**Algebra liniowa 2, lista nr 3 (zajęcia 19.10.2017)**

## Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Sprawdzić własności operacji na przekształceniach przestrzeni $\mathbb{R}^3$ podane na wykładzie bez dowodu.
2. Sprawdzić własności operacji na macierzach rozmiaru $3 \times 3$ podane na wykładzie bez dowodu.
3. Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowane jest następująco: $F(x, y, z) = 0$ gdy $xyz \neq 0$ i $F(x, y, z) = (x, y, z)$ gdy $xyz = 0$. Wykazać, że $F$ jest jednorodne, ale nie jest addytywne.
4. Wykazać, że przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem $F(x, y, z) = (z, (x + y)^2, 1)$ nie jest ani addytywne ani jednorodne (trzeba podać odpowiednie kontrprzykłady).
5. Zapisać macierz $(a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ gdy (a) $a_{ij} = i - j$; (b) $a_{ij} = i^j$.
6. Dla podanych macierzy $M$, $N$ wyznaczyć $M + N$, $M - N$, $MN$, $NM$, $-3M$ oraz $M^T$.
(a) $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;
7. Zapisać wzór przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o macierzy $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Zapisać macierz przekształcenia liniowego przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadanego wzorami:
$x' = 2x - y$, $y' = -y + 5z$, $z' = x + y - z$.
9. Następujące przekształcenia liniowe zapisać wzorami, a następnie znaleźć ich macierze (w bazie standardowej): (a) symetria osiowa względem osi $Ox$; (b) symetria środkowa względem początku układu współrzędnych; (c) symetria względem płaszczyzny $Oxz$; (d) rzut prostokątny na płaszczyznę $Oyz$; (e) rzut prostokątny na oś $Oy$; (f) obrót o kąt $\varphi$ wokół osi $Ox$ w kierunku od dodatniej półosi osi $Oy$ do dodatniej półosi osi $Oz$; (g) powinowactwo prostokątne o skali $k$ względem płaszczyzny $Oxy$.
10. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że przekształcenie $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określone wzorem $G(X) = F(X) - F(0, 0, 0)$ jest liniowe.
11. Obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ (gdzie $A, B \in \mathbb{R}^3$) w przekształceniu $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy wektor $\overrightarrow{F(A)F(B)}$. Znaleźć obraz wektora $[4, 3, -1]$ zaczepionego w punkcie $(1, 2, 3)$ w przekształceniu afinicznym zadanym wzorami $x' = x + y - 1$, $y' = -y + 3z - 2$, $z' = x + y - z$.

## Zadania

1. Znaleźć wzory następujących przekształceń afinicznych: (a) translacja o wektor $[a, b, c]$; (b) rzut prostokątny na płaszczyznę $x + 2y - z + 1 = 0$; (c) symetria osiowa względem prostej $x = 1 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = 2 - 3t$ ($t \in \mathbb{R}$); (d) jednokładność o skali 4 względem punktu $(2, 1, -1)$. W każdym przypadku wskazać macierz części liniowej i wektor przesunięcia.
2. Dla przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiujemy jądro $Ker(F) = \{X \in \mathbb{R}^3 : F(X) = \overrightarrow{0}\}$ i obraz $Im(F) = F[\mathbb{R}^3]$. Znaleźć jądra i obrazy poniższych przekształceń liniowych:
(a) $x' = x + y + z$, $y' = x + y + z$, $z' = x + y + z$;
(b) $x' = 2x - y - z$, $y' = x - 2y + z$, $z' = x + y - 2z$;
(c) $x' = -x + y + z$, $y' = x - y + z$, $z' = x + y - z$.
W przypadku gdy jądrem/obrazem jest prosta lub płaszczyzna, zapisać ją równaniem parametrycznym.
3. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zaś $U, V, W$ wektorami z $\mathbb{R}^3$ (zaczepionymi w początku układu współrzędnych).
(a) Wykazać, że jeśli $U, V.W$ są liniowo zależne, to $F(U), F(V), F(W)$ są liniowo zależne. Oznacza to, że jeśli $F(U), F(V), F(W)$ są liniowo niezależne, to $U, V, W$ są liniowo niezależne.
(b) Zakładając, że $F$ jest różnowartościowe, wykazać, że jeśli $U, V.W$ są liniowo niezależne, to $F(U), F(V), F(W)$ są liniowo niezależne.
4. Obliczyć wyznacznik macierzy $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Zadanie rozwiązać różnymi metodami: (1) stosując schemat Sarrusa, (2) stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza, (3) stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranej kolumny, (4) sprowadzając macierz $M$ do postaci górno- lub dolnotrójkątnej przy pomocy operacji elementarnych na wierszach, (5) sprowadzając macierz $M$ do postaci górno- lub dolnotrójkątnej przy pomocy operacji elementarnych na kolumnach.

5. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy. Wyniki zapisać w jak najprostszej postaci.
(a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$;
(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ -\cos^2\alpha & -\cos^2\beta & -\cos^2\gamma \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$; (g) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{pmatrix}$.

6. Znaleźć wszystkie macierze rozmiaru $3 \times 3$ przemienne z macierzą $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Niech $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Znaleźć macierze $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ o następujących własnościach:
(a) pomnożenie macierzy $M$ przez $N_1$ z lewej strony powoduje zamianę drugiego i trzeciego wiersza w $M$;
(b) pomnożenie macierzy $M$ przez $N_2$ z prawej strony powoduje zamianę pierwszej i trzeciej kolumny w $M$;
(c) pomnożenie macierzy $M$ przez $N_3$ z lewej strony powoduje dodanie pierwszego wiersza pomnożonego przez 5 do drugiego wiersza;
(d) pomnożenie macierzy $M$ przez $N_4$ z prawej strony powoduje odjęcie drugiej kolumny od trzeciej;
(e) pomnożenie macierzy $M$ przez $N_5$ z lewej strony powoduje pomnożenie trzeciego wiersza przez 4;
(f) pomnożenie macierzy $M$ przez $N_6$ z prawej strony powoduje pomnożenie drugiej kolumny przez $-3$.

8. Mówimy, że przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zachowuje orientację, jeśli dla pewnej (równoważnie: dla każdej) bazy $(U, V, W)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, układy $(U, V, W)$ i $(F(U), F(V), F(W)$ są tak samo zorientowane. W przeciwnym wypadku mówimy, że $F$ zmienia orientację.
(a) Wykazać, że przekształcenie liniowe $F$ zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\det(m(F)) > 0$; $F$ zmienia orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\det(m(F)) < 0$. Wskazówka: wykorzystać fakt, że wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi wyznaczników.
(b) Które z przekształceń liniowych rozważanych w poprzednich zadaniach zachowują orientację, a które ją zmieniają?

9. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Zadanie rozwiązać na trzy sposoby: (1) używając dopełnień algebraicznych; (2) wykonując operacje elementarne na wierszach; (3) wykonując operacje elementarne na kolumnach.

10. **K** Macierzą transponowaną do macierzy $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ nazywamy macierz $M^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Wykazać, że dla macierzy $M, N$ rozmiaru $3 \times 3$ oraz $s \in \mathbb{R}$ zachodzą zależności: $(M^T)^T = M$, $(M+N)^T = M^T + N^T$, $(sM)^T = sM^T$ i $(MN)^T = N^T M^T$. Ponadto, gdy $M$ jest odwracalna, to mamy $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$.

11. **K** Macierz $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ nazywamy: (1) symetryczną, jeśli $M^T = M$, (2) antysymetryczną, jeśli $M^T = -M$. Wykazać, że dla $M, N \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mamy: (a) macierz odwrotna do macierzy symetrycznej [antysymetrycznej] jest symetryczna [odpowiednio: antysymetryczna]; (b) $MM^T$ jest symetryczna; (c) dla macierzy symetrycznych [antysymetrycznych] $M, N$, iloczyn $MN$ jest symetryczny wtedy i tylko wtedy gdy $MN = NM$; (d) dla macierzy antysymetrycznych $M, N$, iloczyn $MN$ jest antysymetryczny wtedy i tylko wtedy gdy $MN = -NM$. (e) dowolna macierz z $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ jest sumą macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

12. **K** Śladem macierzy kwadratowej $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ nazywamy sumę jej wyrazów na głównej przekątnej (oznaczenie: $tr(M)$). Wykazać, że dla macierzy $M, N \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ zachodzą równości:
(a) $tr(M) = tr(M^T)$, (b) $tr(M+N) = tr(M) + tr(N)$, (c) $tr(MN) = tr(NM)$.
Wywnioskować z (c), że jeśli $N$ jest odwracalna, to $tr(NMN^{-1}) = tr(M)$.

13. **K** Podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy jej podzbiór zawierający $\overrightarrow{0}$ zamknięty na dodawanie i na mnożenie przez skalary. Wymiarem podprzestrzni $V$ nazywamy maksymalną liczbę wektorów liniowo niezależnych należących do $V$ (oznaczenie: $\dim V$). Wykazać, że dowolna podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest albo równa $\{(0,0,0)\}$ albo jest prostą (płaszczyzną) przechodzącą przez początek układu wpółrzędnych albo jest równa $\mathbb{R}^3$. Ile wynosi wymiar w każdym przypadku?

14. **K** Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym. (a) Wykazać, że $Ker(F)$, $Im(F)$ oraz $\{X \in \mathbb{R}^3 : F(X) = X\}$ (zbiór punktów stałych ptrzekształcenia $F$) są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. (b) Wykazać, że dla przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mamy $\dim(KerF) + \dim(ImF) = 3$. (c) Podać przykład przekształcenia liniowego $F$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takiego, że $Ker(F)$ jest prostą zawartą w $Im(F)$ (uwaga: $Im(F)$ musi być wtedy płaszczyzną). (d) Podać przykład przekształcenia liniowego $F$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takiego, że $Im(F)$ jest prostą zawartą w $Ker(F)$ (uwaga: $Ker(F)$ musi być wtedy płaszczyzną).