Algebra liniowa 2, lista nr 8 (zajęcia 7.12.2017)

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Niech K będzie ciałem zaś $F : K \to K$ przekształceniem liniowym. Wykazać, że istnieje $\alpha \in K$ takie, że $F(x) = \alpha \cdot x$ dla $x \in K$.
2. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K zaś $F, G : V \to W$ przekształceniami liniowymi. Wykazać, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in K$, $\alpha F + \beta G$ jest przekształceniem liniowym z V w W. Uwaga: $\alpha F + \beta G$ definiujemy wzorem $(\alpha F + \beta G)(v) = \alpha F(v) + \beta G(v)$ dla $v \in V$.
3. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K zaś $F : U \to V$ i $G : V \to W$ przekształceniami liniowymi. Wykazać, że $G \circ F : U \to W$ jest przekształceniem liniowym.
4. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K zaś $F : V \to W$ przekształceniem liniowym odwracalnym. Wykazać, że wtedy $F^{-1} : W \to V$ jest przekształceniem liniowym.
5. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wykazać, że: (a) $U \cong U$, (b) jeśli $U \cong V$, to $V \cong U$, (c) jeśli $U \cong V$ i $V \cong W$, to $U \cong W$.
6. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K takimi, że $dim(V) = 20$ i $dim(W) = 8$. Czy istnieje przekształcenie liniowe $F : V \to W$ takie, że $Ker(F) = 11$? Wskazówka: tutaj $dim(Im(F)) \leq 8$.
7. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wykazać, że $V \times W$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K.
8. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wykazać, że $(U \times V) \times W \cong U \times (V \times W)$.
9. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wykazać, że wtedy V^* jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Jaki funkcjonał jest wektorem zerowym w tej przestrzeni?
10. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $W < K$. Wykazać, że V/W z działaniami zdefiniowanymi na wykładzie jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Zadania

1. W każdym przypadku pokazać, że $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym (V, W to przestrzenie liniowe nad ciałem K). Opisać jądro i obraz F.
(a) $V = W = \mathbb{R}_3[x]$, $K = \mathbb{R}$, $F(f) = f'$;
(b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$, $F(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$;
(c) $V = \mathcal{C}$ (ciągi o wyrazach rzeczywistych), $W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $F((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_0 - a_1, a_2 + 2a_3)$;
(d) $V = W = \mathcal{C}$, $K = \mathbb{R}$, $F((a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$;
(e) $V = W = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $F(f) = g$, gdzie $g(x) = f(x+1)$ (czyli $F(f)(x) = f(x+1)$);
(f) $V = W = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $F(f) = f \cdot g_0$, gdzie $g_0(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$
2. W każdym przypadku pokazać, że $F : V \to W$ nie jest przekształceniem liniowym (V, W to przestrzenie liniowe nad ciałem K).
(a) $V = W = \mathbb{R}[x]$, $K = \mathbb{R}$, $F(f)(x) = |f(x)|$;
(b) $V = W = \mathbb{R}[x]$, $K = \mathbb{R}$, $F(f) = f + 1$;
(c) $V = W = C(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $F(f) = f \cdot f$;
(d) $V = W = \mathcal{C}$, $K = \mathbb{R}$,
$F((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \begin{cases} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{gdy } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ma najwyżej jeden niezerowy wyraz} \\ (0, 0, 0, \ldots) & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$
3. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^2$ spełnia warunki: $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Znaleźć wzór na $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.
4. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K zaś $F : V \to$ W przekształceniem liniowym. Niech ponadto $v_1, \ldots, v_n \in V$.
(a) Wykazać, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo zależne, to $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ są liniowo zależne.
(b) Wykazać, że jeśli $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ są liniowo niezależne, to $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.
(c) Wykazać, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne i F jest różnowartościowe, to $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ są liniowo niezależne.

5. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech ponadto $\{b_1, \ldots, b_n\}$ będzie bazą V zaś $w_1, \ldots, w_n \in W$. Wykazać, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $F : V \to W$ takie, że $F(b_i) = w_i$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

6. Na przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważamy funkcjonały F_1, F_2 i F_3 określone następująco: $F_1(x, y, z) = x + 2y - z$, $F_2(x, y, z) = y + z$, $F_3(x, y, z) = -x + y + 2z$. Wykazać, że $\{F_1, F_2, F_3\}$ jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$.

7. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś F niezerowym funkcjonałem liniowym na V. Wykazać, że $V/Ker(F) \cong K$.

8. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś F, G funkcjonałami liniowymi na V. Wykazać, że jeśli $Ker(F) = Ker(G)$, to istnieje $\alpha \in K \setminus \{0\}$ takie, że $G = \alpha F$.

9. W każdym przypadku pokazać, że przestrzeń ilorazowa U/V jest izomorficzna z przestrzenią W (nad ciałem K). W tym celu zdefiniować przekształcenie liniowe $F : U \to W$ takie, że $Ker(F) = V$ i $Im(F) = W$. Następnie skorzystać z odpowiedniego twierdzenia z wykładu.
(a) $U = \mathbb{R}^3$, $V =$ prosta o równaniu $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, $W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$;
(b) $U = C(\mathbb{R})$, $V = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$, $W = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$;
(c) $U = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ istnieją$\}$, $V = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$, $W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$.

10. W przestrzeni liniowej $V = \mathbb{Z}_3^2$ (nad ciałem $\mathbb{Z}_3$) rozważamy podprzestrzeń $W = Lin\{(1, 2)\}$. Wypisać elementy przestrzeni ilorazowej V/W a następnie sporządzić tabelki działań w V/W (dodawania i mnożenia przez skalary).

11. **K** Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wykazać, że odwzorowanie $F : V \to V^{**}$ określone wzorem $F(v)(f) = f(v)$ (gdzie $v \in V$, $f \in V^*$) jest różnowartościowym przekształceniem liniowym. Uwaga: V^* to przztrzeń dualna do V, czyli przestrzeń funkcjonałów liniowych na V.

12. **K** Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś W_1 i W_2 jej podprzestrzeniami o skończonych wymiarach.
(a) Wykazać, że wtedy przestrzenie ilorazowe $W_1/(W_1 \cap W_2)$ i $(W_1 + W_2)/W_2$ są izomorficzne. Wskazówka: odwzorowanie $F : W_1/(W_1 \cap W_2) \to (W_1 + W_2)/W_2$ określone wzorem $F(x + (W_1 \cap W_2)) = x + W_2$ gdzie $x \in W_1$ jest izomorfizmem.
(b) Wywnioskować z (a), że wymiar podprzestrzeni $W_1 + W_2$ jest równy $dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$. Wskazówka: użyć wzoru na wymiar przestrzeni ilorazowej z wykładu.