

Wykład 2

Wstęp

16 października 2020

Z poprzedniego wykładu

$$T \sim S, T_x \sim S_x$$

HJP - związek pomiędzy S i S_x .

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}.$$

Jeśli nie jest powiedziane inaczej to zakładamy HJP.

Fakt

$${}_{t+s}p_x = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s}, \quad (*)$$

$${}_{t|s}q_x = {}_t p_x \cdot {}_s q_{x+t}, \quad (**)$$

Dowód (*).

$$\begin{aligned} \Pr(T_x > s + t) &= \Pr(T_x > s + t | T_x > t) \Pr(T_x > t) \\ &= {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s}. \end{aligned}$$

(**)

$$\begin{aligned} {}_{t|s}q_x &= \Pr(t < T_x \leq t + s) = \Pr(t < T_x \leq t + s | T_x > t) \Pr(T_x > t) \\ &= {}_t p_x \cdot {}_s q_{x+t}. \end{aligned}$$

Elementy analizy przeżycia

- (Ω, Pr)
- T - czas życia osoby nowourodzonej; $T \sim F$, z gęstością f ;
- Funkcja przeżycia $S(t) = 1 - F(t) = \text{Pr}(T > t)$
- Zauważmy, że $f(t) = -S'(t)$

Przypomnijmy

$$\underline{a} = \underline{\lfloor a \rfloor} + \underline{\{a\}}$$

- $K = \lfloor T \rfloor$ - obcięty przyszły czas życia osoby nowourodzonej
- $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ - obcięty przyszły czas życia x -latka.



Elementy analizy przeżycia

Funkcja prawdopodobieństwa K_x :

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(k \leq T_x < k+1) = {}_k|q_x = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Oznaczenie: $e_x = \mathbb{E}K_x$ - średni obciążony oczekiwany przyszły czas życia dla x -latka.

Zadanko

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_x$$

Tablice trwania życia

ω maksymalny czas życia

W dostępnych tablicach przyjmuje się np. $\omega = 100$, $\omega = 120$.

TTŻ -

$$l_x, \quad x = 0, \dots, \omega - 1$$

- l_x jest przeciętną liczbą osób dożywających wieku x ,
- l_0 zwie się redix; początkowa wielkość kohorty,
- bez straty ogólności przyjmuje się okrągłą liczbę; np. $l_0 = 100000$
- $d_x = l_x - l_{x+1}$ - liczba zmarłych w $[x, x + 1)$.

$$l_x = p_x \dots$$

Tablice trwania życia

$$l_x \quad x = 0, \dots$$
$$l_t \quad t \geq 0$$

Uwaga: czasami wygodne jest rozszerzenie pojęcia na funkcję: l_t , dla $0 \leq t$

Ważne związki:

$$l_t = l_0 S(t) \quad (*)$$

Stąd mamy: $p_x = 1 - q_x$

$$q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x)}$$

Teraz podstawiając z $(*)$: $S(x) = l_x / l_0$ mamy

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Przykłady

$$T \sim \mathcal{U}(0, \omega)$$

$$T_x \sim \mathcal{U}(0, \omega - x)$$

Zad. 1 T spełnia prawo de Moivre'a z $\omega = 100$.

a. Obliczyć $\Pr(K_x = k)$, dla $k = 0, \dots, \omega - x - 1$.

b. Obliczyć ${}_k p_x$ dla $k = 1, \dots, \omega - x - 1$.

Rozwiązanie ad a: T_x ma rozkład jednostajny na $[0, \omega - x)$. A więc

$$\Pr(K_x = k) = \Pr(k \leq T_x < k + 1) = \frac{1}{\omega - x},$$

dla $k = 0, \dots, \omega - x - 1$.

ad b. Mamy

$${}_k p_x = \frac{\omega - x - k}{\omega - x}$$

dla $k = 0, \dots, \omega - x - 1$.

Przykłady

Zad. 2 Obliczyć ${}_{10}p_{30}$ mając tylko pierwszą kolumnę tablicy TTŻ-PL97k.
Mamy

$$\underline{{}_{10}p_{30}} = \frac{S(40)}{\underline{S(30)}}$$

Teraz korzystając z $S(k) = I_k / I_0$ mamy

$$\frac{S(40)}{S(30)} = \frac{97432}{98235}$$

ℓ_k

$$\begin{array}{r} 97432 \\ \hline 98235 \\ \hline 100000 \\ \hline 98235 \\ \hline 100000 \end{array}$$

Interpolacje

$$r_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

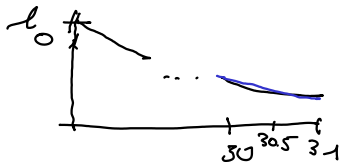
Dane są TTŻ $l_x, x = 0, \dots, \omega - 1$
Jak obliczyć

$$0.5r_x = \frac{l_x - l_{x+\frac{1}{2}}}{l_x}$$

$$2.5r_x = \frac{l_{x+2.5} - l_x}{l_x}$$

Idea: Pomiędzy punktami (k, l_k) robimy interpolację liniową.

$l_{30.5}$ l_{30} l_{31}



interpolacje

Def. Hipoteza jednostajności (HU)

$$\forall x \in \mathbb{Z}_+, \underline{0 \leq u < 1}$$

$$\underline{u} q_x = \underline{u} \underline{q_x}$$

Interpolacje



Fakt

174

$${}_t p_x = (1 - \{t\}) {}_n p_x + \{t\} {}_{n+1} p_x, \quad n \leq t < n+1$$

Dowód Niech $n \leq t < n+1$

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= {}_n p_x \cdot \{t\} p_{x+n} \\ &= {}_n p_x \cdot (1 - \{t\} q_{x+n}) \\ &\stackrel{\text{HU}}{=} {}_n p_x \cdot (1 - \{t\} q_{x+n}) \\ &= {}_n p_x \cdot (1 - \{t\} (1 - p_{x+n})) = \dots \\ &= (1 - \{t\}) {}_n p_x + \{t\} {}_{n+1} p_x \end{aligned}$$



skończyć
same! !

Interpolacje

$$\underline{T_x} = \underline{K_x} + \underline{U_x}$$

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor,$$

$$U_x = \{T_x\}$$

Przypomnienie z rach. prawd.

K_x independent U_x wtedy i tylko wtedy

$$\Pr(K_x = k, U_x \leq u) = \Pr(K_x = k) \cdot \Pr(U_x \leq u)$$

$$\Pr(U_x \leq u)$$

Interpolacje

Fakt HU jest równoważna

$$\forall x \in \mathbb{Z}_+, \quad K_x \text{ independent } \underline{U_x}$$

i $\underline{U_x} \sim \underline{U(0, 1)}$.

Wniosek

$$\underline{\mathbb{E} T_x} = \underline{\mathbb{E} K_x} + \underline{\frac{1}{2}}, \quad \text{Var} \underline{T_x} = \text{Var} \underline{K_x} + \underline{\frac{1}{12}}.$$

$$\underline{\mathbb{E} T_x} = \underline{\mathbb{E}(K_x + U_x)} = \underline{\mathbb{E} K_x} + \underline{\mathbb{E} U_x} = \underline{\mathbb{E} K_x} + \underline{\int_0^1 t dt}$$

$$\underline{\text{Var}(T_x)} = \underline{\text{Var}(K_x + U_x)} = \underline{\text{Var} K_x} + \underline{1621_x}$$

$$\underline{\text{Var} U_x} = \underline{\int_0^1 t^2 dt} - \underline{\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

Dawód Faktu

Założmy HU. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \Pr(K_x = j, U_x \leq s) &= \sum_{j=0}^{\infty} j |s| q_x = \sum_{j=0}^{\infty} j p_x \cdot \underline{s q_{x+j}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j p_x \underline{s \cdot q_{x+j}} = s \sum_{j=0}^{\infty} j p_x \cdot q_{x+j} = s\end{aligned}$$

Skąd $\Pr(U_x \leq u) = u$. Dalej

$$\Pr(K_x = j, U_x \leq u) = j p_x \cdot \underline{u q_{x+j}} = \underline{u} \cdot j p_x \cdot q_{x+j} = \Pr(K_x = j) \Pr(U_x \leq u)$$

$$\begin{aligned}
 s q_x &= P_r(K_x=0, U_x \leq c) = P_r(K_x=0) P_r(U_x \leq c) \\
 &= P_r(K_x=0) s = s q_x
 \end{aligned}$$