

Wykład 3; Elementy Teorii Oprocentowania

16 października 2020

.

Akumulacja

Sytuacja: dziś ($n = 0$) mamy kapitał k_0
za rok ($n = 1$) mamy kapitał k_1 .

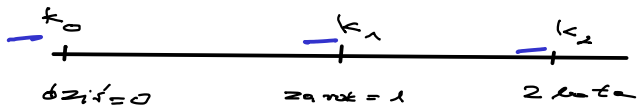
Wtedy $i = \frac{k_1}{k_0} - 1$ - stopa zwrotu

Przekształcamy

$$\underline{k_1 = (1 + i)k_0}$$

Mamy

- $1 + i$ - czynnik akumulacji.
- i - efektywna stopa procentowa (w podstawowej jednostce czasu; rok).



Akumulacja

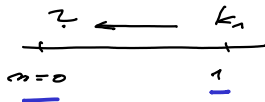
Mamy

$$\begin{aligned}\underline{k_1} &= (1+i)\underline{k_0} \\ \underline{k_2} &= (1+i)^2 \underline{k_0} \\ \vdots &= \vdots \\ \underline{k_n} &= (1+i)^n k_0\end{aligned}$$

Zadanko Załóżmy, że j -tym roku efektywna stopa procentowa wynosi $\underline{i_j}$.
Pokazać, że wtedy kapitał po n latach

$$\underline{k_n} = k_0 \prod_{j=1}^n (1 + \underline{i_j})$$

Dyskontowanie



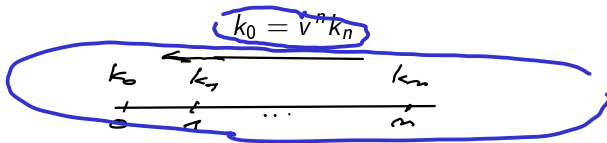
Ile jest wart dziś ($n = 0$), kapitał k_1 w roku 1. Ponieważ $k_1 = (1+i)k_0$ więc

$$k_0 = \frac{1}{1+i} k_1$$

Mamy

$v = \frac{1}{1+i}$ - czynnik dyskonta

Ogólnie. Ile jest wart dziś ($n = 0$) kapitał k_n w roku n :



Strumień pieniądza; cash flow - $k_0, \dots, k_n$.

- Obecna wartość (OW) strumienia

$$\underline{k_0} + \underline{vk_1} + \dots + v^n \underline{k_n}$$

- Zakumulowana wartość (ZW) strumienia

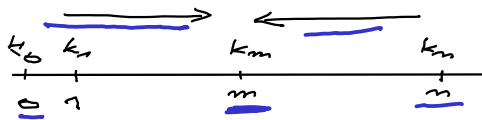
$$\underline{k_0}(1+i)^n + k_1(1+i)^{n-1} + \dots + \underline{k_n} //$$

- Aktualna wartość (AW) strumienia w chwili m

$$\underline{k_m + vk_{m+1} + \dots + v^{n-m}k_n} + \underline{k_0(1+i)^m + k_1(1+i)^{m-1} + \dots + k_{m-1}(1+i)}$$

Można mówić zamiast AW o

“zdyskontowana wartość strumienia na moment m ”.



Nominalna vs efektywna stopa procentowa

Rok dzielimy na m równych okresów.

i - stopa procentowa, (efektywna) s.p.

$i^{(m)}$ - (nominalna) stopa procentowa z m -krotną kapitalizacją, nominalna s.p.

Żeby na koniec roku to samo, musimy je uzgodnić.

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m$$

$i^{(m)}$

skąd mamy

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m - 1 \text{ - efektywna s.p.}$$

oraz

$$i^{(m)} = m((1 + i)^{1/m} - 1)$$



Stopa procentowa z góry

d – jest miarą odsetek pobieranych z góry.

Jeśli po upływie roku mamy odsetki i , to ich OW wynosi

$$\underline{iv} = \underline{\frac{i}{1+i}}$$

Oznaczenie $d = \frac{i}{1+i}$
Inne wyprowadzenie:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & d \\ \underline{2} & \rightarrow & \underline{d^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & d \\ 2 & \rightarrow & d^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}} \right\}$$

Sumując prawe strony mamy

$$\underline{d + d^2 + \dots} = \underline{\frac{d}{1-d}}$$

Uzgadniając $\frac{d}{1-d} = i$ otrzymujemy $d = \frac{i}{1+i}$.

Przykładowe renty

[renta z góry]

$$OW = \overbrace{a_{\infty}}^{\circ} = \frac{1}{d}$$

[renta z dołu]

$$OW = \overbrace{a_{\infty}} = \frac{1}{i}$$

$$\underline{k_0 = 1}, \underline{k_1 = k_2 = \dots = 1}$$

$$\underline{k_0 = 0}, \underline{k_1 = k_2 = \dots = 1}$$

Renty pewne

n wypłat

[renta pewna z góry]

$$\underline{k_0} = \dots = \underline{k_{n-1}} = 1$$

$$OW = \underline{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = 1 + \underline{v} + \dots + \underline{v^{n-1}} = \underline{\frac{1-v^n}{d}}$$

ZA w chwili n $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ = $(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)$ = $\frac{(1+i)^n - 1}{d}$

[renta pewna z dołu]

$$k_0 = 0, \underline{k_1} = \dots = \underline{k_n} = 1$$

$$OW = \underline{a_{\overline{n}|}} = v + v^2 + \dots + v^n = \underline{\frac{1-v^n}{i}}$$

Siła stopy procentowej



δ - siła stopy procentowej, natężenie oprocentowania

$$e^{\delta} = 1 + i$$

skąd mamy $\delta = \log(1 + i)$.

Uzasadnienie

Liczba okresów $m \rightarrow \infty$. Z wzoru

$$\underline{1 + i} = \underline{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m}$$

przechodząc z $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy $i^{(m)} \rightarrow \delta$.

Kapitalizacja ciągła

Kapitał początkowy $k(0)$

$$\underline{k(t)} = \underline{k(0)} e^{\delta t}$$

skąd

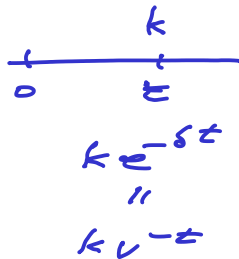
$$\underline{k(0) = k(t)e^{-\delta t}}$$

$$e^\delta = 1 + i$$

$$\underbrace{v = e^{-\delta}}$$

OW 1 w chwili t

$$v^t = e^{-\delta t}.$$



Strumienie pieniądza w modelu ciągłym



$c(t)$ - intensywność wpływu pieniądza w chwili $0 \leq t \leq n$

$C(t) = \int_0^t c(s) ds$ - łączna ilość pieniądza która wpłynęła do chwili t .

Wpływ w odcinku $(t, t + \Delta)$ równa się $\approx \Delta c(t)$.

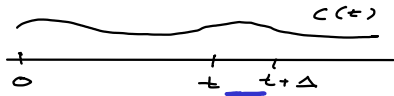
OW wynosi

$$\underline{e^{-\delta t} \Delta c(t)}$$

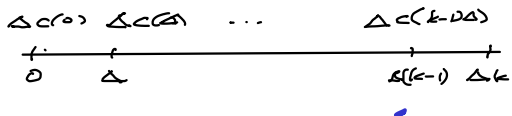
$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta} c(s) ds \approx c(t) \Delta \\ & \underline{t} \end{aligned}$$

Wysumowanie i przejście z $\Delta \rightarrow 0$ daje

$$\left. \int_0^n e^{-\delta t} c(t) dt \right\}$$



$$\Delta \omega = e^{-st} \Delta c(t)$$



$$\frac{n}{\Delta} = \underline{k}$$

Przykładowe renty ciągłe

[ciągła renta bezterminowa]

Strumień $c(t) = 1$ dla $0 \leq t < \infty$

OW = $\bar{a}_{\infty} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}$

[ciągła renta pewna]

Strumień $c(t) = 1$ dla $0 \leq t < n$

OW =

$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta n})$

ZW =

$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \dots$

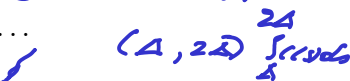
$k_0, \dots, k_n$



$0 \leq t < \infty$



$0 \leq t < n$



$(\Delta, 2\Delta)$



$n - \Delta$

$$\begin{array}{ccc}
 k_0 & k_1 & k_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \hline
 0 & \Delta & 2\Delta
 \end{array}$$

$$0\omega$$

$$\frac{1}{\omega} + \dots$$

$$+ \epsilon$$