Algebra liniowa 2, lista nr 4 (zajęcia 26.10.2017)

Rozważmy układ równań liniowych $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{cases}$

Macierz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ nazywamy macierzą główną tego układu zaś macierz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$, zapisywaną też w postaci $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$, jego macierzą rozszerzoną. Jeśli $b_1 = b_2 = b_3$, to powyższy układ nazywamy jednorodnym. Rzędem macierzy M nazywamy największe k takie, że istnieje macierz kwadratowa rozmiaru $k \times k$ powstała z M przez skreślenie pewnej liczby kolumn i wierszy o niezerowym wyznaczniku. Przyjmujemy przy tym, że wyznacznik macierzy (a) rozmiaru 1×1 wynosi a. Rząd macierzy M oznaczamy przez $\mathrm{rz}(M)$

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Napisać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego macierz rozszerzona jest następująca:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right)$

2. Dany jest układ równań:
$\begin{cases} x + 2y + 4z &= 1 \\ x - 3y + 2z &= 7 \\ x + 5y - 2z &= 0. \end{cases}$
Zapisać jego macierz główną i rozszerzoną.

3. Niech $A = (2, 1, -3)$, $B = (3, -1, 1)$. Czy A, B są rozwiązaniami poniższego układu równań?
$\begin{cases} 2x - y - z &= 6 \\ x - y - 2z &= 2 \\ x + 5y + 2z &= 0. \end{cases}$

4. Znaleźć wielomian f drugiego stopnia spełniający warunki $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

5. Dla macierzy rozmiaru 3×3 pokazać, że:
(a) zamiana miejscami dwóch wierszy (kolumn) nie zmienia rzędu macierzy;
(b) dodanie wiersza pomnożonego przez liczbę do innego wiersza nie zmienia rzędu macierzy (analogicznie dla kolumn);
(c) pomnożenie wiersza (kolumny) przez liczbę różną od 0 nie zmienia rzędu macierzy.

6. Określić rzędy poniższych macierzy posługując się definicją lub korzystając z poprzedniego ćwiczenia.
$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & -0 \end{pmatrix}$

Zadania

1. Każdy z poniższych układów równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Znaleźć je na trzy sposoby: (1) stosując wzory Cramera, (2) używając macierzy odwrotnej do macierzy głównej układu, (3) wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej układu (metoda eliminacji Gaussa).
(a) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 5x + 5y + 2z = 9 \\ 6x + 2y + 5z = 7. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$

2. Badając rząd macierzy głównej i rozszerzonej wykazać, że poniższe układy równań są sprzeczne.
(a) $\begin{cases} 3x - 5y + 6z = 4 \\ 7x + 3y + 2z = 5 \\ 10x + 9y - z = 7. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ -3x - 6y + 3z = 3. \end{cases}$

3. Poniższe układy mają nieskończone zbiory rozwiązań (prosta, płaszczyzna). Wyznaczyć te zbiory następującą metodą: (1) rozwiązać najpierw odpowiedni układ jednorodny i zapisać jego rozwiązanie w postaci parametrycznej (w tym celu można znaleźć fundamentalny układ rozwiązań); (2) znaleźć przykładowe rozwiązanie danego układu równań; (3) zapisać zbiór rozwiązań danego układu jako sumę rozwiązania danego układu oraz rozwiązania odpowiadającego mu układu jednorodnego.

(a) $\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ 3x - 4y - 9z = 4 \\ 5x - 9y - 8z = -5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 8 \\ -x + y - 2z = -4 \\ 5x - 5y + 10z = 20. \end{cases}$

4. Dla jakich wartości parametru a zbiór rozwiązań podanego układu równań: (1) jest pusty, (2) jest jednoelementowy, (3) jest prostą, (4) jest płaszczyzną?

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + a^2y + a^4z = 1 - a^2. \end{cases}$$

5. Dane są macierze:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -6 \\ 4 & -4 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Za pomocą operacji elementarnych (na wierszach i kolumnach) sprowadzić powyższe macierze do postaci zero-jedynkowej tak aby wszystkie jedynki pojawiły się na początku głównej przekątnej. Następnie określić rząd każdej macierzy (jest on równy liczbie pozostałych w macierzy jedynek).

(b) Za pomocą operacji elementarnych tylko na wierszach sprowadzić powyższe macierze do postaci schodkowej, a następnie odczytać rozwiązania układów równań o macierzach M, N, P.

6. Niech $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, przy czym a_1, a_2, a_3 są różne. Wykazać, że istnieje dokładnie jeden wielomian f stopnia co najwyżej 2 taki, że $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $f(a_3) = b_3$.

7. Przypuśćmy, że różne punkty $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ są rozwiązaniami pewnego układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi. Wykazać, że wtedy wszystkie punkty leżące na prostej przechodzącej przez X_1, X_2 są rozwiązaniami tego układu. Wywnioskować stąd, że jeśli zbiór rozwiązań takiego układu zawiera trzy punkty nie leżące na jednej prostej, to zawiera też płaszczyznę przechodzącą przez te trzy punkty.

8. Wykazać, że układ równań $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. W zależności od parametru λ opisać zbiór rozwiązań układu równań:

(a) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x + (2-\lambda)y + z = -\lambda \\ \lambda x + (\lambda - 1)y + z = 2\lambda \\ (4\lambda + 3)x + (2\lambda - 1)y + (\lambda + 4)z = 2\lambda + 3 \end{cases}$

10. W terminach wyznaczników i rzędów macierzy sformułować warunki, kiedy zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

(a) jest pusty, (b) jest jednoelementowy, (c) jest prostą, (d) jest płaszczyzną.