Algebra liniowa 2, lista nr 13 (zajęcia 25.01.2018)

Ćwiczenia (do samodzielnego rozwiązania)

1. Obliczyć cosinus kąta między wektorami v, w (czyli $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$) w przestrzeni euklidesowej $(V;\langle,\rangle)$.

   (a) $(V;\langle,\rangle) = (\mathbb{R}^4, \circ)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $(V;\langle,\rangle) = \mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$, $v = x$, $w = x^3$;

   (c) $(V;\langle,\rangle) = C([0,\pi])$ z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle = \int\limits_0^\pi f(x)g(x)dx$, $v = sin(x)$, $w = cos(x)$.

2. Dla przestrzeni $(V;\langle,\rangle)$ oraz wektorów v, w z poprzedniego ćwiczenia znaleźć rzut wektora v na wektor w oraz rzut wektora w na wektor v.

3. Przypomnieć sobie z algebry liniowej 1 dowód twierdzenia mówiącego, że dowolna macierz symetryczna z $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ może być przedstawiona w postaci PDP^{-1}, gdzie $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, P jest ortogonalna zaś D diagonalna.

Zadania

1. W każdym przypadku sprawdzić, że $(V;\langle,\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową.

   (a) $V = \mathbb{R}^n$, dla $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$ przyjmujemy $\langle X,Y\rangle = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i$, gdzie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

   (b) $V = C([a,b])$ (przestrzeń funkcji ciągłych z $[a,b]$ w $\mathbb{R}$, gdzie $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

   (c) $V = \mathbb{R}[x]$ (przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych), $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, gdzie $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

   (d) $V = \ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=0}^\infty a_n^2 < \infty\}$, $\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n b_n$.

2. Niech $(V;\langle,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wykazać, że:
   (a) jeśli $A \subseteq V$, to $A^\perp < V$ i $A \subseteq (A^\perp)^\perp$;
   (b) jeśli $A \subseteq B \subseteq V$, to $B^\perp \subseteq A^\perp$;
   (c) jeśli $W_1, W_2 < V$, to $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;
   (d) jeśli $W_1, W_2 < V$, to $W_1^\perp + W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp$;
   (e) jeśli V ma skończony wymiar i $W < V$, to $W = (W^\perp)^\perp$;
   (f) jeśli V ma skończony wymiar, to w (d) zachodzi równość.

3. Stosując proces ortogonalizacji Grama-Schmidta znaleźć bazę ortonormalną podprzestrzeni W przestrzeni V.

   (a) $W = Lin\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$, $V = (\mathbb{R}^4, \circ)$.

   (b) $W = Lin(\{1, x, x^2, x^3\})$, $V = \mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

4. W przestrzeni eklidesowej $(V;\langle,\rangle)$ znaleźć rzut ortogonalny wektora v na podprzestrzeń W a następnie obliczyć odległość między v a W.

   (a) $(V;\langle,\rangle) = (\mathbb{R}^4, \circ)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $W = Lin\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   (b) $V = \mathbb{R}_3[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, $v = x^3$, $W = Lin(\{1, x, x^2\})$.

   (c) $V = C([0,\pi])$ z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle = \int\limits_0^\pi f(x)g(x)dx$, $v = x$, $W = Lin(\{sin(x), sin(2x)\})$.

5. W przestrzeni ℓ^2 przez v_i oznaczamy ciąg, którego i-ty wyraz jest równy 1 zaś pozostałe wyrazy są zerami. Niech $W = Lin(\{v_i : i \in \mathbb{N}\})$. Wykazać, że nie istnieje rzut ortogonalny ciągu $v = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$ na podprzestrzeń W.

6. Na wykładzie zostało pokazane, że dowolna przestrzeń euklidesowa wymiaru $n \in \mathbb{N}_+$ jest izomorficzna z przestrzenią $(\mathbb{R}^n, \circ)$, gdzie $\circ$ to standardowy iloczyn skalarny. Zapisać jawnym wzorem izomorfizm między przestrzenią $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$ a przestrzenią $(\mathbb{R}^3, \circ)$. Wskazówka: należy najpierw znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ z podanym iloczynem skalarnym (w tym celu można zastosować proces ortogonalizacji Grama-Schmidta do bazy $(1, x, x^2)$).

7. W przestrzeni euklidesowej $(V; \langle,\rangle)$ wymiaru $n \in \mathbb{N}_+$ dane są dwie bazy ortonormalne $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Wykazać, że macierz przejścia od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{C}$ jest ortogonalna.

8. Niech $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ oraz $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ będą bazami przestrzeni euklidesowej $(V; \langle,\rangle)$. Załóżmy, że macierz przejścia od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{C}$ jest ortogonalna. Wykazać, że dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:
(a) $\langle u_i, u_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$;
(b) $\|u_i\| = \|v_i\|$;
(c) kąt między wektorami u_i, u_j jest taki sam jak kąt między wektorami v_i, v_j.

9. Każdą z poniższych macierzy symetrycznych zdiagonalizować w bazie ortonormalnej, to znaczy przedstawić w posataci PDP^{-1}, gdzie $P, D \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$, P jest ortogonalna zaś D diagonalna.
(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Macierz pewnego funkcjonału dwuliniowego na $\mathbb{R}^4$ w bazie standardowej jest równa $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Znaleźć macierz tego funkcjonału w bazie $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

11. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zdefiniować iloczyn skalarny taki, że cosinusy kątów między wektorami e_1, e_2, e_3 są równe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ zaś długości wektorów e_1, e_2, e_3 wynoszą odpowiedno 1,2,3. Wskazówka: szukany iloczyn skalarny jest funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym na $\mathbb{R}^3$, czyli ma postać $\langle X, Y\rangle = X \circ (MY)$, gdzie $M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ jest pewną macierzą symetryczną zaś $\circ$ zwykłym iloczynem skalarnym.

****

Na części zajęć 31.01 będzie konwersatorium. Egzamin odbędzie się w środę 7.02 o godz. 9:00 w sali HS. Egzamin będzie składał się z testu oraz sześciu zadań i potrwa około 3 godzin. Wyniki zostaną ogłoszone tego samego dnia po południu. Lista nr 13 również obowiązuje na egzaminie. Egzamin poprawkowy zaplanowany jest na środę 14.02 o godz. 9:00 (sala WS).