Algebra liniowa 2, lista nr 10 (zajęcia 21.12.2017)

Uwaga: $\mathrm{rz}(M)$ oznacza rząd macierzy M. K jest ciałem.

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Sprawdzić, że macierze elementarne zdefiniowane na wykładzie są odwracalne.

2. Niech $F : K^{10} \to K^6$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $Ker(F)$ ma wymiar 7. Ile wynosi rząd macierzy przekształcenia F (w bazach standardowych przestrzeni K^{10} i K^6).

3. (a) Jaki może być rząd macierzy, której wszystkie wiersze są jednakowe?
(b) Jaki może być rząd macierzy, której wszystkie kolumny są jednakowe?

4. Dany jest układ równań. Zapisać jego macierz główną i macierz rozszrzoną.
$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 5x_1 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{cases}$$

5. Zapisać układy równań o macierzach rozszerzonych: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Dane są macierze o wyrazach rzeczywistych w postaci schodkowej:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
W każdym przypadku określić, czy układ równań o danej macierzy rozszerzonej ma rozwiązanie i czy jest ono jedyne.

7. Dane są macierze o wyrazach rzeczywistych: $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 8 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
(a) Za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić macierze M, N do postaci schodkowej, a następnie określić ich rzędy.
(b) Za pomocą operacji elementarnych na wierszach i na kolumnach sprowadzić macierze M, N do postaci zerojedynkowej tak, aby wszystkie wyrazy równe 1 miały jednakowe wskaźniki i znalazły się w początkowych wierszach macierzy (liczba otrzymanych jedynek powinna być równa rzędowi macierzy).

8. Niech $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Wykazać, że
(a) $\mathrm{rz}(M) = \mathrm{rz}(M^T)$;
(b) jeśli $\alpha \in K \setminus \{0\}$, to $\mathrm{rz}(\alpha M) = \mathrm{rz}(M)$.

9. Dana jest macierz $M \in \mathcal{M}_{6\times 10}(\mathbb{R})$ rzędu 5. Niech N będzie macierzą powstałą z M w wyniku skreślenia trzech wierszy i trzech kolumn. Pokazać, że rząd macierzy N może być każdą z liczb $0, 1, 2, 3$, ale nie może być większy od 3.

Zadania

1. Dana jest macierz $M \in \mathcal{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$. Zapisać macierze elementarne:
(a) macierz $N_1 \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ taką, że pomnożenie M przez N_1 od lewej strony (tzn. wykonujemy mnożenie $N_1 \cdot M$) powoduje zamianę miejscami drugiego i czwartego wiersza w M;
(b) macierz $N_2 \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ taką, że pomnożenie M przez N_2 od lewej strony (tzn. wykonujemy mnożenie $N_2 \cdot M$) powoduje dodanie pierwszego wiersza pomnożonego przez 7 do trzeciego wiersza w M;
(c) macierz $N_3 \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ taką, że pomnożenie M przez N_3 od lewej strony (tzn. wykonujemy mnożenie $N_3 \cdot M$) powoduje pomnożenie drugiego wiersza w M przez -3;
(d) macierz $N_4 \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ taką, że pomnożenie M przez N_4 od prawej strony (tzn. wykonujemy mnożenie $M \cdot N_4$) powoduje zamianę miejscami trzeciej i szóstej kolumny w M;
(e) macierz $N_5 \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ taką, że pomnożenie M przez N_5 od prawej strony (tzn. wykonujemy mnożenie $M \cdot N_5$) powoduje w M odjęcie piątej kolumny od trzeciej kolumny;
(f) macierz $N_6 \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ taką, że pomnożenie M przez N_6 od prawej strony (tzn. wykonujemy mnożenie $M \cdot N_6$) powoduje w M pomnożenie czwartej kolumny przez $-\frac{3}{4}$.

Zapisać też macierze odwrotne do macierzy $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$.

2. Dane są macierze $M, N \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Wykazać, że $\mathrm{rz}(M+N) \leq \mathrm{rz}(M)+\mathrm{rz}(N)$. Wskazówka: Niech V_1 będzie podprzestrzenią K^m rozpinaną przez kolumny M zaś V_2 podprzestrzenią K^m rozpinaną przez kolumny N. Wykorzystać równość $dim(V_1)+dim(V_2) = dim(V_1)+dim(V_2)-dim(V_1\cap V_2)$.

3. Dane są macierze $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ i $N \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$. Wykazać, że
$\mathrm{rz}(M)+\mathrm{rz}(N)-n \leq \mathrm{rz}(MN) \leq \min(\mathrm{rz}(M), \mathrm{rz}(N))$.
Można wykorzystać fakty z wykładu: (1) Jeśli V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K zaś $F: V \to W$ jest przekształceniem liniowym o macierzy M (w pewnych bazach), to $dim(V) = dim(Ker(F))+dim(Im(F))$, (2) $dim(Im(F)) = \mathrm{rz}(M)$

4. Dane są macierze $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ i $N \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$. Wykazać, że
(a) jeśli $\mathrm{rz}(N) = n$, to $\mathrm{rz}(MN) = \mathrm{rz}(M)$;
(b) jeśli $\mathrm{rz}(M) = n$, to $\mathrm{rz}(MN) = \mathrm{rz}(N)$.
Wskazówka: w (a) wykorzystać poprzednie zadanie, w (b) przejść na mecierze transponowane.

5. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K zaś $F: V \to W$ przekształceniem liniowym. Wykazać, że rząd macierzy przekształcenia F nie zależy od wyboru baz w przestrzeniach V, W. Wskazówka: wykorzystać wzór na zmianę bazy z wykładu oraz poprzednie zadanie.

6. Znaleźć macierze odwrotne do podanych macierzy o wyrazach rzeczywistych.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
Zadanie rozwiązać na dwa sposoby: (1) używając operacji elementarnych na wierszach, (2) używając operacji elementarnych na kolumnach.

7. Poniższy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Znaleźć je używając macierzy odwrotnej do macierzy głównej układu.
$$\begin{cases} 5x_1+4x_2+2x_3+x_4 &= 1 \\ x_2-x_3-x_4 &= 2 \\ -x_1-x_2+3x_3 &= 3 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4 &= 4 \end{cases}$$

8. Badając rząd macierzy głównej i rozszerzonej poniższego układu, wykazać, że nie ma on rozwiązania (tzn. jest sprzeczny).
$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4 &= 1 \\ x_1+x_2+2x_3+4x_4 &= 3 \\ 3x_1+7x_2 &= 4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \end{cases}$$

9. Rozwiązać podany układ równań metodą eliminacji Gaussa (należy sprowadzić macierz rozszerzoną układu do postaci schodkowej i z niej odczytać rozwiązanie).
$$\begin{cases} 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5 &= 3 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5 &= 2 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5 &= 1 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5 &= 1 \end{cases}$$

10. Dany jest układ równań:
$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+2x_5 &= 4 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-4x_4+6x_5 &= 5 \\ x_1+x_2+7x_3-4x_4+2x_5 &= 11 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-3x_4+4x_5 &= 6 \end{cases}$$
Rozwiązać go następującą metodą: (1) znaleźć ogólne rozwiązanie odpowiedniego układu jednorodnego, wskazać fundamentalny układ rozwiązań; (2) znaleźć przykładowe rozwiązanie danego układu równań; (3) dodać do siebie rozwiązania z (1) i (2).

11. (a) Napisać jednorodny układ równań z czterema niewiadomymi, którego zbiór rozwiązań jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozpinaną przez wektory: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ile wynosi wymiar tej podprzestrzeni? Jaka jest minimalna liczba równań, których potrzebujemy?

(b) Korzystając z (a) napisać układ równań, którego zbiór rozwiązań jest równy

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

12. **K** Macierz $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ nazywamy dolnotrójkątną, jeśli $a_{ij} = 0$ dla $j > i$. Mówimy, że M jest górnotrójkątna, jeśli $a_{ij} = 0$ dla $i > j$.
(a) Wykazać, że iloczyn macierzy górnotrójkątnych rozmiaru $n \times n$ jest macierzą górnotrójkątną.
(b) Wykazać, że iloczyn macierzy dolnotrójkątnych rozmiaru $n \times n$ jest macierzą dolnotrójkątną.
(c) Wykazać że dowolną macierz rozmiaru $n \times n$ za pomocą operacji elementarnych na wierszach można sprowadzić do postaci górnotrójkątnej oraz do postaci dolnotrójkątnej. Wywnioskować stąd, że dowolną macierz rozmiaru $n \times n$ można zapisać w postaci $A_1 \ldots A_k N$, gdzie $A_1, \ldots, A_k$ to macierze elementarne zaś N jest macierzą górnotrójkątną oraz w postaci $B_1 \ldots B_l P$, gdzie $B_1, \ldots, B_l$ to macierze elementarne zaś P jest macierzą dolnotrójkątną.
(d) Wykazać że dowolną macierz rozmiaru $n \times n$ za pomocą operacji elementarnych na kolumnach można sprowadzić do postaci górnotrójkątnej oraz do postaci dolnotrójkątnej. Wywnioskować stąd, że dowolną macierz rozmiaru $n \times n$ można zapisać w postaci $NA_1 \ldots A_k$, gdzie $A_1, \ldots, A_k$ to macierze elementarne zaś N jest macierzą górnotrójkątną oraz w postaci $PB_1 \ldots B_l$, gdzie $B_1, \ldots, B_l$ to macierze elementarne zaś P jest macierzą dolnotrójkątną.