Egzamin, 2a) Mamy wielomian charakterystyczny $x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. Możliwe pierwiastki wymierne to $\pm 1, \pm 3$, ale niestety nie działają. Liczymy pochodną i przyrównujemy ją do zera:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0,$$

$$x \in \{1, 3\}.$$

Zatem wzgórki (ekstrema lokalne) są w 1 i 3. Ponadto $f(1) = 1, f(3) = -3$, zatem (na mocy wł. Darboux) jeden pierwiastek f leży między 1 a 3, drugi na prawo od 3, a trzeci na lewo od 1. Mamy jeszcze $f(0) = -3 < 0$, czyli ten trzeci pierwiastek jest między 0 a 1. Zatem wszystkie trzy są dodatnie, czyli jest to elipsoida. Oznaczmy je λ, μ, η. Postać kanoniczna naszej powierzchni to

$$\lambda u^2 + \mu v^2 + \eta w^2 = 1,$$

co przekształcamy (jak na wykładzie) do

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{1}{\sqrt{\mu}}}\right)^2 + \left(\frac{w}{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}\right)^2 = 1,$$

czyli nasza elipsa ma długości półosi

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, b = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, c = \frac{1}{\sqrt{\eta}}.$$

Stąd

$$abc = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu\eta}},$$

ale oto wzory Viete'a mówią, że iloczyn pierwiastków wielomianu $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ wynosi $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$. Czyli w naszym przypadku dostajemy

$$\lambda\mu\eta = -\frac{-3}{1} = 3,$$

skąd objętość elipsoidy to

$$\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\frac{4}{3}\pi}{\sqrt{\lambda\mu\eta}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2b) Wielomian charakterystyczny to $x^3 - 4x^2 + 2$. Możliwe pierwiastki wymierne to $\pm 1, \pm 2$, oczywiście nie działają, więc liczymy pochodną i przyrównujemy do zera, otrzymując $3x^2 - 8x = 0$, a więc $x \in \{0, \frac{8}{3}\}$. Ponadto $f(0) = 2 > 0$, a zatem jakiś pierwiastek wielomianu na pewno jest ujemny (bo w $-\infty$ wielomian dąży do $-\infty$). Zatem nie jest to elipsoida.

6) Moduł ilorazu jest równy ilorazowi modułów. Ponadto odległości punktów $(z, 1)$ oraz $(z, -1)$ od początku układu współrzędnych są równe. Stąd natychmiast

$$\left|\frac{z - i}{z + i}\right| = \frac{|z - i|}{|z + i|} = 1.$$

7) Korzystamy z twierdzenia, że suma wymiaru jądra i wymiaru obrazu równa jest wymiarowi dziedziny (tw. o indeksie). Wymiar prostej to 1, płaszczyzny 2, a $\mathbb{R}^3$ - 3. Czyli skoro jądro F jest płaszczyzną, to obrazem F jest prosta. Tak samo z G. W takim razie obraz $F + G$ zawiera się w płaszczyźnie rozpiętej przez proste Im F i Im G. Zatem $F + G$ nie jest „na", więc $\det(F + G) = 0$.

8) Przydatne tutaj własności:

1. $(AB)^T = B^T A^T$

2. ${A^T}^T = A$

3. macierz symetryczna diagonalizuje się (tw. spektralne)

4. $\langle Av, w \rangle = \left\langle v, A^T w \right\rangle$

Sprawdzamy, że $A^T A$ jest symetryczna:

$$(A^T A)^T =^{(1)} A^T {A^T}^T =^{(2)} A^T A.$$

Zatem z (3) diagonalizuje się.
Dalej: weźmy dowolną wartość własną λ i odp. jej niezerowy wektor własny v. Mamy

$$\left\langle A^T A, v \right\rangle =^{(4)} \langle Av, Av \rangle = ||Av||^2 \geqslant 0,$$

ale z drugiej strony

$$\left\langle A^T A, v \right\rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \cdot ||v||^2$$

i wobec $||v||^2 > 0$ mamy $\lambda \geqslant 0$.