Algebra liniowa 2, lista nr 9 (zajęcia 14.12.2017)

Uwaga: $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ oznacza zbiór wszystkich macierzy rozmiaru $m \times n$ (m wierszy, n kolumn) o wyrazach z ciała K.

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Dana jest macierz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_5)$. Znaleźć $3M$ oraz M^T.

2. Obliczyć iloczyn $M \cdot N$, traktując M, N jako macierze o wyrazach rzeczywistych:
$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. W każdym przypadku w przestrzeni liniowej V nad ciałem K znaleźć współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}$.
(a) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $K = \mathbb{R}$, $v = x + 1$, $\mathcal{B} = (x, (x + 2)^2, x + 1)$;
(b) $V = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{C}$, $v = \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1-i \\ i \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K wymiaru $n \in \mathbb{N}_+$ zaś $\mathcal{B}$ bazą V. Wykazać, że:
(a) jeśli $\alpha \in K$ i $v \in V$, to $[\alpha v]_{\mathcal{B}} = \alpha[v]_{\mathcal{B}}$;
(b) jeśli $v_1, v_2 \in V$, to $[v_1 + v_2]_{\mathcal{B}} = [v_1]_{\mathcal{B}} + [v_2]_{\mathcal{B}}$;
(c) odwzorowanie z V w K^n przyporządkowujące wektorowi $v \in V$ jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ jest izomorfizmem.

5. Uzasadnić własności operacji na macierzach podane na wykładzie bez dowodu.

Zadania

1. Niech K będzie ciałem i niech $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $N \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$. Wykazać, że wtedy $(MN)^T = N^T M^T$. Ile wierszy i ile kolumn ma macierz $N^T M^T$?

2. Uzasadnić łączność mnożenia macierzy o wyrazach z dowolnego ciała K, to znaczy wykazać, że jeśli $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $N \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ i $P \in \mathcal{M}_{p\times r}(K)$, to $(MN)P = M(NP)$.

3. Niech K będzie ciałem zaś $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ macierzami odwracalnymi.
(a) Wykazać, że macierz MN jest odwracalna i $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.
(b) Wykazać, że macierz M^T jest odwracalna i $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

4. Niech K będzie ciałem. Śladem macierzy $M = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ nazywamy sumę jej wszystkich wyrazów na głównej przekątnej, czyli $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
(a) Wykazać, że jeśli $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ i $N \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$, to $tr(MN) = tr(NM)$.
(b) Wywnioskować z (a), że jeśli $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ i N jest odwracalna, to $tr(NMN^{-1}) = tr(N)$.

5. W każdym przypadku V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, $\mathcal{B}$ jest bazą V zaś $\mathcal{C}$ bazą W. Należy zapisać wzorem przekształcenie liniowe $F : V \to W$, które w bazach $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ma macierz równą M.
(a) $V = W = \mathbb{R}_2[x]$, $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$, $\mathcal{C} = (1, x + 1, (x + 1)^2)$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
(b) $V = W = \mathbb{Z}_3^3$, $K = \mathbb{Z}_3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
(c) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}_3[x]$, $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, -e_1)$, $\mathcal{C} = (x, x^3, 1, x^2)$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

6. W każdym przypadku V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem liczb rzeczywistych, $\mathcal{B}$ jest bazą V zaś $\mathcal{C}$ bazą W. Należy znaleźć macierz przekształcenia liniowego $F : V \to W$ w bazach $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, to znaczy macierz $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$.
(a) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (1, 1 + x, (1 + x)^2)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $F(f) = \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(2) \end{pmatrix}$.

(b) $V=\mathbb{C}^2$, $W=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}Re(w+z)\\Im(w-z)\end{pmatrix}$.

(c) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B}=(1,x,x^2)$, $\mathcal{C}=(x^3,x^2,x,1)$, $F(f)(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$.

7. Rozważmy dwie bazy przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$: $\mathcal{B}=(-x^2,1,x)$ oraz $\mathcal{C}=(1,x-2,(x-2)^2)$. Znaleźć macierz przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{C}$ (czyli macierz $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$) oraz macierz przejścia od bazy $\mathcal{C}$ do bazy $\mathcal{B}$ (czyli macierz $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id)$). Następnie wyrazić współrzędne w jednej bazie przez współrzędne w drugiej bazie.

8. Niech V,W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, niech $\mathcal{B}$ będzie bazą V zaś $\mathcal{C}$ bazą W.
(a) Wykazać, że jeśli $F:V\to W$ jest przekształceniem liniowym i $\alpha\in K$, to $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\alpha F)=\alpha m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$.
(b) Wykazać, że jeśli $F,G:V\to W$ są przekształceniami liniowymi, to $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F+G)=m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)+m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(G)$.

9. Niech $V=\mathbb{R}_3[x]$, $W=\mathbb{R}^2$, $Z=\mathbb{R}_2[x]$. W przestrzeniach tych rozważamy bazy: $\mathcal{B}=(x,1,-x^2,x^3)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{D}=(x^2,x,1)$. Definiujemy przekształcenia liniowe $F:V\to W$ i $G:W\to Z$ wzorami $F(f)=\begin{pmatrix}f'(2)\\f(-1)\end{pmatrix}$; $G\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)=a-b(x+1)^2$. Należy znaleźć macierz przekształcenia $G\circ F$ w bazach $\mathcal{B},\mathcal{D}$ na dwa sposoby:
(1) wyznaczyć złożenie $G\circ F$, a następnie z definicji macierz $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(G\circ F)$;
(2) wyznaczyć z definicji macierze $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(G)$ i $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$, a następnie pomnożyć je przez siebie.

10. **K** Niech K będzie ciałem i niech $M\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Wtedy wiersze M możemy traktować jako m wektorów z K^n zaś kolumny M jako n wektorów z K^m. Wykazać, że żadna z poniższych operacji (a)–(f) nie zmienia liczby liniowo niezależnych wierszy ani liczby liniowo niezależnych kolumn w macierzy M. Oznacza to że wymiar podprzestrzeni rozpinanej w K^n przez wiersze macierzy M nie zmienia się przy operacjach (a)–(f). Tak samo wymiar podprzestrzeni rozpinanej w K^m przez kolumny macierzy M nie zmienia się przy operacjach (a)–(f).
(a) zamiana dwóch wierszy miejscami;
(b) zamiana dwóch kolumn miejscami;
(c) dodanie pewnego wiersza pomnożonego przez skalar z K do innego wiersza;
(d) dodanie pewnej kolumny pomnożonej przez skalar z K do innej kolumny;
(e) pomnożenie pewnego wiersza przez niezerowy skalar z K;
(f) pomnożenie pewnej kolumny przez niezerowy skalar z K.