Algebra liniowa 2, lista nr 11 (zajęcia 4.01.2018)

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Dane są permutacje $\sigma, \tau \in S_5$;
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
(a) Znaleźć $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} oraz τ^{-1}.
(b) Wypisać wszystkie inwersje w σ i w τ. Zauważyć, że permutacja σ jest nieparzysta, zaś τ parzysta.
(c) Określić znaki permutacji $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$.
(d) W pewnej liczbie kroków przekształcić ciąg $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$ w ciąg $\langle\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)\rangle$ (to znaczy $\langle 5, 2, 4, 1, 3\rangle$), a następnie ciąg $\langle\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)\rangle$ w ciąg $\langle\tau(\sigma(1)), \tau(\sigma(2)), \tau(\sigma(3)), \tau(\sigma(4)), \tau(\sigma(5))\rangle$ tak, aby w każdym kroku jedynie zamieniać miejscami liczby na sąsiednich pozycjach w ciągu (można to zrobić na wiele sposobów).
(e) Jaki jest związek między parzystością permutacji σ i τ a liczbą kroków, jakie trzeba wykonać w (d) przy przekształcaniu: (1) ciągu $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$ w ciąg $\langle\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)\rangle$, (2) ciągu $\langle\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)\rangle$ w ciąg $\langle\tau(\sigma(1)), \tau(\sigma(2)), \tau(\sigma(3)), \tau(\sigma(4)), \tau(\sigma(5))\rangle$?

2. Wypisać wszystkie permutacje z S_2, S_3 i S_4. Które z nich są parzyste, a które nieparzyste?

3. Niech $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Zapisać wyznacznik macierzy M dla $n = 2$ i $n = 3$ na dwa sposoby: (1) stosując wcześniej poznane wzory (np. schemat Sarrusa dla $n = 3$), (2) posługując się wzorem $det(M) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}$. Upewnić się, że za każdym razem wychodzi ten sam wynik.

4. Dana jest macierz $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 6}$ o wyrazach z ciała K. Z wykładu wiadomo, że
$det(M) = \sum_{\sigma\in S_6} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}a_{5\sigma(5)}a_{6\sigma(6)}$.
Z jakim znakiem (+ czy −) poniższe iloczyny pojawiają się tej sumie:
(a) $a_{12}a_{23}a_{36}a_{45}a_{54}a_{61}$, (b) $a_{65}a_{21}a_{34}a_{16}a_{53}a_{42}$?

5. Na przykładzie wyznacznika $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ pokazać, że schemat Sarrusa nie działa dla wyznaczników macierzy rozmiaru 4×4.

6. Niech K będzie ciałem, $\alpha \in K$ i $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Pokazać, że $det(\alpha M) = \alpha^n \cdot det(M)$.

7. Niech K będzie ciałem i niech $m, n \in \mathbb{N}_+$. Dane są macierze $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ i $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Wykazać, że $det\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{pmatrix} = det(A) \cdot det(D)$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza macierz zerową odpowiedniego rozmiaru.
Wskazówka: można zacząć od przypadku $m = n = 2$. W razie trudności proszę przeanalizować rozwiązanie w książce J. Rutkowskiego *Algebra liniowa w zadaniach*, str. 246–248 (zad. 172 i 173).

Zadania

1. Wykazać, że wyznacznik macierzy dolnotrójkątnej o wyrazach z ciała K jest równy iloczynowi jej wyrazów na głównej przekątnej. To samo dla macierzy górnotrójkątnych. Wywnioskować stąd, że:
(a) jeśli $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}$ są macierzami dolnotrójkątnymi, to $det(MN) = det(M)det(N)$;
(b) jeśli $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}$ są macierzami górnotrójkątnymi, to $det(MN) = det(M)det(N)$.

2. Obliczyć poniższy wyznacznik macierzy o wyrazach rzeczywistych stosując sprowadzanie do postaci dolnotrójkątnej lub górnotrójkątnej za pomocą operacji elementarnych. Należy przy tym pamiętać, że: (1) zamiana miejscami dwóch wierszy/kolumn zmienia wyznacznik o czynnik −1, (2) dodanie wiersza pomnożonego przez skalar do innego wiersza nie zmienia wyznacznika (analogicznie dla kolumn), (3) pomnożenie wiersza/kolumny przez skalar α zmienia wyznacznik o czynnik α.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 5 & 9 \\ 4 & 4 & 9 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Obliczyć poniższy wyznacznik macierzy o wyrazach rzeczywistych stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza/wybranej kolumny.
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Obliczyć dowolną metodą następujące wyznaczniki. Wyniki zapisać w jak najprostszej postaci.
(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$,
(d) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Obliczyć wyznacznik macierzy o wyrazach z ciała $\mathbb{Z}_5$: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

6. Niech K będzie ciałem i niech $n \in \mathbb{N}_+$. Dla $a_0, \dots, a_n \in K$ definiujemy wyznaczniki Vandermonde'a:
$V_n(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$ (j-ty wyraz w i-tym wierszu jest równy a_{i-1}^{j-1}).
Przyjmujemy ponadto $V_0(a_0) = 1$. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi
$V_{n+1}(a_0, \dots, a_{n+1}) = (a_{n+1} - a_0) \dots (a_{n+1} - a_n) V_n(a_0, \dots, a_n)$.
Wywnioskować stąd przez indukcję, że dla $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod\limits_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.

7. Niech K będzie ciałem i niech $n \in \mathbb{N}_+$. Niech ponadto $a_0, \dots, a_n$ będą różnymi elementami ciała K zaś $b_0, \dots, b_n$ dowolnymi elementami ciała K. Korzystając z poprzedniego zadania, wykazać, że istnieje dokładnie jeden wielomian f o współczynnikach z K, stopnia co najwyżej n, taki że $f(a_i) = b_i$ dla $i \in \{0, \dots, n\}$. Wywnioskować stąd, że wielomian stopnia n o współczynnikach z ciała K ma w K co najwyżej n pierwiastków.

8. Poniższy układ równań o współczynnikach rzeczywistych posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Znaleźć je przy pomocy wzorów Cramera.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 5 \end{cases}$$

9. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dane są wektory: $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Przedstawić wektor V jako kombinację liniową wektorów U_1, U_2, U_3, U_4. Zastosować wzory Cramera.

10. Znaleźć współrzędne wielomianu $x^4 + x^3 + x$ w bazie $(1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}_4[x]$. Należy ułożyć układ równań i rozwiązać go stosując wzory Cramera.

11. Używając minorów określić rząd macierzy $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

12. Niech K będzie ciałem, $n \in \mathbb{N}_+$ i niech $M, N \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$.
(a) Używając twierdzenia Cauchy'ego (mówiącego, że wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi

wyznaczników) pokazać, że $det(MN) = det(NM)$.
(b) Przy założeniu, że macierz N jest odwracalna wykazać, że $det(NMN^{-1}) = det(M)$.
(c) Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $dim(V) \in \mathbb{N}_+$. Wykorzystując (b) oraz wzór na zmianę bazy z wykładu pokazać, że wyznacznik macierzy przekształcenia liniowego $F : V \to V$ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.
(d) Analogicznie, wykorzystując zad. 4(b) z listy 9, pokazać, że ślad macierzy przekształcenia liniowego $F : V \to V$ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.

13. **K** Rozważmy macierz $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, której wszystkie wyrazy są cyframi od 0 do 9. Dla $i \in \{1, \dots, n\}$ przez m_i oznaczmy liczbę naturalną, której kolejnymi cyframi w układzie dziesiętnym są kolejne cyfry i-tego wiersza. Wykazać, że jeśli l jest wspólnym dzielnikiem liczb $m_1, \dots, m_n$, to l dzieli $det(M)$.

14. **K** Posługując się wzorem $det((a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ wykazać, że dla macierzy $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ zachodzi $det(MN) = det(M)det(N)$. (Na wykładzie wzór ten został wyprowadzony inną matodą).

15. **K** Niech $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ będzie macierzą dolnotrójkątną, której wszystkie wyrazy na przekątnej głównej są niezerowe. Wykazać, że M^{-1} jest macierzą dolnotrójkątną. Wyprowadzić wzory na wyrazy macierzy M^{-1}. Rozwiązać analogiczne zadanie w przypadku gdy M jest macierzą górnotrójkątną.