23) Niech $u = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}, v = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$. Pod w podstawiamy kolejno E_1, E_2, E_3, otrzymując $u_1 = v_1$, potem $u_2 = v_2$ i $u_3 = v_3$, skąd teza.

18) Skoro M nie diagonalizuje się nad $\mathbb{R}$, to wyróżnik (tzn. delta) wielomianu

$$\chi_M(x) = x^2 - trM \cdot x + \det M$$

jest mniejszy lub równy 0. Czyli

$$\Delta = (trM)^2 - 4\det M \leqslant 0,$$

skąd wobec $\det M = 1$ mamy tezę.

4) Mamy

$$\chi_A(x) = -(x^3 - 27x + 2),$$

możliwe pierwiastki wymierne to $\pm 1, \pm 2$, ale nie działają. Zatem szukamy ekstremów: liczymy pochodną i przyrównujemy ją do zera:

$$\chi_A'(x) = -(3x^2 - 27) = 0,$$

czyli $x \in \{-3, 3\}$. Sprawdzamy, że $\chi_A(-3)$ oraz $\chi_A(3)$ są różnych znaków, zatem na mocy wł. Darboux ten wielomian posiada 3 różne rzeczywiste pierwiastki (jeden mniejszy od -3, drugi między -3 a 3 i trzeci większy od 3).
Ze wzorów Viete'a iloczyn pierwiastków wielomianu to -2. Jego siódma potęga to $(-2)^7 = -128$.

5) Niech $A = a + bi, B = c + di$. Mamy

$$|A - B| = |a - c + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

oraz

$$|P(A) - P(B)| = |-i(a - bi + 3) + i(c - di + 3)| = |-ai + bi^2 - 3i + ci - di^2 + 3i| =$$

$$= |-ai - b + ci + d| = |d - b + (c - a)i| = \sqrt{(d - b)^2 + (c - a)^2},$$

a to jest tyle samo, czyli przekształcenie jest izometrią. Teraz szukamy $m(A)$ i U:

$$P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P(a + bi) = -i(a - bi + 3) = -ai + bi^2 - 3i = -b + (-a - 3)i = \begin{pmatrix} -b \\ -a - 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = m(A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + U.$$