t}^{ij} b^{jj'}(s) \mu_{x+s}^{jj'} \, ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} \int_t^n v^{s-t} H^j(s) {}_{s-t}p_{x+t}^{ij} \, ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{E}} v^{n-t} {}_{n-t}p_{x+t}^{ij} b^j(n). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ponadto rezerwa ${}_k\bar{\mathcal{V}}^i$, $i \in \mathcal{E}$, $0 \leq t \leq n$ spełnia następujący układ równań różniczkowych Thielego

$$\frac{d}{dt} {}_t\bar{\mathcal{V}}^i = -H^i(t) + \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i - \sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'} ({}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} - {}_t\bar{\mathcal{V}}^i + b^{ii'}(t)) \quad (3.42)$$

dla $0 \leq t \leq n$ oraz ${}_n\bar{\mathcal{V}}^j = b^j(n)$, dla $j \in \mathcal{E}$.

Układ równań różniczkowych 3.42, pamiętając, że $\mu_{x+t}^i = \sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'}$, możemy przepisać następująco:

$$\frac{d {}_t\bar{\mathcal{V}}^i}{dt} = -H^i(t) + \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i - \sum_{i' \in \mathcal{E}} \mu_{x+t}^{ii'} ({}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} + b^{ii'}(t)). \quad (3.43)$$

Przepisując równanie różniczkowe Thielego w postaci

$$H^i(t) = \frac{d}{dt} {}_t\bar{\mathcal{V}}^i - \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i + \sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'} ({}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} - {}_t\bar{\mathcal{V}}^i + b^{ii'}(t))$$

mamy

- $-H^i(t)$ jest intensywnością składki,
- $\frac{d {}_t\bar{\mathcal{V}}^i}{dt} - \delta {}_t\bar{\mathcal{V}}^i$ jest *składką oszczędnościową*,
- $\sum_{i' \neq i} \mu_{x+t}^{ii'} (b^{ii'}(t) + {}_t\bar{\mathcal{V}}^{i'} - {}_t\bar{\mathcal{V}}^i)$ jest *składką na ryzyko* (potrzebną do pokrycia ryzyka związanego z zmianami stanów).

Będziemy używać zapisu macierzowy:

$$\begin{aligned} {}_t\mathbf{P}_x &= ({}_tP_x^{ij})_{i,j=0}^m \\ \mathbf{B}(s) &= (b^{jj'}(s)\mu_{x+s}^{jj'})_{j,j' \in \mathcal{E}} \\ {}_t\bar{\mathbf{V}} &= ({}_t\bar{\mathcal{V}}^m, \dots, {}_t\bar{\mathcal{V}}^0)^T, \\ \mathbf{e} &= (1, \dots, 1)^T, \\ \mathbf{H}(t) &= (H^1(t), \dots, H^m(t))^T \\ \mathbf{b}(n) &= (b^1(n), \dots, b^m(n))^T \end{aligned}$$

Korzystając z równania Chapmana-Kołmogorowa mamy²⁰

$${}_{s-t}\mathbf{P}_{x+t} = ({}_t\mathbf{P}_x)^{-1} {}_s\mathbf{P}_x.$$

²⁰Co z singularnością?

Wtedy (3.41) możemy zapisać w zapisie wektorowo macierzowym:

$$\begin{aligned}
 {}_t\bar{\mathbf{V}} &= \int_t^n v^{s-t} {}_{s-t}\mathbf{p}_{x+t} \mathbf{B}(s) \, ds \mathbf{e} \\
 &\quad + \int_t^n v^{s-t} {}_{s-t}\mathbf{p}_{x+t} \mathbf{H}(s) \, ds \\
 &\quad + v^{n-t} {}_{n-t}\mathbf{p}_{x+t} \mathbf{b}(n) \\
 &= (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} \int_t^n v^s {}_s\mathbf{p}_x \mathbf{B}(s) \, ds \mathbf{e} \\
 &\quad + (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} \int_t^n v^s {}_s\mathbf{p}_x \mathbf{H}(s) \, ds \\
 &= (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} {}_n\mathbf{p}_x \mathbf{b}(n)
 \end{aligned}$$

Również równanie ([????]) w zapisie macierzowym jest

$$\frac{d}{dt} {}_t\mathbf{p}_x = {}_t\mathbf{p}_x \boldsymbol{\mu}_t.$$

W dowodzie twierdzenia potrzebujemy następujące fakty z rachunku macierzowego.

Lemat 3.4 *Niech $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$ będą macierzami $m \times m$ których elementy są różniczkowalne. Wtedy*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\right)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathbf{B}(t)\right).$$

Ponadto jeśli $\mathbf{A}(t)$ jest niesingularna to

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t))^{-1} = -\mathbf{A}(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\right)\mathbf{A}(t)^{-1}.$$

Jesteśmy teraz przygotowani na pokazanie dowodu twierdzenia 3.3.

Dowód Różniczkując

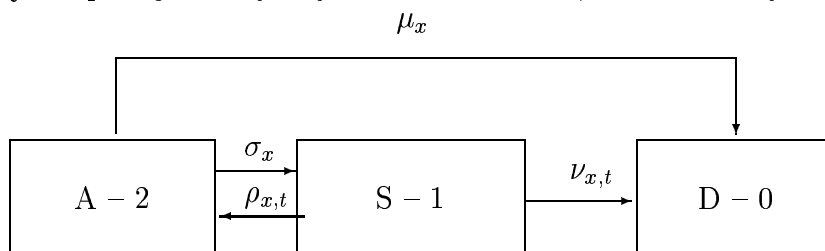
$${}_t\bar{\mathbf{V}} = (v^t {}_t\mathbf{p}_x)^{-1} \left(\int_t^n v^s {}_s\mathbf{p}_x \mathbf{B}(s) \, ds \mathbf{e} + \int_t^n v^s \mathbf{H}(s) \, ds + v^n {}_n\mathbf{p}_x \mathbf{b}(n) \right),$$

i pamiętając, że $dv^{-t}/dt = \delta v^{-t}$ mamy

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} {}_t\bar{\mathbf{V}} &= (\delta v^{-t} ({}_t\mathbf{p}_x)^{-1} - v^{-t} ({}_t\mathbf{p}_x)^{-1} \left(\frac{d}{dt} {}_t\mathbf{p}_x \right) ({}_t\mathbf{p}_x)^{-1}) \\
 &\quad \times \left(\int_t^n v^s {}_s\mathbf{p}_x \mathbf{B}(s) \, ds \mathbf{e} + \int_t^n v^s \mathbf{H}(s) \, ds + v^n {}_n\mathbf{p}_x \mathbf{b}(n) \right) \\
 &\quad + v^{-t} ({}_t\mathbf{p}_x)^{-1} (-v^t {}_t\mathbf{p}_x \mathbf{B}(t) \mathbf{e} - v^t {}_t\mathbf{p}_x \mathbf{H}(t)) \\
 &= \delta_t \bar{\mathbf{V}} - \boldsymbol{\mu}_t \bar{\mathbf{V}} - \mathbf{B}(t) \mathbf{e} - \mathbf{H}(t).
 \end{aligned}$$

4 Modele chorobowe

Rozpatrzmy model AID z następującą modyfikacją prowadzącą do modelu ASD ze stanami: A – aktywny, S – chory, D – śmierć. Bardziej realistyczny model chorobowy musi zakładać, że zarówno intensywność wyleczenia jak i intensywność śmierci podczas choroby zależy od czasu trwania choroby. Definiujemy więc: σ_x – intensywność zachorowania dla (x) -latka, $\rho_{x,s}$ – intensywność wyleczenia dla (x) -latka i długości choroby s , μ_x – intensywność śmiertelności dla zdrowego (x) -latka, $\nu_{x,s}$ – intensywność śmiertelności dla (x) -latka chorego przez czas s . Schemat przejść jest podany na rys. 4. Model się komplikuje i żeby uzyskać markowskość, stan S należy rozpatry-



Rysunek 4.4: Schemat przejść w modelu ASD

wać łącznie z czasem przebywania w tym stanie, tj. (S, s) . Przestrzeń stanów $\mathcal{E} = \{A, D, (S, v), v \geq 0\}$ jest więc nieprzeliczalna.

Rozpatrzmy więc proces $J(t)$ i niech $\tau_1, \tau_2, \dots$ będą kolejnymi momentami skoków procesu $J(t)$ oraz $Z_j = J(\tau_j)$ będzie stanem tuż po skoku (pamiętajmy o założeniu prawostronnej ciągłości i granic z lewej strony). Zauważmy, że ze względu na kawałkami ciągle realizacje, mamy $J(\tau_j - 0) = Z_{j-1}$. Dorzucamy jeszcze $\tau_0 = 0$. Definiujemy teraz proces

$$U(t) = \sum_{j \geq 0} (t - \tau_j) 1(\tau_j \leq t < \tau_{j+1}), \quad t \geq 0.$$

Zauważmy, że znajomość przebiegu procesu $J(t)$ do chwili s pozwala wyznaczyć przebieg procesu $U(t)$ do chwili s . Podobnie do tego jak robiliśmy to w podrozdziale [????] definiujemy intensywność przejścia

$$\mu_t^{ij;s} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pr(J(t) = j | J(s) = i, U(t) = s)}{h},$$

dla $i, j \in \mathcal{E}$ oraz $s \geq 0$. Powstaje pytanie dla jakich procesów taka granica istnieje dla wszystkich i, j , i dla wszystkich s, t być może poza skończoną liczbą punktów.

4.1 Funkcje chorobowe

Uwagi bibliograficzne Pierwotny pomysł zastosowania niejednorodnych procesów Markowa do modelowania przebiegu stanów w ubezpieczeniach życiowych pochodzi od Hoem (1969,1988). Dalsze prace to jak np. Norberga (1995) gdzie podane są wzory na liczenie wyższych momentów przyszłej straty lub Watersa (1984) (pochodzą oznaczenie ${}_t p_x^{ij}$ oraz ${}_t \bar{p}_x^{ij}$). Teoria łańcuchów Markowa jest klasyczna, więcej można znaleźć w Rolski *et al* (1999). Polecamy też wybór tekstów pod redakcją Ostasiewicza (2004). Teorię procesów liczących na tle analizy stochastycznej w zastosowaniu do wnioskowania statystycznego w ubezpieczeniach można znaleźć w interesującej przeglądowej pracy A.S. Macdonalda (1996C). Modelowanie ubezpieczeń wielostanowych za pomocą procesów Markowa znaleźć można w pracy Norberga (1991) oraz w skrypcie Norberga (2000). W literaturze polskiej modelowaniu takiemu poświęcony jest rozdział książki pod redakcją Ostasiewicza (2000).

5 Zadania

- 5.1 Napisać macierz intensywności przejścia dla modeli: AID z uzdrowieniami, AID bez uzdrowień.
- 5.2 Napisać macierz intensywności przejścia dla modeli: AID z uzdrowieniami, AID bez uzdrowień. Napisać prospektywne i retrospektywne równanie Kołmogorowa dla modeli: a) AD, b) AID bez uzdrowień, AID z uzdrowieniami.
- 5.3 Rozpatrzmy następującą modyfikację ubezpieczenia terminowego na okres n dla (x) -latka. Zamiast płacić pojedynczą kwotę w chwili śmierci, z polisy od chwili śmierci wypłaca się z jednostkową intensywnością od chwili śmierci do chwili n , jeśli tylko śmierć nastąpiła do momentu n . Takie ubezpieczenie nosi nazwę *family income insurance*. Zakładamy, że składka jest płacona z stałą intensywnością Π do momentu śmierci ubezpieczonego lub $h \leq n$. Znaleźć wzór na składkę netto oraz rezerwę składki netto w odcinku $[0, n]$.
- 5.4 Pokazać, że proces 0.3 jest łańcuchem Markowa oraz napisać funkcję przejścia $\Pr(J(t') = i | J(t) = 1)$. Pokazać, że przy założeniu hipotezy HJP-D postać macierzy intensywności przejścia jest taka jak w (2.15).
- 5.5 W przypadku grupy m osób w wieku $x_1, \dots, x_m$ lat możemy wprowadzić proces liczący liczbę osób żyjących w chwili t , tj.

$$J(t) = \begin{cases} m & \text{jeśli } 0 \leq t < T_{(1)} \\ m-1 & \text{jeśli } T_{(1)} \leq t < T_{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{jeśli } T_{(m-1)} \leq t < T_{(m)} \\ 0 & \text{jeśli } T_{(m)} \leq t \end{cases} \quad (5.1)$$

Udowodnić, że jeśli $x = x_1 = \dots = x_m$, to $J(t)$ jest również łańcuchem Markowa.

- 5.6 Niech $J(t)$ będzie łańcuchem Markowa z

$$\boldsymbol{\mu}_t = \begin{pmatrix} \mu_t^{22} & \mu_t^{21} \\ \mu^{12} & \mu_t^{11} \end{pmatrix},$$

Znaleźć $\tilde{r}^{ij}(t, t') = \Pr(J(t') = j | J(t) = i)$, $i, j = 1, 2$

- 5.7 Rozważyć łańcuch Markowa typu AID z macierzą intensywności przejścia $\boldsymbol{\mu}_t$ z $\mu_t^{21} = \sigma_{x+t}$, $\mu_t^{12} = \rho_{x+t}$, $\mu_t^{20} = \mu_{x+t}$ i $\mu_t^{10} = \nu_{x+t}$. Podać macierz funkcji przejścia $\mathbf{R}$ korzystając z funkcji $\tilde{r}^{ij}(t, t')$ z zadania 5.6.
- 5.8 ²¹ Zanalizować następujący łańcuch Markowa $J(t)$ z stanami $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i macierzą intensywności przejścia

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} * & \rho_t & 0 & \sigma_t & \kappa_t \\ 0 & * & \sigma_t & 0 & \kappa_t \\ 0 & 0 & * & 0 & \lambda_t \\ 0 & 0 & 0 & * & \lambda_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stany mają znaczenia 4 – nieubezpieczony, zdrowy, 3 – ubezpieczony zdrowy, 2 – ubezpieczony chory, 1 – nieubezpieczony, chory, 0 – śmierć oraz ρ_x jest intensywnością zawierania ubezpieczeń dla (x) -latka, σ_x jest intensywnością zachorowania (x) -latka, κ_x jest intensywnością śmiertelności wśród zdrowych dla (x) -latka oraz λ_x jest intensywnością śmiertelności wśród chorych (x) -latków. Znaleźć $\mathbf{R}(t, t')$.

- 5.9 Rozważmy ubezpieczenie terminowe na życie na n lat dla (x) -latka, którego życie podlega zmianom jak w modelu AID z uzdrowieniami. W momencie śmierci jest wypłacone świadczenie w wysokości 1. Według umowy, ubezpieczony jest on zwolniony z płacenia składki w okresach inwalidztwa. Policzyc składkę netto tego ubezpieczenia, jeśli dana jest macierz intensywności przejścia $\boldsymbol{\mu}_{[x]+t}$ oraz przy natężeniu stopy procentowej δ . [Wsk. Patrz przykład.]
- 5.10 Pokazać, że jeśli ze stanu i wszystkie strzałki wychodzą na zewnątrz, to

$$r^{ii}(t, t') = r^{ii}(t, t') = e^{-\int_t^{t'} \mu_v^i dv}.$$

²¹Na podstawie zadanie 6.3 z Exercises in Life Insurance Mathematics pod red. Bjarne Mess i Jakob Christensen, University of Copenhagen, Laboratory of Actuarial Mathematics, 1996.

