

Wykład 1

Wstęp

5 października 2020

Czego będziemy się uczyć ?

- Część 1. Elementy matematyki ubezpieczeń na życie.
- Część 2. Wybrane zagadnienia z ubezpieczeń nieżyciowych.

W ubezpieczeniach na życie mamy dwa mechanizmy:

- mechanizm procentu składanego; akumulacja i dyskontowanie.
- w czasie trwania ubezpieczenia, polisa może być zakończona w losowym momencie. Na przykład przez śmierć lub inne losowe zdarzenie.

Literatura

Do części pierwszej:

- Błaszczyszyn, B. & Rolski, T. *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, 2004, WNT
- Skałba, M. *Ubezpieczenia na życie* (wyd. I - 1999, wyd. II - 2002: WNT.

Do części drugiej:

- Klugman, S.A., Panjer, H.H. i Willmot, G.E. *Loss Models: From Data to Decisions*, Fourth Ed., 2012.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H. i Willmot, G.E. *Student Solutions Manual to Accompany Loss Models: From Data to Decisions*, Fourth Edition 4th Edition.

Literatura

Inne książki z tej dziedziny.

- Otto, W. Ubezpieczenia majątkowe: Część I. WNT, 2004.
- R. Szekli. *Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych*. Skrypt UWr, 2018.

Klasyczna pozycja z ubezpieczeń na życie:

- Gerber, H.U. *Life Insurance Mathematics*, Springer.

Przykładowe zadania

Portfel składa się z 300 polis na całe życie dla 37 latków płatnych w chwili śmierci. Każda polisa jest wystawiona na sumę ubezpieczenia 2000 zł. Załóżmy, że czas trwania życia 37-latka jest jednostajny na odcinku $(0, 37)$ oraz mamy dane stałe natężenie stopy procentowej $\delta = \frac{1}{8}$. Jaką minimalną kwotę należy zainwestować w chwili $t=0$ aby były możliwe wypłaty wszystkich polis z tego funduszu z prawdopodobieństwem 0,9? Wiadomo, że $\Phi(1,28) = 0,9$.

Przykładowe zadania

Modelujemy wielkość odszkodowania za błędy lekarskie rozkładem z dystrybuantą

$$F_4(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - 0.3e^{-0.00001x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Dla ryzyka z rozkładem F_4 obliczyć oczekiwaną wypłatę na szkodę jeśli jest współpłacenie w wysokości 20% przez ubezpieczonego i dopuszczalny limit w wysokości 20000.

Elementy analizy przeżycia

- $(\Omega, \Pr)$
- T - czas życia osoby nowourodzonej; $T \sim F$, z gęstością f ;
- Funkcja przeżycia $S(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t)$
- Zauważmy, że $f(t) = -S'(t)$

Elementy analizy przeżycia

- Przyszły czas życia x -latka; T_x

$$T_x =_d T - x \text{ pod warunkiem, że } T \geq x$$

- $T_x \sim F_x$, gęstość f_x , funkcja przeżycia S_x .
- Zauważmy, że **na tym wykładzie**

$$S_x(t) = \Pr(T_x > t) = \Pr(T > x + t | T > x) = \frac{S(x+t)}{S(x)}.$$

Oznaczenia aktuarialne

Przyjęte podczas "Second International Actuarial Congress"; London Maj 1898 i potem rozwijane.

- ${}_t p_x = \Pr(T_x > t)$; w szczególności jeśli $t = 1$ to

$${}_1 p_x = p_x$$

- ${}_t q_x = \Pr(T_x \leq t)$; w szczególności jeśli $t = 1$ to ${}_1 q_x = q_x$,
- ${}_t|_s q_x$ - prawdopodobieństwo, że x -latek przeżyje jeszcze t lat i następnie umrze w przeciągu czasu s .

Fakt Mamy

$${}_t|_s q_x = {}_{t+s} q_x - {}_t q_x.$$

Oznaczenia aktuarialne

Tylko dla info: Pojawia się oznaczenie ${}_t p_{[x]+u}$ - prawdopodobieństwo, że osoba, która weszła do systemu w wieku x , przeżyje u lat i następnie jeszcze t lat,

podobnie ${}_t q_{[x]+u}$ - prawdopodobieństwo, że osoba, która weszła do systemu w wieku x , przeżyje u lat i następnie umrze w przeciągu t lat. **My będziemy zakładać tzw. hipotezę jednorodnej populacji (HJP), że**

$${}_t p_{[x]+u} = {}_t p_{x+u}.$$

Małe zadanko

Pokazać, że

$$(*) \quad {}_t p_{[x]+s} = {}_t p_{x+s}$$

jest równoważne

$$(**) \quad S_x(t) = \Pr(T_x > t) = \Pr(T > x + t | T > x) = \frac{S(x+t)}{S(x)}.$$

Rozwiązanie: $(*) \rightarrow (**)$ Podstawić w $(*)$ $s = 0$.

$(**) \rightarrow (*)$ Lewa strona w $(*)$

$$\begin{aligned} {}_t p_{[x]+s} &= \Pr(T_x > s + t | T_x > s) = \frac{\Pr(T_x > s + t)}{\Pr(T_x > s)} \\ &= \frac{S_x(s+t)}{S_x(s)} = \frac{S(x+s+t)/S(x)}{S(x+s)/S(x)} \\ &= \frac{S(x+s+t)}{S(x+t)} = {}_t p_{x+s}. \end{aligned}$$

Oznaczenia aktuarialne

Jeśli nie jest powiedziane inaczej to zakładamy HJP.

Fakt

$${}_{t+s}p_x = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s}, \quad (*)$$

$${}_{t|s}q_x = {}_s p_x \cdot {}_t q_{x+s}, \quad (**)$$

Dowód ().*

$$\begin{aligned} \Pr(T_x > s + t) &= \Pr(T_x > s + t | T_x > s) \Pr(T_x > s) \\ &= {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s}. \end{aligned}$$

(**)

$$\begin{aligned} {}_{t|s}p_x = \Pr(t < T_x \leq t + s) &= \Pr(t < T_x \leq t + s | T_x > t) \Pr(T_x > t) \\ &= {}_t p_x \cdot {}_s p_{x+t}. \end{aligned}$$

Oznaczenia aktuarialne

$\ddot{e}_x$ – średnia przyszłego czasu życia.

Fakt

$$\ddot{e}_x = \int_0^{\infty} t f_x(t) dt = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt.$$

Wniosek $\ddot{e}_x = \frac{\int_x^{\infty} S(t) dt}{S(x)}.$

Natężenie śmiertelności

Niech T będzie czas życia osoby nowonarodzonej funkcją przeżycia $S(t)$ i gęstością $f(t)$. Funkcję

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

nazywamy *natężeniem śmiertelności*.

Natężenie śmiertelności

Heurystyka:

$$\begin{aligned}\Pr(T \leq t + h | T > t) &= \frac{S(t) - S(t + h)}{S(t)} \approx \frac{-S'(t)}{S(t)} h \\ &= \mu(t) \Delta\end{aligned}$$

Korzystamy z twierdzenia o wartości średniej

$$S(t) - S(t + h) = -S'(t)h + o(\Delta)$$

($-S' = f$ musi być ciągła w otoczeniu punktu t).

Natężenie śmiertelności

Dla x -latka z przyszłym czasem życia T_x z funkcją przeżycia S_x i gęstością f_x

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}$$

Natężenie śmiertelności

Fakt

$$\mu_x(t) = \mu(x + t).$$

Dowód Pamiętajmy, że

$$S_x(t) = \frac{S(x + t)}{S(x)}$$

Wtedy

$$f_x(t) = -\frac{d}{dt} \frac{S(x + t)}{S(x)}$$

i stąd

$$\mu_x(t) = \left(-\frac{d}{dt} \frac{S(x + t)}{S(x)}\right) / \frac{S(x + t)}{S(x)} = \frac{-S'(x + t)}{S(x + t)} = \mu(x + t).$$

Natężenie śmiertelności

Formalnie można zdefiniować *funkcję hazardową*

$$H(t) = -\log S(t)$$

i wtedy μ jest taką funkcją, że dla $x > 0$

$$H(x) = \int_0^x \mu(t) dt.$$

Ważny wzór

Fakt

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(u) du\right).$$

Logarytmując stronami mamy

$$-\log S(t) = \int_0^t \mu(u) du.$$

Ponadto

$$S_x(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_x(u) du\right).$$

Analityczne prawa śmiertelności

Będziemy wszędzie zakładać HJP.

ω - maksymalny wiek jednostki

Prawo de Moivre'a

$$S(t) = 1 - \frac{t}{\omega}, \quad 0 < t \leq \omega.$$

Wtedy

$$\mu(t) = \frac{1}{\omega - t}, \quad 0 < t < \omega.$$

Mamy

$${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}.$$

Uwaga. To są wszystkie rozkłady jednostajne: odpowiednio na $[0, \omega]$ i $[0, \omega - x]$

Analityczne prawa śmiertelności

Ten rozkład nie pasuje do danych demograficznych, ale używamy go w zadaniach bo jest łatwy do manipulacji analitycznych.

Rozkład wykładniczy

$$S(t) = \exp(-At), \quad t \geq 0.$$

Wtedy

$$\mu(t) = A.$$

Zauważmy !!!

$$S_x(t) = \exp(-At), \quad t \geq 0$$

i wobec tego $\mu_x(t) = A$.

Analityczne prawa śmiertelności

Prawo Gompertza Postulat:

$$\mu(t) = Bc^t,$$

gdzie $B > 0$, $c > 1$.

W konsekwencji

$$S(t) = \exp(-m(c^t - 1)),$$

gdzie $m = B/\log c$ oraz

$${}_t p_x = \exp(-m(c^{t+x} - c^x)).$$

Analityczne prawa śmiertelności

Prawo Makehama

Postulat:

$$\mu(t) = A + Bc^t,$$

gdzie $B > 0$, $A \geq -B$, $c > 1$.

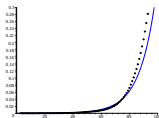
W konsekwencji

$$S(t) = \exp(-At - m(c^t - 1)),$$

gdzie $m = B/\log c$. oraz

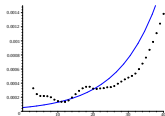
$${}_t p_x = \exp(-At - m(c^{t+x} - c^x)).$$

Analityczne prawa śmiertelności



Rysunek: Prawo Gompertza z wyestymowanymi $B = 5.2967 \times 10^5$, $c = 1.0926$.

Analityczne prawa śmiertelności



Rysunek: Prawo Gompertza z wyestymowanymi $B = 5.2967 \times 10^5$, $c = 1.0926$.