Algebra liniowa 2, lista nr 12 (zajęcia 11.01.2018)

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Niech $F : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^2$ będzie przekształceniem liniowym określonym następująco: $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \big(3x+6y, 5x+4y\big)$.
Czy dany wektor jest wektorem własnym przekształcenia F? W przypadku odpowiedzi pozytywnej wskazać wartość własną, której odpowiada.
(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Wykazać, że F jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy gdy 0 nie jest wartością własną F. Przy dodatkowym założeniu, że V ma skończony wymiar pokazać, że F jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy 0 nie jest wartością własną F

3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Mówimy, że podprzestrzeń $W < V$ jest F-niezmiennicza, jeśli $F(v) \in W$ dla $v \in W$ (czyli $F[W] \subseteq W$).
(a) Wykazać, że $Im(F)$, $Ker(F)$ oraz $\{v \in V : F(v) = v\}$ są F-niezmiennicze.
(b) Wykazać, że jeśli $W_1, W_2 < V$ są F-niezmiennicze, to $W_1 \cap W_2$ i $W_1 + W_2$ są F-niezmiennicze.

4. Niech K będzie ciałem, $n \in \mathbb{N}_+$ i niech $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Mówimy, że podprzestrzeń $W < K^n$ jest M-niezmiennicza, jeśli $Mv \in W$ dla $v \in W$. Wykazać, że jeśli $W_1, W_2 < K^n$ są M-niezmiennicze, to $W_1 \cap W_2$ i $W_1 + W_2$ są M-niezmiennicze.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, $\alpha, \beta \in K$ i niech $F, G : V \to V$ będą przekształceniami liniowymi. Wykazać, że jeśli podprzestrzeń $W < V$ jest F-niezmiennicza i G-niezmiennicza, to jest ona $(\alpha F + \beta G)$-niezmiennicza.

6. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3x-2y-4z \\ 2x+7y+10z \\ -2y-2z \end{pmatrix}$. Czy podprzestrzenie $V_1, V_2 < \mathbb{R}^3$ są F-niezmiennicze?
$V_1 = Lin\left(\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$, $V_2 = Lin\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Zadania

1. (a) Niech K będzie ciałem, $n \in \mathbb{N}_+$, $t \in K$ i niech $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Wykazać, że jeśli macierz N jest odwracalna, to $det(M - tI) = det(NMN^{-1} - tI)$. Oznacza to, że macierze M i NMN^{-1} mają takie same wielomiany charakterystyczne (symbolicznie: $\chi_M(t) = \chi_{NMN^{-1}}(t)$).
(b) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K, $\mathcal{B}$ jest bazą V, $dim(V) \in \mathbb{N}_+$ i $F : V \to V$ jest przekształceniem liniowym. Korzystając z (a) wykazać, że wielomian charakterystyczny przekształcenia F zdefiniowany jako $\chi_F(t) = det(m_{\mathcal{B}}(F) - tI)$ nie zależy od wyboru bazy $\mathcal{B}$.

2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś $V_1, \ldots, V_m$ jej podprzestrzeniami. Mówimy, że $V_1, \ldots, V_m$ są liniowo niezależne, jeśli dla dowolnych $v_1 \in V_1, \ldots, v_m \in V_m$, warunek $v_1 + \ldots + v_m = \overrightarrow{0}$ implikuje $v_1 = \ldots = v_m = \overrightarrow{0}$.
(a) Wykazać, że $V_1, V_2 < V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $V_1 \cap V_2 = \{\overrightarrow{0}\}$.
(b) Wykazać, że $V_1, V_2, V_3 < V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{\overrightarrow{0}\}$, $V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{\overrightarrow{0}\}$ i $V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{\overrightarrow{0}\}$.
(c) $(m \geq 3)$ Wykazać, że $V_1, \ldots, V_m$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $V_i \cap \sum_{j\in\{1,\ldots m\}\setminus\{i\}} V_j = \{\overrightarrow{0}\}$ dla $i \in \{1, \ldots, m\}$.

3. Sprawdzić, czy podane podprzestrzenie przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{R}$ są liniowo niezależne.
(a) $V = C(\mathbb{R})$; podprzestrzenie:
$V_1 = \{f \in C(\mathbb{R}) : (\forall x \in [0, +\infty))(f(x) = 0)\}$, $V_2 = \{f \in C(\mathbb{R}) : (\forall x \in (-\infty, 1])(f(x) = 0)\}$.
(b) $V = \mathbb{R}^5$; podprzestrzenie:
$V_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x = y = z = t = u\}$, $V_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x + y = z + t = u + t = y - 2z\}$,

$V_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x = -y = -z = u + t = y - t \}.$

(c) $V = \mathbb{R}_4[x]$; podprzestrzenie:
$V_1 = \{f \in V : f(1) = f'(1) = 0\}$, $V_2 = \{ax^4 + bx^3 - 3ax^2 + (2a - 3b)x + 2b : a, b \in \mathbb{R}\}$.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $V_1, \ldots, V_k < V$. Mówimy, że V jest sumą podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_k$ (oznaczenie: $V = V_1 + \ldots + V_k$), jeśli dowolny wektor z V da się przedstawić w postaci sumy wektorów z $V_1, \ldots, V_k$. Mówimy, że V jest sumą prostą podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_k$ (oznaczenie: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$), jeśli dowolny wektor z V da się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy wektorów z $V_1, \ldots, V_k$. W każdym przypadku sprawdzić, czy przestrzeń V nad ciałem $\mathbb{R}$ jest sumą danych podprzestrzeni i czy jest ich sumą prostą.
(a) $V = \mathbb{R}^3$; podprzestrzenie: $V_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $V_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$.
(b) $V = \mathbb{R}_3[x]$; podprzestrzenie: $V_1 = \{f \in \mathbb{R}_3[x] : (x+1)^2 | f\}$, $V_2 = Lin(\{1, x\})$.
(c) $V = C(\mathbb{R})$, podprzestrzenie: $V_1 = \{f \in C(\mathbb{R}) : (\forall x \leq 0)(f(x) = 0)\}$,
$V_2 = \{f \in C(\mathbb{R}) : (\forall x \geq 0)(f(x) = 0)\}$.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym.
(a) Wykazać, że dla dowolnego $\lambda \in K$, $V_\lambda^F = Ker(F - \lambda \cdot Id)$ jest F-niezmiennicza.
(b) Wykazać, że dla dowolnych $\lambda \in K$ i $m \in \mathbb{N}_+$, $Ker((F - \lambda \cdot Id)^m)$ jest F-niezmiennicza. Wskazówka: indukcja względem m.

6. Niech K będzie ciałem, $n \in \mathbb{N}_+$ i niech $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$.
(a) Wykazać, że dla dowolnego $\lambda \in K$, V_λ^M jest M-niezmiennicza.
(b) Wykazać, że dla dowolnych $\lambda \in K$ i $m \in \mathbb{N}_+$, $\{v \in K^n : (M - \lambda I)^m v = \overrightarrow{0}\}$ jest M-niezmiennicza. Wskazówka: indukcja względem m.

7. Rozawżmy przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dane wzorem $F(f) = f + f' + f''$.
(a) Zauważyć, że jedyną wartością własną F jest 1.
(a) Wykazać, że F nie jest diagonalizowalne.
(b) Znaleźć bazę, w której F ma macierz równą $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. W przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{R}$ dana jest podprzestrzeń W. Znaleźć podprzestrzeń W' taką, że $V = W \oplus W'$.
(a) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y + z = t - 2y \right\}$.
(b) $V = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$, $W = \{f \in C(\mathbb{R}) : (\forall x \geq 1)(f(x) = 0)\}$.
(c) $V = \mathbb{R}_4[x]$, $W = \{f \in V : f(2) = f'(1)\}$.

9. Niech K będzie ciałem i niech $n \geq 2$. Znaleźć wielomian charakterystyczny macierzy

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(K).$$

Wywnioskować, że dowolny wielomian $w(t)$ stopnia n o współczynnikach z K i współczynniku przy t^n równym $(-1)^n$ może być wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy z $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$.

10. **K** Znaleźć rozkłady Jordana macierzy o wyrazach rzeczywistych:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$