Egzamin z algebry liniowej B1, 17.II.2004, wersja A

Należy wybrać i rozwiązać 6 z poniższych 8 zadań (ich numery proszę wpisać do poniższej tabelki). Za każde zadanie można otrzymać 6 pkt. Czas: 180 minut.

Imię i nazwisko: ....

Numer zadania:							Suma:
Punktacja:							

1. Znajdź macierze: diagonalną D i odwracalną P, takie że $D = P \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

2. Rozstrzygnij, czy powierzchnia jest elipsoidą:
   a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz = 1$; (2 pkt.)
   b) $x^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$; (2 pkt.)
   Dla każdej ze znalezionych elipsoid wyznacz objętość obszaru przez nią ograniczonego (2 pkt.). (Wsk. Objętość obszaru ograniczonego przez elipsoidę o półosiach a, b, c jest równa $\frac{4}{3}\pi abc$.)

3. Rozwiąż układy równań:

$a) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 2 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 1 \end{cases}$ $b) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 0 \end{cases}$ $c) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 3 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -1 \end{cases}$ $d) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 0 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 2 \end{cases}$

$e) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 0 \end{cases}$ $f) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 2 \end{cases}$ $g) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 2 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -1 \end{cases}$ $h) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 2 \end{cases}$

$i) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 1 \end{cases}$ $j) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -2 \end{cases}$ $k) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -3 \end{cases}$ $\ell) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 2 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 4 \end{cases}$

4. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, którego obraz jest płaszczyzną, jądro jest prostą, zaś kąt między jądrem a obrazem wynosi $60°$. (Napisz macierz takiego przekształcenia.)

5. Podaj przykład trzech izometrii F, G, H przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że $F \circ G \circ H = \mathrm{Id}$, ale $H \circ G \circ F \neq \mathrm{Id}$.

6. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{Im}(z) = 0$, to $\left| \dfrac{z-i}{z+i} \right| = 1$.

7. Niech $F, G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi. Załóżmy, że jądro każdego z nich jest płaszczyzną. Wykaż, że $\det(F + G) = 0$.

8. Udowodnij, że dla dowolnej macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ macierz $A^\top A$ jest diagonalizowalna (2 pkt.) i ma nieujemne wartości własne (4 pkt.).