

Rachunek prawdopodobieństwa 1B; zadania egzaminacyjne.

1. Niech μ będzie rozkładem probabilistycznym na $(0, 1) \times (0, 1)$:

$$\mu(B) = l(\{x \in (0, 1) : (x, 1 - x) \in B\}),$$

dla $B \in \mathcal{B}((0, 1) \times (0, 1))$, gdzie l jest miarą Lebesgue'a na prostej.

- (i) Napisać dystrybuantę tego rozkładu.
(ii) Niech (X, Y) będzie wektorem losowym o rozkładzie μ . Jaki rozkład ma zmienna losowa X . Obliczyć $\mathcal{E}|Y - X|$.
2. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi dla których istnieje stała $C > 0$, taka że $P(|X_j| \leq C) = 1$ ($j = 1, 2, \dots$). Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pokazać, że jeśli $\sum_n \mathcal{D}^2 X_n = \infty$, to istnieją ciągi a_n i b_n takie, że

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

3. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z $P(X_n = 1) = p_n$ i $P(X_n = 0) = 1 - p_n$. Pokazać, że
(i) $X_n \rightarrow 0$ wg prawdopodobieństwa iff $p_n \rightarrow 0$.
(ii) $X_n \rightarrow 0$ p.n. iff $\sum_n p_n < \infty$.
4. Wiadomo, że w pewnym kilkumilionowym kraju 60% dorosłych osób ma wykształcenie podstawowe, 30% średnie i 10% wyższe. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że wśród 10000 losowo wybranych mieszkańców kraju, osób z wykształceniem średnim jest przynajmniej o 2060 więcej niż z wyższym.
5. Czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi:
(i) $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$,
(ii) $\frac{1}{1 - e^{it}}$.
(iii) $e^{-\frac{t^2}{4}} \cos(2t)$ (jeśli tak to należy podać odpowiadający rozkład!)
6. a) Niech X_1, X_2, X_3 będą próbami Bernoulliego, t.j. niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $B(1/2)$. Niech

$$Y_1 = X_1 - X_2, Y_2 = X_2 - X_3.$$

Policzyć funkcję prawdopodobieństwa $p_{ij} = P(Y_1 = i, Y_2 = j)$ (tj. podać możliwe wartości i, j dla których p_{ij} są ściśle dodatnie i wartości odpowiadających im prawdopodobieństw).

b) Pokazać istnienie ciągu zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \dots$ na przestrzeni probabilistycznej $((0, 1), \mathcal{B}(0, 1), \lambda)$ o następujących własnościach:

- $P(Y_n = i, Y_{n+1} = j) = p_{ij}$,
- zmienne $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ są dwuzależne tj. Y_k, Y_l są niezależne jeśli $|k - l| > 1$.

7. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m_j, 1)$. Niech $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ będą wektorami. Pokazać, że zmienne losowe $W = \sum_{j=1}^n a_j X_j$, $Z = \sum_{j=1}^n b_j X_j$ są niezależne iff wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ są ortogonalne.
8. Czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi:
 - (i) $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$,
 - (ii) $\frac{1}{1 - e^{it}}$.
 - (iii) $e^{-\frac{t^2}{4}} \cos(2t)$ (jeśli tak to należy podać odpowiadający rozkład!)
9. Rzucono 1000 razy sześcienna kostką. Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że suma oczek będzie między 3410 a 3590. Wsk. Oczekiwana wartość oczek wynosi 3.5 a odchylenie standardowe 1.7. Pokazać skąd się biorą te liczby, ale nie trzeba wykonywać rachunków w celu policzenia wartości oczekiwanej i wariancji! $\sqrt{1000} = 31.6$. Natomiast należy wykonać rachunki potrzebne do skorzystania z załączonych tablic rozkładu normalnego.
10. Błąd pomiaru długości boków prostopadłościanu jest

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma),$$

gdzie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Koszt związany z popełnieniem błędu jest $Y = X_1 + X_2 - X_3$. Obliczyć prawdopodobieństwo

$$P(Y > \sqrt{10}).$$

Obliczyć kowariancję $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_3)$.

11. Niech $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją mierzalną oraz

$$Z_j = \mathbf{1}_{\{f(X_j) > Y_j\}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Udowodnić

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{p.n.}$$

12. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, o jednakowym rozkładzie i $\mathbf{E}|X_1| = \infty$. Pokazać, że
 a) dla każdego a mamy $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq na) = \infty$,
 b) $\sup_{n \geq 1} n^{-1}|X_n| = \infty$ p.n.
 13. Niech $\xi_1, \xi_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie; $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = 0) = 1/2$. Definiujemy

$$X_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_{2j-1}}{2^j}, \quad X_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_{2j}}{2^j}.$$

Udowodnić, że X_1, X_2 są niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$.

14. Niech $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots$) będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Podać wraz dowodem warunek konieczny i dostateczny na to aby $\sum_{i \geq 1} X_i$ był zbieżny p.n.
 15. Niech X_1, X_2 będą zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie $\mathcal{N}((0, 0), \Sigma)$ gdzie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dla jakiego a ,

$$Y_1 = aX_1 + X_2 + 1, \quad Y_2 = X_1 + aX_2 + 2$$

są niezależne.

16. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z $P(X_n = -a^n) = P(X_n = a^n) = 1/2$ i $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Korzystając z nierówności Kołmogorowa oszacować z góry

$$P\left(\sup_{M \leq m \leq N} |S_m - S_M| > \epsilon\right),$$

gdzie $\epsilon > 0$. Pokazać, że jeśli $a < 10$, to

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sup_{M \leq m \leq N} |S_m - S_M| > \epsilon\right) = 0.$$

17. Niech $N, X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, $X_1, X_2, \dots$ są o jednakowym rozkładzie z funkcją charakterystyczną $\phi_X(t)$ oraz N ma rozkład Poissona $\text{Poi}(\lambda)$. Niech

$$Y = \sum_{j=1}^N X_j.$$

(i) Znaleźć funkcję charakterystyczną Y .

(ii) Niech F_λ będzie rozkładem Y . Pokazać, że $F_\lambda * F_\mu = F_{\lambda+\mu}$.

18. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, o jednakowym rozkładzie jednostajnym na odcinku $[1, a]$ gdzie $a > 1$, i $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Znaleźć granicę według rozkładu i prawdopodobieństwa ciągu $Y_1, Y_2, \dots$
19. Niech $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, X_i ma rozkład wykładniczy $\text{Exp}(\lambda_i)$ z parametrem λ_i oraz $Y_i = \pm 1$ z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$. Niech

$$Z_i = X_i Y_i.$$

- (i) Podać rozkład (dystrybuantę lub gęstość zmiennej losowej Z_i . Policzyć $\mathcal{E}[Z_i]$ oraz $\mathcal{D}^2[Z_i]$.
- (ii) Pokazać, że jeśli

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} < \infty,$$

to szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} Z_j$$

jest zbieżny p.n.

20. Niech $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$ i

$$Y_1 = \mathbf{1}_{\{X < 3\}}, \quad Y_2 = \mathbf{1}_{\{X > -1\}}.$$

a) Podaj liczbową wartość

$$p_1 = P(Y_1 = 1), \quad p_2 = P(Y_2 = 1), \quad p_{11} = P(Y_1 = 1, Y_2 = 1).$$

b) Oblicz $\mathcal{E}Y_i$, $\mathcal{D}^2Y_1$ oraz $\text{cov}(Y_1, Y_2)$ oraz funkcję charakterystyczną (Y_1, Y_2) w punkcie $(1, 2)$ tj.

$$\mathcal{E}e^{i(Y_1 + 2Y_2)}.$$

(wystarczy podać wzory w terminach p_i, p_{ij} , nie trzeba obliczeń liczbowych prowadzić do końca).

21. Zmienna losowa Y_n , gdzie $n = 1, 2, \dots$, ma rozkład gamma $\text{Gamma}(n, \lambda)$. Pokazać zbieżność wg rozkładu

$$\bar{Y}_n = \sqrt{n} \left(\frac{\lambda Y_n}{n} - 1 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Podać do czego zbiega ciąg

$$P(|\bar{Y}_n| \leq 1.96), \quad n = 1, 2, \dots$$

Można wykorzystać następujące informacje:

- Dla rozkładu $\text{Gamma}(a, b)$

f. char.	średnia	wariancja
$(1 - \frac{it}{b})^{-a}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$

- jeśli $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, to $P(N \leq 1.96) \approx 0.975$.

22. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona odpowiednio z średnią $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Zakładamy, że $\sum_{j \geq 1} \lambda_j < \infty$.
- a. Udowodnić, że $Y = \sum_{j \geq 1} jX_j < \infty$ p.n.
 - b. Wyprowadzić wzór na funkcję charakterystyczną zmiennej Y .