**Algebra liniowa 2, lista nr 5 (zajęcia 9.11.2017)**

## Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przeprowadza punkt $(1,1,0)$ na $(7,3,8)$, punkt $(1,2,1)$ na $(6,4,6)$ i punkt $(4,5,5)$ na $(7,9,6)$. Wyprowadzić wzór tego przekształcenia.

2. Korzystając z wzoru ma macierz przekształcenia w nowej bazie pokazać, że wyznacznik i ślad macierzy przekształcenia nie zależą od wyboru bazy.

3. Wykazać, że przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy gdy 0 nie jest jego wartością własną.

4. Niech $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{Z}$ i $\lambda \neq 0$ zachodzi
$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.
Wskazówka: udowodnić ten wzór najpierw dla $n > 0$ (przez indukcję), następnie znaleźć macierz odwrotną do $M$ i skorzystać z zależności $M^{-n} = (M^{-1})^n$.

5. Znaleźć wielomian charakterystyczny macierzy $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

6. Podać macierz rozmiaru $3 \times 3$, której wielomian charakterystyczny jest równy $= -t^3 + at^2 + bt + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7. Dla podanych macierzy znaleźć wartości własne (rzeczywiste i zespolone). Dla rzeczywistych wartości własnych znaleźć odpowiadające im podprzestrzenie własne.
(a) $M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, (c) $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
(d) $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, (e) $M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Macierz $M \in \mathbb{R}^3$ nazywamy ortogonalną, jeśli $MM^T = I$.
(a) Wykazać, że wyznacznik macierzy ortogonalnej wynosi 1 lub $-1$.
(b) Wykazać, że $M$ jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy gdy $M^T M = I$.
(c) Wykazać, że iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.
(d) Wykazać, że macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej jest ortogonalna. Jeśli $M$ jest ortogonalna, to $M^{-1} = M^T$.

9. Niech $k, l$ będą prostymi w $\mathbb{R}^3$ przechodzącymi przez początek układu współrzędnych. Wykazać, że złożenie obrotu wokół prostej $k$ z obrotem wokół $l$ jest obrotem wokół pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Wskazówka: przekształcenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest obrotem wokół prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych wtedy i tylko wtedy gdy jego macierz jest ortogonalna i ma wyznacznik równy 1. Iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.

10. Znaleźć wszystkie macierze ortogonalne postaci $\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & 1/2 & 1/2 \\ u & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Uwaga: w macierzy ortogonalnej jej kolumny (wiersze) mają długość 1 i są do siebie prostopadłe.

## Zadania

1. Znaleźć macierz przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{C}$ oraz macierz przejścia od bazy $\mathcal{C}$ do bazy $\mathcal{B}$:
$\mathcal{B} = ([1,2,3],[1,3,4],[1,5,7])$, $\mathcal{C} = ([2,3,4],[4,4,5],[6,3,4])$.

2. Macierze przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{C}$ jest równa $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ zaś macierz przejścia od bazy $\mathcal{C}$ do bazy $\mathcal{D}$ jest równa $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$. Znaleźć macierz przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{D}$.

3. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ma w bazie $\mathcal{B} = ([1,1,2],[1,4,3],[3,7,7])$ macierz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Znaleźć jego macierz w bazie $\mathcal{C} = ([0,0,-1],[1,1,0],[1,2,3])$.

4. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ma w pewnej bazie ortonormalnej macierz symetryczną. Wykazać, że macierz tego przekształcenia w dowolnej innej bazie ortonormalnej jest symetryczna. Wskazówka: macierz przejścia od bazy ortonormalnej do bazy ortonormalnej jest macierzą ortogonalną.

5. Współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ oznaczamy przez $x_1, x_2, x_3$ zaś współrzędne w bazie $\mathcal{C}$ przez $u_1, u_2, u_3$. Wiadomo, że $u_1 = x_2 - 2x_3$, $u_2 = x_1 - x_2 + x_3$ i $u_3 = -2x_1 + x_2 - x_3$.
   (a) Znaleźć równanie płaszczyzny $4x_1 - x_2 + 3x_3 + 1 = 0$ we współrzędnych $u_1, u_2, u_3$.
   (b) Znaleźć macierz przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{C}$.

6. Niech $\chi_M(t) = -(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$. Pokazać, że wtedy $\det(M) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ i $tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Ponadto $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ jest śladem macierzy dołączonej do $M$.

7. Niech $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi i $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Załóżmy, że: (1) $X$ jest wektorem własnym przekształceń $F, G$ odpowiadającym wartości własnej 2, (2) $Y$ jest wektorem własnym przekształcenia $F$ odpowiadającym wartości własnej 1 oraz wektorem własnym przekształcenia $G$ odpowiadającym wartości własnej 4. Wykazać, że $X+Y$ jest wektorem własnym przekształcenia $2F+G$. Jakiej wartości własnej odpowiada?

8. Niech $U = [1,2,0]$, $V = [0,-1,0]$, $W = [2,0,3]$. Znaleźć wzór przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takiego, że $U, V, W$ są wektorami własnymi $F$ odpowiadającymi wartościom własnym $3, -1, 0$ (odpowiednio).

9. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie podobieństwem liniowym o skali $k$. Wykazać, że jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną $F$, to $\lambda \in \{k, -k\}$. W szczególności oznacza to, że jedynymi wartościami własnymi izometrii liniowej mogą być 1 i $-1$.

10. Niech $M, N \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Mówimy, że macierz $M$ jest podobna do macierzy $N$ jeśli istnieje macierz odwracalna $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ taka, że $N = PMP^{-1}$. Piszemy wtedy $M \sim N$. Wykazać, że:
    (a) $\sim$ jest relacją równoważności w $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$;
    (b) macierze $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix}$ są podobne wtedy i tylko wtedy gdy $\{a,b,c\} = \{a',b',c'\}$;
    (c) macierz $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, nie jest podobna do żadnej macierzy diagonalnej.
    (d) macierz $\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, gdzie $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, nie jest podobna do macierzy diagonalnej ani do macierzy postaci $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

11. Niech $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Obliczyć macierz odwrotną do $M$ zapisując $M^{-1}$ jako kombinacją liniową macierzy $I, M, M^2$. Zapisać też $M^4$ jako kombinację liniową macierzy $I, M, M^2$. Uwaga: na wykładzie zostało pokazane, że jeśli $-t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy $M$ rozmiaru $3 \times 3$, to $-M^3 + c_2M^2 + c_1M + c_0I$ jest macierzą zerową. Przypomnieć, czym są współczynniki $c_0, c_1, c_2$.