Algebra liniowa 2, lista nr 6 (zajęcia 16.11.2017)

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Formą kwadratową na $\mathbb{R}^3$ nazywamy funkcję postaci $g(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+2\alpha xy+2\beta xz+2\gamma yz$, gdzie $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. Wtedy macierz $\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$ nazywamy macierzą formy g.
   (a) Zapisać formę kwadratową o macierzy $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
   (b) Zapisać macierz formy kwadratowej $x^2 - z^2 + 3xz - 4yz$.

2. W każdym przypadku podać przykład formy kwadratowej g spełniającej dane warunki.
   (a) $g(e_1) > 0$, $g(e_2) > 0$, $g(e_3) > 0$;
   (b) $g(e_1) < 0$, $g(e_2) < 0$, $g(e_3) > 0$.
   (c) $g(e_1) > 0$, $g(e_2) > 0$, $g(e_3) > 0$, $g(1,1,1) = 0$.

3. Mówimy, że forma kwadratowa $g(x,y,z)$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy $g(x,y,z) > 0$ dla $x,y,z \in \mathbb{R}$ takich, że $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Mówimy, że forma kwadratowa $g(x,y,z)$ jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy gdy $g(x,y,z) < 0$ dla $x,y,z \in \mathbb{R}$ takich, że $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Czy podane formy kwadratowe są dodatnio określone i czy są ujemnie określone? W przypadku gdy forma nie jest ani dodatnio ani ujemnie określona, podać stosowne przykłady.
   (a) $g_1(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$; (b) $g_2(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4yz$; (c) $g_3(x,y,z) = y^2 + 2z^2$; (c) $g_4(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$; (d) $g_5(x,y,z) = xy + yz + xz$; (e) $g_6(x,y,z) = -x^2 - 3y^2 - z^2$.

4. Niech $M, N \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ będą macierzami symetrycznymi. Wykazać, że jeśli dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $(MX) \circ X = (NX) \circ X$, to $M = N$. Wskazówka: podstawiać za X różne wektory, np. wersory osi układu współrzędnych.

5. Dana jest macierz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, w której $bd \neq 0$. Wykazać, że istnieje macierz odwracalna $P \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ taka, że $M = P \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$. Wskazówka: zauważyć, że jedyną wartością własną macierzy M jest a, przestrzeń własna odpowiadająca a jest prostą.

6. Czy iloczyn dwóch macierzy symetrycznych rozmiaru 3×3 zawsze jest macierzą symetryczną?

Zadania

1. Dla każdej z poniższych macierzy wykonać następujące czynności (1)–(6).
   (1) wyznaczyć wartości własne (rzeczywiste i zespolone);
   (2) rozłożyć wielomian charakterystyczny na czynniki liniowe;
   (3) wyznaczyć podprzestrzenie własne odpowiadające poszczególnym wartościom własnym;
   (4) Na podstawie informacji uzyskanych w punktach (1)–(3), ustalić do którego z czterech typów macierzy jest podobna dana macierz: macierz diagonalna o wyrazach rzeczywistych, macierz diagonalna z dwoma wyrazami zespolonymi, macierz postaci $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, macierz postaci $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.
   (5) Niech J oznacza macierz z punktu (4). Przedstawić daną macierz M w postaci PJP^{-1}, gdzie P jest macierzą odwracalną (w przypadku gdy dana macierz ma nierzeczywiste wartości własne, niektóre wartości własne macierzy P również będą nierzeczywiste).
   (6) dla $n \in \mathbb{N}_+$ obliczyć M^n i zapisać wynik w postaci pojedynczej macierzy.

   (a) $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, (c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   (d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, (e) $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Podprzestrzeń V przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy podprzestrzenią niezmienniczą względem przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeśli $F[V] \subseteq V$ (tzn. $f(X) \in V$ dla $X \in V$).
Niech F, G będą przekształceniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ zaś V, W podprzestrzeniami $\mathbb{R}^3$.
(a) Sprawdzić, że $\{\overrightarrow{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, $Ker(F)$, $Im(F)$ i zbiór punktów stałych F są podprzestrzeniami niezmienniczymi względem F.
(b) Sprawdzić, że jeśli V, W są podprzestrzeniami niezmienniczymi względem F, to również $V \cap W$ i $V + W$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi względem F. ($V + W$ oznacza $\{X + Y : X \in V, Y \in W\}$.)
(c) Sprawdzić, że jeśli V jest niezmiennicza względem F i G, to jest też niezmiennicza względem $F+G$, $F \circ G$ i αF dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (a) Wykazać, że dla dowolnej macierzy $M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ oraz wektorów X, Y z $\mathbb{R}^3$ zachodzi $(MX) \circ Y = X \circ (M^T Y)$. Wywnioskować stąd, że dla M symetrycznej zachodzi $(MX) \circ Y = X \circ (MY)$.
(b) Niech $M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną, λ jej rzeczywistą wartością własną, X wektorem własnym długości 1 odpowiadającym wartości własnej λ zaś Π płaszczyzną prostopadłą do X przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Wykazać, że dla dowolnego $Y \in \Pi$, $MY \in \Pi$ (tzn. Π jest podprzestrzeną niezmienniczą dla M). Wskazówka: wykorzystać (a).
(c) Niech Y, Z będą wektorami z Π prostopadłymi do siebie i mającymi długość 1. Wtedy $\mathcal{B} = (X, Y, Z)$ jest bazą ortonormalną $\mathbb{R}^3$. Zauważyć, że wtedy przekształcenie liniowe F_M (o macierzy M w bazie standardowej) ma w bazie $\mathcal{B}$ macierz symetryczną (skorzystać z poprzedniej listy). Dokładniej, jest to macierz postaci $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$.
(d) Z wykładu z algebry liniowej 1 wiadomo, że istnieją macierz ortogonalna Q rozmiaru 2×2 o wyrazach rzeczywistych oraz macierz diagonalna D_0 o wyrazach rzeczywistych takie, że $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = QD_0Q^{-1} = QD_0Q^T$. Wywnioskować stąd i z (c), że $M = PDP^T$, gdzie P jest ortogonalna, zaś D diagonalna.

4. Wykazać, że dowolna izometria liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma w pewnej bazie ortonormalnej macierz postaci $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.
Wskazówka: izometria liniowa zachowuje iloczyn skalarny. Wprowadzić płaszczyznę Π podobnie jak w poprzednim zadaniu.

5. Podać przykład wielomianu postaci $-t^3 + at^2 + bt + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, dla którego nie istnieje macierz symetryczna $M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ taka, że $\chi_M(t) = -t^3 + at^2 + bt + c$. Wskazówka: macierz symetryczna może mieć tylko rzeczywiste wartości własne.

6. Niech $M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$. Wykazać, że M^3 jest macierzą zerową wtedy i tylko wtedy gdy jedyną wartością własną macierzy M jest 0. Wskazówka: można wykorzystać rozkład Jordana macierzy M.

7. Przedstawić elipsoidę o półosiach długości a, b, c jako obraz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe. Korzystając z tego, że przekształcenie liniowe o macierzy M zmienia objętość figur w stosunku $|\det(M)|$, znaleźć wzór na objętość obszaru ograniczonego elipsoidą o półosiach długości a, b, c.

8. (a) Wykazać, że forma kwadratowa o macierzy $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy $a > 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} > 0$ i $\det(M) > 0$.
(b) Wykazać, że forma kwadratowa o macierzy $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy gdy $a < 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} > 0$ i $\det(M) < 0$.

9. Napisać równanie drugiego stopnia z trzema niewiadomymi x, y, z, którego zbiór rozwiązań w $\mathbb{R}^3$ jest
(a) punktem $(4, -5, 1)$;
(b) prostą o równaniu kanonicznym $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{5}$;
(c) płaszczyzną o równaniu ogólnym $2x - 6y + z + 7 = 0$;
(d) parą płaszczyzn o równaniach ogólnych $x - y + 1 = 0$ oraz $x - 2y + z = 0$;
(e) zbiorem pustym.

10. Napisać równania drugiego stopnia:
(a) stożka stycznego do sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ o wierzchołku w punkcie $(1, 2, 3)$;
(b) elipsoidy o półosiach długości 2, 2, 5 i środku $(3, -1, 4)$ takiej, że najdłuższa półoś jest równoległa do wektora $[1, 1, 1]$;
(c) hiperboloidy jednopowłokowej powstałej przez obrót prostej $x - 1 = y = z$ wokół osi Oz;
(d) walca eliptycznego będącego sumą wszystkich prostych równoległych do wektora $[1, 1, -1]$ i mających punkt wspólny z okręgiem $x^2 + y^2 = 1$ leżącym w płaszczyźnie Oxy.

11. Znaleźć równanie obrazu hiperboloidy $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
(a) w jednokładności o skali -2 względem punktu $(1, 2, 3)$;
(b) w obrocie wokół osi Oy o kąt $\frac{\pi}{4}$;
(c) w symetrii względem płaszczyzny $x + y - z + 1 = 0$;
(d) w translacji o wektor $[4, -1, 3]$.

12. **K** Określić, jaki podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest zbiorem rozwiązań podanego równania drugiego stopnia:
(a) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$;
(b) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz - 20x + 10y - 30z + 25 = 0$;
(c) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;
(d) $5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 14x + 2y + 11 = 0$;
(e) $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8xz - 8yz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$;
(f) $5x^2 + 6y^2 - 4z^2 - 17xy - 19xz + 5yz + 11x - 7y - 2z + 2 = 0$;
(g) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$;
(h) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 30 = 0$;
(i) $5x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 6xy + 12xz - 6yz - 18x + 8y - 30z + 26 = 0$;
(j) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$;
(k) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$;
(l) $9x^2 + y^2 + 4z^2 - 6xy + 12xz - 4yz - 12x + 4y - 8z - 5 = 0$;
(m) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$;
(n) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$;
(o) $5x^2 + 11y^2 + 6z^2 - 10xy - 12yz + 2x - 4y + 2z + 10 = 0$;
(p) $5x^2 + 5y^2 - 6z^2 + 2xy + 32x + 16y + 56 = 0$.
Odpowiedzi: (a) walec paraboliczny; (b) płaszczyzna; (c) walec eliptyczny; (d) zbior pusty; (e) paraboloida eliptyczna; (f) para płaszczyzn nierównoległych; (g) paraboloida hiperboliczna; (h) elipsoida; (i) prosta; (j) hiperboloida dwupowłokowa; (k) paraboloida eliptyczna; (l) para płaszczyzn równoległych; (m) hiperboloida jednopowłokowa; (n) walec hiperboliczny; (o) punkt; (p) stożek eliptyczny.

Przypominam Państwu, że 23.11 jest kolokwium. Obowiązują listy 1–5 oraz lista 6 bez ostatniego zadania (zadanie to rozwiążemy na konwersatorium 23.11 i 30.11).