

Wykład 2

Wstęp

16 października 2020

Z poprzedniego wykładu

$$T \sim S, T_x \sim S_x$$

HJP - związek pomiędzy S i S_x .

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}.$$

Jeśli nie jest powiedziane inaczej to zakładamy HJP.

Fakt

$${}_{t+s}p_X = {}_s p_X \cdot {}_t p_{X+s}, \quad (*)$$

$${}_{t|s}q_X = {}_t p_X \cdot {}_s q_{X+t}, \quad (**)$$

Dowód ().*

$$\begin{aligned} \Pr(T_X > s + t) &= \Pr(T_X > s + t | T_X > s) \Pr(T_X > s) \\ &= {}_s p_X \cdot {}_t p_{X+s}. \end{aligned}$$

*(**)*

$$\begin{aligned} {}_{t|s}q_X = \Pr(t < T_X \leq t + s) &= \Pr(t < T_X \leq t + s | T_X > t) \Pr(T_X > t) \\ &= {}_t p_X \cdot {}_s q_{X+t}. \end{aligned}$$

Elementy analizy przeżycia

- $(\Omega, \Pr)$
- T - czas życia osoby nowourodzonej; $T \sim F$, z gęstością f ;
- Funkcja przeżycia $S(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t)$
- Zauważmy, że $f(t) = -S'(t)$

Przypomnijmy

$$a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$$

- $K = \lfloor T \rfloor$ - obcięty przyszły czas życia osoby nowourodzonej
- $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ - obcięty przyszły czas życia x -latka.

Elementy analizy przeżycia

Funkcja prawdopodobieństwa K_x :

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(k \leq T_x < k + 1) = {}_k|q_x = {}_k p_x q_{x+k}.$$

Oznaczenie : $e_x = \mathbb{E}K_x$ - średni obcięty oczekiwany przyszły czas życia dla x -latka.

Zadanko

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x.$$

Tablice trwania życia

ω maksymalny czas życia

W dostępnych tablicach przyjmuje się np. $\omega = 100$, $\omega = 120$.

TTŻ -

$$l_x, \quad x = 0, \dots, \omega - 1$$

- l_x jest przeciętną liczbą osób dożywających wieku x ,
- l_0 zwie się *redix*; początkowa wielkość kohorty,
- bez straty ogólności przyjmuje się okrągłą liczbę; np. $l_0 = 100000$
- $d_x = l_x - l_{x+1}$ - liczba zmarłych w $[x, x + 1)$.

Tablice trwania życia

Uwaga: czasami wygodne jest rozszerzenie pojęcia na funkcję: l_t , dla $0 \leq t$

Ważne związki:

$$l_t = l_0 S(t) \quad (*)$$

Stąd mamy:

$$q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x)}.$$

Teraz podstawiając z (*) : $S(x) = l_x/l_0$ mamy

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

Przykłady

Zad. 1 T spełnia prawo de Moivre'a z $\omega = 100$.

a. Obliczyć $\Pr(K_x = k)$, dla $k = 0, \dots, \omega - x - 1$.

b. Obliczyć ${}_k p_x$ dla $k = 1, \dots, \omega - x - 1$.

Rozwiązanie ad a: T_x ma rozkład jednostajny na $[0, \omega - x)$. A więc

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(k \leq T_x < k + 1) = \frac{1}{\omega - x},$$

dla $k = 0, \dots, \omega - x - 1$.

ad b. Mamy

$${}_k p_x = \frac{\omega - x - k}{\omega - x}$$

dla $k = 0, \dots, \omega - x - 1$.

Przykłady

Zad. 2 Obliczyć ${}_{10}p_{30}$ mając tylko pierwszą kolumnę tablicy TTŻ-PL97k.
Mamy

$${}_{10}p_{30} = \frac{S(40)}{S(30)}$$

Teraz korzystając z $S(k) = l_k/l_0$ mamy

$$\frac{S(40)}{S(30)} = \frac{97432}{98235}.$$

Interpolacje

Dane są TTŻ l_x , $x = 0, \dots, \omega - 1$

Jak obliczyć

$${}_{2.5}p_x = \frac{l_{x+2.5} - l_x}{l_x}$$

Idea: Pomiędzy punktami (k, l_k) robimy interpolacje liniową.

Def. Hipoteza jednostajności (HU)

$\forall x \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq u < 1$

$${}_u q_x = u q_x$$

Fakt

$${}_t p_x = (1 - \{t\}) {}_n p_x + \{t\} {}_{n+1} p_x, \quad n \leq t < n + 1$$

Dowód Niech $n \leq t < n + 1$

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= {}_n p_x \cdot \{t\} p_{x+n} \\ &= {}_n p_x \cdot (1 - \{t\} q_{x+n}) \\ &\stackrel{\text{HU}}{=} {}_n p_x \cdot (1 - \{t\} q_{x+n}) \\ &= {}_n p_x \cdot (1 - \{t\} (1 - p_{x+n})) = \dots \\ &= (1 - \{t\}) {}_n p_x + \{t\} {}_{n+1} p_x \end{aligned}$$

Interpolacje

$$K = \lfloor T \rfloor, \quad U = \{T\}$$

Przypomnienie z rach. prawd.

K_x independent U_x wtedy i tylko wtedy

$$\Pr(K_x = k, U_x \leq u) = \Pr(K_x = k) \cdot \Pr(U_x \leq u)$$

Fakt HU jest równoważna

$$\forall x \in \mathbb{Z}_+, \quad K_x \text{ independent } U_x$$

i $U_x \sim U(0, 1)$.

Wniosek

$$\mathbb{E} T_x = \mathbb{E} K_x + \frac{1}{2}, \quad \text{Var} T_x = \text{Var} K_x + \frac{1}{12}.$$

Dawód Faktu

Założmy HU. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \Pr(K_x = j, U_x \leq s) &= \sum_{j=0}^{\infty} j! s q_x = \sum_{j=0}^{\infty} j p_x \cdot s q_{x+j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j p_x s \cdot q_{x+j} = s \sum_{j=0}^{\infty} j p_x \cdot q_{x+j} = s\end{aligned}$$

Skąd $\Pr(U_x \leq u) = u$. Dalej

$$\Pr(K_x = j, U_x \leq u) = j p_x \cdot u q_{x+j} = u \cdot j p_x \cdot q_{x+j} = \Pr(K_x = j) \Pr(U_x \leq u)$$

Interpolacje

Założmy $\forall x \in \mathbb{Z}_+$, K_x independent U_x i $U_x \sim U(0, 1)$. Wtedy
 $\forall x, 0 \leq u \leq 1$

$$\Pr(K_x = j, U_x \leq u) = \Pr(K_x = j)\Pr(U_x \leq u) = \Pr(K_x = j) \cdot u$$