

Wykład 1

Wstęp

5 października 2020

.

Czego będziemy się uczyć ?

- Część 1. Elementy matematyki ubezpieczeń na życie.
- Część 2. Wybrane zagadnienia z ubezpieczeń niezyciowych.

W ubezpieczeniach na życie mamy dwa mechanizmy:

- mechanizm procentu składanego; akumulacja i dyskontowanie.
- w czasie trwania ubezpieczenia, polisa może być zakończona w losowym momencie. Na przykład przez śmierć lub inne losowe zdarzenie.

Literatura

Do części pierwszej:

- Błuszczyszyn, B. & Rolski, T. *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, 2004, WNT
- Skałba, M. *Ubezpieczenia na życie* (wyd. I - 1999, wyd. II - 2002: WNT.

Do części drugiej:

- Klugman, S.A., Panjer, H.H. i Willmot, G.E. *Loss Models: From Data to Decisions*, Fourth Ed., 2012.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H. i Willmot, G.E. *Student Solutions Manual to Accompany Loss Models: From Data to Decisions*, Fourth Edition 4th Edition.

Literatura

Inne książki z tej dziedziny.

- Otto, W. Ubezpieczenia majątkowe: Część I. WNT, 2004.
- R. Szekli. *Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych*. Skrypt UWr, 2018.

Klasyczna pozycja z ubezpieczeń na życie:

- Gerber, H.U. *Life Insurance Mathematics*, Springer.

Przykładowe zadania

Portfel składa się z 300 polis na całe życie dla 37 latków płatnych w chwili śmierci. Każda polisa jest wystawiona na sumę ubezpieczenia 2000 zł. Załóżmy, że czas trwania życia 37-latka jest jednostajny na odcinku $(0, 37)$ oraz mamy dane stałe natężenie stopy procentowej $\delta = \frac{1}{8}$. Jaką minimalną kwotę należy zainwestować w chwili $t=0$ aby były możliwe wypłaty wszystkich polis z tego funduszu z prawdopodobieństwem 0,9? Wiadomo, że $\Phi(1,28) = 0,9$.

Przykładowe zadania

Modelujemy wielkość odszkodowania za błędy lekarskie rozkładem z dystrybuantą

$$F_4(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \underline{0.3e^{-0.00001x}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Dla ryzyka z rozkładem F_4 obliczyć oczekiwaną wypłatę na szkodę jeśli jest współpłacenie w wysokości 20% przez ubezpieczonego i dopuszczalny limit w wysokości 20000.

Elementy analizy przeżycia

- (Ω, Pr)
- T - czas życia osoby nowourodzonej; $T \sim \underline{F}$, z gęstością f ;
- Funkcja przeżycia $S(t) = 1 - F(t) = \text{Pr}(T > t)$
- Zauważmy, że $f(t) = -S'(t)$

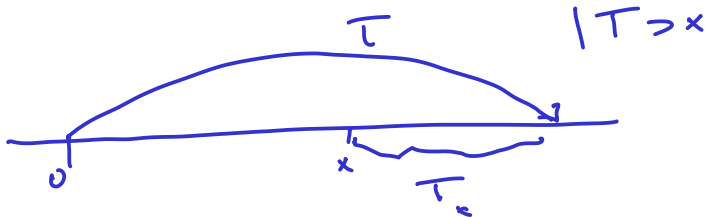
Elementy analizy przeżycia

- Przyszły czas życia x -latka; T_x

$T_x =_d T - x$ pod warunkiem, że $T \geq x$

- $T_x \sim F_x$, gęstość f_x , funkcja przeżycia S_x .
- Zauważmy, że **na tym wykładzie**

$$\underline{S_x(t)} = \Pr(\underline{T_x} > \underline{t}) = \Pr(\underline{T} > \underline{x + t} | \underline{T} > \underline{x}) = \frac{S(x+t)}{S(x)}.$$



$$T - x \mid T > x$$

Oznaczenia aktuarialne

Przyjęte podczas "Second International Actuarial Congress"; London Maj 1898 i potem rozwijane.

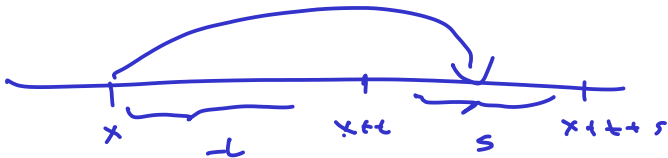
- ${}_t p_x = \Pr(T_x > t)$; w szczególności jeśli $t = 1$ to

$${}_1 p_x = p_x$$

- ${}_t q_x = \Pr(T_x \leq t)$; w szczególności jeśli $t = 1$ to ${}_1 q_x = q_x$,
- ${}_{t|s} q_x$ - prawdopodobieństwo, że x -latek przeżyje jeszcze t lat i następnie umrze w przeciągu czasu s .

Fakt Mamy

$${}_{t|s} q_x = {}_{t+s} q_x - {}_s q_x.$$



$$Pr (T_x \in (t, t+s))$$

$$= Pr (\underbrace{T_x \leq t+s}_{\text{LS}}) - Pr (\underbrace{T_x \leq t}_A)$$

$$A \subset B \quad Pr(B \setminus A) = Pr(B) - Pr(A)$$

Oznaczenia aktuarialne

$${}_t p_{x+u}$$

Tylko dla info: Pojawia się oznaczenie ${}_t p_{[x]+u}$ - prawdopodobieństwo, że osoba, która weszła do systemu w wieku x , przeżyje u lat i następnie jeszcze t lat,

podobnie ${}_t q_{[x]+u}$ - prawdopodobieństwo, że osoba, która weszła do systemu w wieku x , przeżyje u lat i następnie umrze w przeciągu t lat. My będziemy zakładać tzw. hipotezę jednorodnej populacji (HJP), że

$${}_t p_{[x]+u} = {}_t p_{x+u}.$$

Małe zadanko

Pokazać, że

(*)

$${}_t p_{[x]+s} = {}_t p_{x+s}$$

jest równoważne

(**)

$$S_x(t) = \Pr(T_x > t) = \Pr(T > x + t | T > x) = \frac{S(x+t)}{S(x)}.$$

Rozwiązanie: (*) $\rightarrow$ (**) Podstawić w (*) $s = 0$.

(**) $\rightarrow$ (*) Lewa strona w (*)

$$\begin{aligned} {}_t p_{[x]+s} &= \Pr(T_x > s + t | T_x > s) = \frac{\Pr(T_x > s + t)}{\Pr(T_x > s)} \\ &= \frac{S_x(s+t)}{S_x(s)} = \frac{S(x+s+t)/S(x)}{S(x+s)/S(x)} \\ &= \frac{S(x+s+t)}{S(x+t)} = {}_t p_{x+s}. \end{aligned}$$

Oznaczenia aktuarialne

Jeśli nie jest powiedziane inaczej to zakładamy HJP.

Fakt

$${}_{t+s}p_x = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s},$$

(*)

$${}_{t|s}q_x = {}_s p_x \cdot {}_t q_{x+s},$$

(**)

Dowód (*).

$$\begin{aligned} \Pr(T_x > s+t) &= \Pr(T_x > s+t | T_x > t) \Pr(T_x > t) \\ &= {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s}. \end{aligned}$$

$${}_{s+t}p_x =$$

(**)

$${}_{t|s}p_x = \Pr(t < T_x \leq t+s) = \Pr(t < T_x \leq t+s | T_x > t) \Pr(T_x > t)$$

Oznaczenia aktuarialne

$$0 \leq T_x$$

$$\underline{E T_x} = \ddot{e}_x$$

$\ddot{e}_x$ – średnia przyszłego czasu życia.

Fakt

$$\underline{\ddot{e}_x} = \int_0^\infty t f_x(t) dt = \int_0^\infty \underbrace{t p_x}_{1 - F_x(t)} dt.$$

Wniosek $\ddot{e}_x = \frac{\int_x^\infty S(t) dt}{S(x)}.$

$$X \sim F \quad X \geq 0 \quad T_x \sim f_x$$
$$EX = \int_0^\infty (1 - F(t)) dt = \int_0^\infty$$

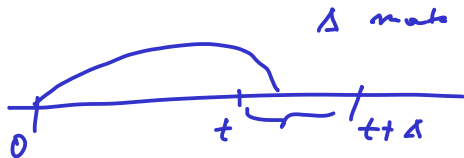
Natężenie śmiertelności

Niech T będzie czas życia osoby nowonarodzonej funkcją przeżycia $S(t)$ i gęstością $f(t)$. Funkcję

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

nazywamy natężeniem śmiertelności.

Natężenie śmiertelności



Heurystyka:

$$\Pr(T \leq t + \Delta | T > t) = \frac{S(t) - S(t + \Delta)}{S(t)} \approx \frac{-S'(t)}{S(t)} \Delta = \mu(t) \Delta$$

Korzystamy z twierdzenia o wartości średniej

$$S(t) - S(t + h) = -S'(t)h + o(\Delta)$$

($-S'$ = f musi być ciągła w otoczeniu punktu t).

Natężenie śmiertelności

Dla x -latka z przyszłym czasem życia T_x z funkcją przeżycia S_x i gęstością f_x

$$\underline{\underline{\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}}}$$

natężenie śmiertelności albo x -lek.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Pr(T_x \leq t + \Delta \mid T_x > t)}{\Delta} = \mu_x(t)$$

Natężenie śmiertelności

Fakt

typ

$$\mu_x(t) = \mu(x+t).$$

Dowód Pamiętajmy, że

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

Wtedy

$$\underline{f_x(t)} = -\frac{d}{dt} \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

i stąd

$$\underline{\mu_x(t)} = \left(-\frac{d}{dt} \frac{S(x+t)}{S(x)} \right) / \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{-S'(x+t)}{S(x+t)} = \underline{\underline{\mu(x+t)}}.$$

$f_x(t)$

$S_x(t)$

Natężenie śmiertelności

Info

Formalnie można zdefiniować funkcję hazardową

$$\underline{H(t)} = -\log S(t)$$

i wtedy μ jest taką funkcją, że dla $x > 0$

$$\underline{H(x)} = \int_0^x \mu(t) dt.$$

$$\frac{f(t)}{S(t)} = \mu(t)$$

Ważny wzór

Fakt

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(u) du\right).$$

Logarytmując stronami mamy

$$-\log S(t) = \int_0^t \mu(u) du.$$

Ponadto

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(u) du\right).$$

$$\exp\left(-\int_0^t \mu(u) du\right) \\ \text{at } x=t \\ \exp\left(-\int_x^x \mu(v) dv\right)$$

Analityczne prawa śmiertelności

Będziemy wszędzie zakładać HJP.

ω - maksymalny wiek jednostki

Prawo de Moivre'a

(rozkład)

jednostajny na $(0, \omega)$

Wtedy

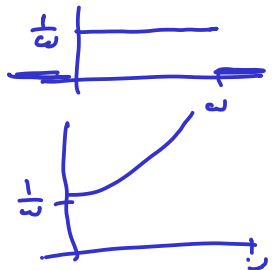
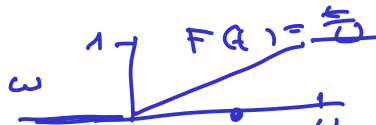
$$S(t) = 1 - \frac{t}{\omega}, \quad 0 < t \leq \omega.$$

$$\mu(t) = \frac{1}{\omega - t}, \quad 0 < t < \omega.$$

Mamy

$${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}.$$

Uwaga. To są wszystkie rozkłady jednostajne: odpowiednio na $[0, \omega]$ i $[0, \omega - x]$



$$X \sim \mathcal{N}(0, \omega)$$

$$(X-x | \mathbb{R} > x) = ?$$

$$\mathbb{I}$$

$$\mathcal{N}(0, \omega-x)$$

$$\underline{T_x}$$

Analityczne prawa śmiertelności

Ten rozkład nie pasuje do danych demograficznych, ale używamy go w zadaniach bo jest łatwy do manipulacji analitycznych.

Rozkład wykładniczy

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$S(t) = \exp(-At), \quad t \geq 0.$$

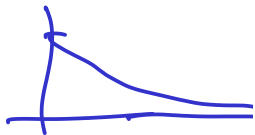
Wtedy

$$\mu(t) = A.$$

Zauważmy !!!

$$S_x(t) = \exp(-At), \quad t \geq 0$$

i wobec tego $\mu_x(t) = A$.



$$S_x(t) = \frac{S(t+t_x)}{S(t)}$$

Analityczne prawa śmiertelności

Prawo Gompertza Postulat:

$$\mu(t) = Bc^t,$$

gdzie $B > 0$, $c > 1$.

W konsekwencji

$$\int_0^t Bc^s ds = B \int_0^t e^{s \log c} ds$$

$$S(t) = \exp(-m(c^t - 1)),$$

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

gdzie m = $B / \log c$ oraz

$${}_t p_x = \exp(-m(c^{t+x} - c^x)).$$

Analityczne prawa śmiertelności

Prawo Makehama

Postulat:

$$\mu(t) = \underline{A} + Bc^t,$$

gdzie $B > 0$, $A \geq -B$, $c > 1$.

W konsekwencji

$$\underline{S(t) = \exp(-At - m(c^t - 1))},$$

gdzie $m = B / \log c$. oraz

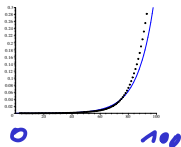
$${}_t p_x = \exp(-At - m(c^{t+x} - c^x)).$$

Analityczne prawa śmiertelności

o natężenie śmiertelności
wystymowane $\geq T_{T=0}$

— Prawo Gomperta

c, B wystymulacjami
metody najmniejszych
kwadratów



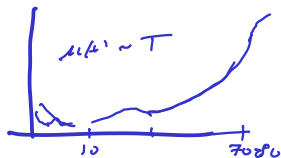
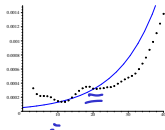
$$\hat{\mu}(x) = x=0, \dots, 100$$



Gompert

Rysunek: Prawo Gomperta z wystymowanymi $B = 5.2967 \times 10^5$, $c = 1.0926$.

Analityczne prawa śmiertelności



Rysunek: Prawo Gompertza z wyestymowanymi $B = 5.2967 \times 10^5$, $c = 1.0926$.