Egzamin z algebry liniowej 2B, 26.06.2009 - zadania + niektóre rozwiązania
(opracował J. Tarnawski)

1. Niech $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^T, v_2 = \frac{1}{2}(1,i,-1,-i)^T$.
   (a) Znajdź wektory v_3 i v_4 takie, żeby układ (v_1, v_2, v_3, v_4) był ortonormalną bazą przestrzeni $\mathbb{C}^4$ (wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny).
   (b) Podaj przykład macierzy A o wyrazach zespolonych, takiej że $\ker F_A = Lin(\{v_1, v_2\})$.
2. Wyznacz rozkład biegunowy macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Znajdź postać i bazę Jordana dla macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_3[X]^*$ będą dane wzorami $\alpha(P) = P'(0), \beta(P) = \int_0^1 P(x)\,dx$. Podaj przykład pary $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ takiej, że $\{f \in \mathbb{R}_3[X]^* : f(P) = f(Q) = 0\}$ jest podprzestrzenią dopełniczą do $\mathrm{Lin}(\{\alpha, \beta\})$. (Sprawdź żądaną własność.)
5. O pewnej formie kwadratowej Q określonej na $\mathbb{R}^4$ wiadomo, że na dwóch wektorach pewnej bazy B przyjmuje wartości dodatnie, a na dwóch pozostałych - ujemne. Wiadomo też, że $\det m^{BB}(Q) \neq 0$. Co można powiedzieć o sygnaturze Q? (Dla każdej dopuszczalnej sygnatury podaj odpowiedni przykład.)
6. Niech U, V, W - podprzestrzenie pewnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Udowodnij, że
$$\dim U + \dim V + \dim W - \dim(U + V + W) \geqslant \max\{\dim(U \cap V), \dim(U \cap W), \dim(V \cap W)\}.$$
7. Niech V będzie (skończenie wymiarową) przestrzenią unitarną, zaś $F : V \to V$ niech ma następującą własność:
$$(\forall v \in V)(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{Z})(||F^n(v)|| < C).$$
   Wiemy też, że F jest liniowe i odwracalne. Udowodnij, że
   (a) F jest diagonalizowalne,
   (b) $|tr(F)| \leqslant \dim V$.

Rozwiązania

1. Przypomnijmy wzór na standardowy zespolony iloczyn skalarny:
$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}.$$

(a) v_3 i v_4 muszą być prostopadłe do v_1 i v_2. Wyznaczmy przestrzeń wszystkich takich wektorów $(a + a'i, b + b'i, c + c'i, d + d'i)^T$ (czyli inaczej dopełnienie ortogonalne v_1 i v_2, ozn. $\{v_1, v_2\}^\perp$). Z prostopadłości do v_1 mamy:
$$\left\langle \begin{pmatrix} a + a'i \\ b + b'i \\ c + c'i \\ d + d'i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$
$$a + a'i + c + c'i = 0,$$

$$a + c = 0, \qquad a' + c' = 0.$$

Z prostopadłości do v_2:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a + a'i \\ b + b'i \\ c + c'i \\ d + d'i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

$$(a + a'i)1 + (b + b'i)(-i) + (c + c'i)(-1) + (d + d'i)i = 0,$$

$$a + a'i - bi + b' - c - c'i + di - d' = 0,$$

$$a + b' - c - d' = 0, \qquad a' - b - c' + d = 0.$$

Liczymy dalej i dostajemy układ równań opisujący $\{v_1, v_2\}^{\perp}$:

$$c = -a, \qquad c' = -a',$$

$$2a + b' - d' = 0, \qquad 2a' - b + d = 0.$$

Dobieramy z tej przestrzeni byle jaki niezerowy wektor i go normujemy. To będzie v_3. Np.

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)^T.$$

v_4 też musi należeć do tej przestrzeni, a dodatkowo być prostopadłym do v_3. Czyli do układu dopisujemy

$$b + d = 0, \qquad b' + d' = 0.$$

Po wyliczeniu dostajemy:

$$b' = -a, \quad c = -a, \quad d' = a, \quad b = a', \quad c' = -a', \quad d = -a'.$$

Wystarczy dobrać jakiś niezerowy wektor. No to wstawiamy np. $a = 1, a' = 0$ i dostajemy $(1, -i, -1, i)^T$, po unormowaniu $\frac{1}{2}(1, -i, -1, i)^T$.

(b) Żeby $\ker F_A = Lin(\{v_1, v_2\})$, wystarczy, by $Av_1 = 0, Av_2 = 0$ oraz Av_3 i Av_4 były lnz. Wtedy bowiem dowolny wektor (rozpisany w naszej bazie ortonormalnej) $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$ da $Av = 0$ wtw, gdy $a_3 = a_4 = 0$, czyli $v \in Lin(\{v_1, v_2\})$. Istotnie, mamy równoważność

$$Av = a_1Av_1 + a_2Av_2 + a_3Av_3 + a_4Av_4 = a_3(Av_3) + a_4(Av_4) = 0 \iff a_3 = a_4 = 0$$

(z liniowej niezależności (Av_3, Av_4)).
Rozpisujemy więc $Av_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

skąd $z_{11} + z_{13} = 0, z_{11} + iz_{12} - z_{13} - iz_{14} = 0$ (i to samo dla pozostałych wierszy).
Wektory Av_3, Av_4 mają być lnz. Można np. dobrać sobie 3 pierwsze wiersze tak samo, zgodnie z powyższymi dwoma równaniami, a potem czwarty tak, żeby otrzymane Av_3, Av_4 nie były swoimi krotnościami. Np.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & 0 & i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix},$$

$$Av_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, Av_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Tak jak wielomiany z $\mathbb{R}_3[X]$ można izomorficznie utożsamiać z wektorami z $\mathbb{R}^4$:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

tak przekształcenia z $\mathbb{R}_3[X]^*$ można utożsamiać z "poziomymi wektorami", tzn. z macierzami 4x1. Zarówno jednym, jak i drugim można działać na wektory:

$$\alpha(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{d}{dx}(ax^3 + bx^2 + cx + d)(0) = c \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = c,$$

$$\alpha \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, dx = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d,$$

$$\beta \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Posługując się tą notacją, możemy wymyślić bazę jakiejś podprzestrzeni dopełniczej do $\mathrm{Lin}(\{\alpha, \beta\})$: wystarczy dopełnić zbiór $\{\alpha, \beta\}$ do pewnej bazy przestrzeni "poziomych wektorów". Np. wektorami $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Szukamy teraz takich wielomianów P i Q, żeby $\{\gamma, \delta\}$ był bazą przestrzeni $\{f \in \mathbb{R}_3[X]^* : f(P) = f(Q) = 0\}$.
Zauważmy, że każdy element $\mathrm{Lin}\{\gamma, \delta\}$ jest postaci $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, a zatem zeruje się na wektorach (równoważnie: wielomianach), które mają pierwsze dwie współrzędne zerowe (równoważnie: nie mają wyrazów podobnych do x^3 i x^2). Najprostszym przykładem takich $\{P, Q\}$ jest $\{1, x\}$. (W drugą stronę, $f(1) = 0$ oznacza, że ostatnia współrzędna "poziomego wektora" odpowiadającego f-owi jest zerowa, a $f(x) = 0$, że przedostatnia. Zatem zbiór wszystkich takich f-ów to istotnie właśnie $\mathrm{Lin}\{\gamma, \delta\}$, które jest podprzestrzenią dopełniczą do $\mathrm{Lin}\{\alpha, \beta\}$.)

5. Oznaczmy sygnaturę Q przez (p, q). Q diagonalizuje się w pewnej bazie, nazwijmy ją C:

$$m^{CC}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Z def. sygnatury p to liczba dodatnich lambd, a q - ujemnych.

a) Pokażemy najpierw, że $p + q = 4$, czyli że $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$.
Z wykładu wiemy, że

$$m^{CC}(Q) = m_B^C(id)^T m^{BB}(Q) m_B^C(id),$$

zatem

$$\det m^{CC}(Q) = \det m_B^C(id)^T \det m^{BB}(Q) \det m_B^C(id) = (\det m_B^C(id))^2 \det m^{BB}(Q).$$

$m_B^C(id)$ to macierz zmiany bazy, więc jej wyznacznik $\neq 0$. Wobec tego jeśli $\det m^{BB}(Q) \neq 0$, to $\det m^{CC}(Q) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \neq 0$.

b) Forma Q nie jest dodatnio/ujemnie określona, gdyż na niektórych wektorach daje ujemne/dodatnie wartości.

c) Zatem zostają nam 3 możliwości: $(1,3),(2,2),(3,1)$. Wszystkie działają. Przykłady:

- B standardowa, $Q\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = a^2+b^2-c^2-d^2, (p,q)=(2,2)$,
- $B := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right), Q\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = a^2+b^2+c^2-d^2, (p,q)=(3,1)$,
- $B := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right), Q\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = a^2-b^2-c^2-d^2, (p,q)=(1,3)$.

6. Żeby pokazać

$$\dim U + \dim V + \dim W - \dim(U+V+W) \geqslant \max\{\dim(U\cap V), \dim(U\cap W), \dim(V\cap W)\},$$

wystarczy pokazać 3 nierówności:

$$\dim U + \dim V + \dim W - \dim(U+V+W) \geqslant \dim(U\cap V),$$
$$\dim U + \dim V + \dim W - \dim(U+V+W) \geqslant \dim(U\cap W),$$
$$\dim U + \dim V + \dim W - \dim(U+V+W) \geqslant \dim(V\cap W).$$

Ze względu na symetrię dowodzi się je identycznie. Dla przykładu pokażemy pierwszą.
Mamy

$$\begin{aligned}\dim(U+V+W) &= \dim((U+V)+W) = \\ &= \dim(U+V) + \dim W - \dim((U+V)\cap W) = \\ &= \dim U + \dim V - \dim(U\cap V) + \dim W - \dim((U+V)\cap W),\end{aligned}$$

a zatem po podstawieniu tego po lewej stronie nierówność sprowadza się do

$$\dim(U\cap V) + \dim((U+V)\cap W) \geqslant \dim(U\cap V),$$
$$\dim((U+V)\cap W) \geqslant 0,$$

co jest prawdą.

7. Fakt. Każda wartość własna F jest co do modułu równa 1.
Dowód. Weźmy dowolną wartość własną λ i pewien odpowiadający jej wektor własny v. Mamy

$$F(v) = \lambda v,$$
$$F^n(v) = \lambda^n v,$$
$$||F^n(v)|| = |\lambda|^n \cdot ||v||.$$

Załóżmy nie wprost, że $|\lambda| \neq 1$. Mamy trzy możliwości:

- $|\lambda| > 1$ - wtedy
$$\lim_{n\to\infty} ||F^n(v)|| = ||v|| \cdot \lim_{n\to\infty} |\lambda|^n = \infty,$$
ale z własności wynika, że istnieje C, które ogranicza wszystkie $||F^n(v)||$. Sprzeczność.
- $0 < |\lambda| < 1$ - wtedy
$$\lim_{n\to-\infty} ||F^n(v)|| = ||v|| \cdot \lim_{n\to-\infty} |\lambda|^n = \infty,$$
znowu sprzeczność.
- $|\lambda| = 0$ - wtedy $\lambda = 0$, czyli istnieje $v \neq 0$, tże $Fv = 0$, czyli $\ker F \neq \{0\}$, sprzeczność z założeniem o odwracalności F.

To kończy dowód faktu.

(a) Będziemy rozważać postać Jordana macierzy przekształcenia F. Pokażemy, że każda klatka Jordana jest rozmiaru 1x1, a więc postać Jordana macierzy F jest de facto macierzą diagonalną. Załóżmy nie wprost, że pewna klatka Jordana odpowiadająca wartości własnej λ jest większa niż 1x1. Niech W będzie odpowiadającym lambdzie wektorem własnym. Istnieje więc wektor V, tże
$$F(V) = W + \lambda V.$$
Mamy
$$F^2(V) = F(W + \lambda V) = \lambda W + \lambda W + \lambda^2 V = 2\lambda W + \lambda^2 V,$$
$$F^3(V) = ... = 3\lambda^2 W + \lambda^3 V,$$
$$\vdots$$
$$F^n(V) = n\lambda^{n-1}W + \lambda^n V = \lambda^{n-1}(nW + \lambda V).$$
A zatem
$$\lim_{n\to\infty} ||F^n(V)|| = \lim_{n\to\infty} ||\lambda^{n-1}(nW + \lambda V)|| = \lim_{n\to\infty} |\lambda^{n-1}| \cdot ||nW + \lambda V|| =$$
(korzystamy z faktu: $|\lambda| = 1$)
$$= \lim_{n\to\infty} ||nW + \lambda V|| = \lim_{n\to\infty} n||W + \frac{\lambda}{n}V|| = \infty.$$
Sprzeczność podobnie jak w pierwszych dwóch punktach dowodu faktu.

(b) Ślad macierzy to suma jej wartości własnych. Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - wartości własne F. Z nierówności trójkąta, a potem z faktu mamy
$$|\mathrm{tr}(F)| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = n = \dim V.$$