Algebra liniowa 2, lista nr 7 (zajęcia 30.11.2017)

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Pokazać, że $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie jest ciałem. Wskazówka: czy dla każdego $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Z}$ takie, że $a \cdot b = 1$?

2. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem i niech $a, b, c \in K$. Wykazać, że:
(a) $0 \cdot a = 0$; (b) $ab = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = 0$ lub $b = 0$; (c) $(-1) \cdot a = -a$; (d) $(-a) \cdot b = -(ab) = a \cdot (-b)$; (e) $(-a) \cdot (-b) = ab$; (f) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $a, b \in K$, $u, v \in V$. Wykazać, że: (a) $a \cdot u = \overrightarrow{0}$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = 0$ lub $u = \overrightarrow{0}$; (b) $(-1) \cdot u = -u$; (c) $(-a) \cdot u = -(a \cdot u) = a \cdot (-u)$; (d) $(-a) \cdot (-u) = a \cdot u$; (e) $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$; (f) $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$

4. Pokazać, że w dowolnej przestrzeni liniowej V nad ciałem K:
(a) $\emptyset$ jest zbiorem liniowo niezależnym;
(b) $\{\overrightarrow{0}\}$ jest zbiorem liniowo zależnym;
(c) $\emptyset$ jest bazą V wtedy i tylko wtedy gdy $V = \{\overrightarrow{0}\}$;
(d) jeśli $v \in V$ jest wektorem niezerowym, to $\{v\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

5. Dla przykładów przestrzeni liniowych podanych na wykładzie uzasadnić, że rzeczywiście są to przestrzenie liniowe.

6. Nich $\mathcal{C}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych numerowanych liczbami naturalnymi, to znaczy $\mathcal{C} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{R})\}$. W $\mathcal{C}$ definiujemy działania: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (gdzie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Wykazać, że $\mathcal{C}$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.

7. Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym. Przez $\mathbb{R}^A$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji z A w $\mathbb{R}$. W $\mathbb{R}^A$ definiujemy działania: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ (gdzie $f, g \in \mathbb{R}^A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in A$). Wykazać, że $\mathbb{R}^A$ z tak określonymi działaniami jest przesrzenią liniową nad $\mathbb{R}$.

8. Podać przykład dwóch podprzestrzeni V_1, V_2 w $\mathbb{R}^2$ takich, że $V_1 \cup V_2$ nie jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$. Zrobić to samo dla $\mathbb{R}^3$. Odpowiedzi uzasadnić.

9. W przestrzeni $\mathbb{F}_5^3$ (gdzie $\mathbb{F}_5 = (\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$) obliczyć: (a) $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$, (b) $-\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$, (d) $3 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$.

10. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $v_1, \ldots, v_n \in V$, gdzie $n \geq 2$. Pokazać, że jeśli dwa spośród wektorów $v_1, \ldots, v_n$ są równe, to $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo zależne.

11. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $v_1, \ldots, v_n \in V$, gdzie $n \geq 2$. Pokazać, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy gdy któryś z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Zadania

1. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Wykazać że $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Uwaga: Większość własności w oczywisty sposób jest konsekwencją odpowiednich własności dodawania i mnożenia w $\mathbb{R}$. Najważniejsze jest udowodnienie, że $+$ i $\cdot$ są działaniami w $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ oraz udowodnienie istnienia elementów odwrotnych względem działań $+$ i $\cdot$.

2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $u, v \in V$, $A, B \subseteq V$. Wykazać, że:
(a) $A \subseteq Lin(A) = Lin(Lin(A))$; (b) jeśli $A \subseteq B$, to $Lin(A) \subseteq Lin(B)$; (c) $Lin(A \cup B) = Lin(A) + Lin(B)$; (d) $Lin(A \cap B) \subseteq Lin(A) \cap Lin(B)$; (e) jeśli $v \in Lin(A \cup \{u\}) \setminus Lin(A)$, to $u \in Lin(A \cup \{v\})$.

3. Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru n nad skończonym ciałem K. Wykazać, że V ma $|K|^n$ elementów.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś W_1 i W_2 jej podprzestrzeniami o skończonych wymiarach. Wykazać, że wtedy $W_1 + W_2$ ma wymiar skończony równy $dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ o bazie $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Zauważyć, że wtedy V jest też przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ (działanie mnożenia wektorów z V przez skalary z $\mathbb{C}$ ograniczamy do mnożenia przez skalary z $\mathbb{R}$). Wykazać, że $\{v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n\}$ jest bazą V nad $\mathbb{R}$ (i oznacza jedność urojoną). Tak więc wymiar V nad $\mathbb{R}$ jest dwukrotnie większy niż nad $\mathbb{C}$.

6. W każdym przypadku pokazać, że podzbiór A przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest zbiorem liniowo niezależnym.
(a) $V = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$, $A = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$;
(b) $V = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $A = \{1, x, \sin(x), \cos(x)\}$;
(c) $V = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;
(d) $V = \mathbb{R}[x]$, $K = \mathbb{R}$, $A = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ (tutaj A jest bazą $\mathbb{R}[x]$).

7. W każdym przypadku pokazać, że podzbiór W przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest podprzestrzenią V.
(a) $V = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$;
(b) $V = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)) = 0\}$;
(c) $V = \mathcal{C}$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_0 = 2a_1 - a_3\}$;
(d) $V = \mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{C}$, $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$, gdzie $a_1, \ldots, a_n$ są ustalonymi liczbami zespolonymi.

8. W każdym przypadku pokazać, że podzbiór W przestrzeni liniowej V nad ciałem K nie jest podprzestrzenią V.
(a) $V = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 1\}$;
(b) $V = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))$ istnieje i $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)) \neq 0\}$;
(c) $V = C^1(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f'(0) \geq 0\}$;
(d) $V = \mathcal{C}$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : |a_0 + a_1| < 1\}$.

9. **K** Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś i niech $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie bazą V. Załóżmy ponadto, że wektory $w_1, \ldots, w_k \in V$ (gdzie $k \leq n$) są liniowo niezależne. Wykazać, że pewnych k wektorów z $\mathcal{B}$ możemy zastąpić wektorami $w_1, \ldots, w_k$ otrzymując nową bazę przestrzeni V. Wywnioskować stąd, że dowolna baza przestrzeni V jest n-elementowa.