

Wykład 3; Elementy Teorii Oprocentowania

16 października 2020

Akumulacja

Sytuacja: dziś ($n = 0$) mamy kapitał k_0
za rok ($n = 1$) mamy kapitał k_1 .

Wtedy $i = \frac{k_1}{k_0} - 1$ - **stopa zwrotu**

Przekształcamy

$$k_1 = (1 + i)k_0$$

Mamy

- $1 + i$ - **czynnik akumulacji**,
- i - **efektywna stopa procentowa** (w podstawowej jednostce czasu; rok).

Akumulacja

Mamy

$$k_1 = (1 + i)k_0$$

$$k_2 = (1 + i)^2 k_0$$

$$\vdots = \vdots$$

$$k_n = (1 + i)^n k_0$$

Zadanko Załóżmy, że j -tym roku efektywna stopa procentowa wynosi i_j . Pokazać, że wtedy kapitał po n latach

$$k_n = k_0 \prod_{j=1}^n (1 + i_j)$$

Dyskontowanie

Ile jest wart dziś ($n = 0$), kapitał k_1 w roku 1. Ponieważ $k_1 = (1 + i)k_0$ więc

$$k_0 = \frac{1}{1 + i}$$

Mamy

$v = \frac{1}{1+i}$ - **czynnik dyskonta**

Ogólnie. Ile jest wart dziś ($n = 0$) kapitał k_n w roku n :

$$k_0 = v^n k_n$$

Dyskontowanie

Strumień pieniądza; cash flow - $k_0, \dots, k_n$.

- Obecna wartość (OW) strumienia

$$k_0 + vk_1 + \dots + v^n k_n$$

- Zakumulowana wartość (ZW) strumienia

$$k_0(1+i)^n + k_1(1+i)^{n-1} + \dots + k_n$$

- Aktualna wartość (AW) strumienia w chwili m

$$k_m + vk_{m+1} + \dots + v^{n-m} k_n \\ + k_0(1+i)^m + k_1(1+i)^{m-1} + \dots + k_{m-1}(1+i)$$

Można mówić zamiast AW o

“zdyskontowana wartość strumienia na moment m ”.

Nominalna vs efektywna stopa procentowa

Rok dzielimy na m równych okresów.

i - stopa procentowa, (efektywna) s.p.

$i^{(m)}$ - (nominalna) stopa procentowa z m -krotną kapitalizacją, nominalna s.p.

Żeby na koniec roku to samo, musimy je *uzgodnić*.

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

skąd mamy

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \text{ - efektywna s.p.}$$

oraz

$$i^{(m)} = m((1 + i)^{1/m} - 1)$$

Stopa procentowa z góry

d – jest miarą odsetek pobieranych z góry.

Jeśli po upływie roku mamy odsetki i , to ich OW wynosi

$$iv = \frac{i}{1+i}$$

Oznaczenie $d = \frac{i}{1+i}$

Inne wprowadzenie:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & d \\ 2 & \rightarrow & d^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Sumując prawe strony mamy

$$d + d^2 + \dots = \frac{d}{1-d}$$

Uzgadniając $\frac{d}{1-d} = i$ otrzymujemy $d = \frac{i}{1+i}$.

Przykładowe renty

[renta z góry]

$$k_0 = 1, k_1 = k_2 = \dots = 1$$

$$OW = \ddot{a}_{\infty} = \frac{1}{d}$$

[renta z dołu]

$$k_0 = 0, k_1 = k_2 = \dots = 1$$

$$OW = a_{\infty} = \frac{1}{i}.$$

Renty pewne

[renta pewna z góry]

$$k_0 = \dots = k_{n-1} = 1$$

$$OW = \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{d}$$

$$ZA \text{ w chwili } n = \ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

[renta pewna z dołu]

$$k_0 = 0, k_1 = \dots = k_n = 1$$

$$OW = a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{1-v^n}{i}$$

Siła stopy procentowej

δ - siła stopy procentowej, natężenie oprocentowania

$$e^{\delta} = 1 + i$$

skąd mamy $\delta = \log(1 + i)$.

Uzasadnienie

Liczba okresów $m \rightarrow \infty$. Z wzoru

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

przechodząc z $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy $i^{(m)} \rightarrow \delta$.

Kapitalizacja ciągła

Kapitał początkowy $k(0)$

$$k(t) = k(0)e^{\delta t}$$

skąd

$$k(0) = k(t)e^{-\delta t}$$

$$e^{\delta} = 1 + i \qquad v = e^{-\delta}$$

OW 1 w chwili t

$$v^t = e^{-\delta t}.$$

Strumienie pieniądza w modelu ciągłym

$c(t)$ - intensywność wpływu pieniądza w chwili $0 \leq t \leq n$

$C(t) = \int_0^t c(s) ds$ – łączna ilość pieniądza która wpłynęła do chwili t .

Wpływ w odcinku $(t, t + \Delta)$ równa się $\approx \Delta c(t)$.

OW wynosi

$$e^{-\delta t} \Delta c(t)$$

Wysumowanie i przejście z $\Delta \rightarrow 0$ daje

$$\int_0^n e^{-\delta t} c(t) dt$$

Przykładowe renty ciągłe

[ciągła renta bezterminowa]

Strumień $c(t) = 1$ dla $0 \leq t < \infty$

$$OW = \bar{a}_{\infty} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}$$

[ciągła renta pewna]

Strumień $c(t) = 1$ dla $0 \leq t < n$

OW =

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta n})$$

ZW =

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \dots$$