Jakub Tarnawski, zadanie domowe z Funkcji Rzeczywistych, semestr zimowy 2009

1.8) Niech $\mathcal{A}$ będzie skończonym ciałem zbiorów. Udowodnić, że $|\mathcal{A}| = 2^n$ dla pewnej liczby naturalnej n.

Motto: w zdrowym ciele zdrowe cielę.
Oznaczmy uniwersum $U = \bigcup \mathcal{A}$. Wprowadzamy na U relację $\sim$:

$$x \sim y \iff (\forall X \in \mathcal{A})(x \in X \Leftrightarrow y \in X).$$

Łatwo sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji tej relacji to atomy, to jest zbiory elementów, które w zbiorach z ciała zawsze występują nierozłącznie. Tzn.

$$(\forall A \in U/_\sim)(\forall X \in \mathcal{A}) A \subseteq X \vee A \cap X = \emptyset. \tag{1}$$

Istotnie, jeśli jakiś element należy do zbioru z $\mathcal{A}$, to z def. $\sim$ wszystkie elementy z jego klasy abstrakcji też tam należą.
Udowodnimy następnie, że atomy należą do ciała, tzn.

$$U/_\sim \subseteq \mathcal{A}. \tag{2}$$

W tym celu weźmy dowolny atom $A \in U/_\sim$. Zachodzi

$$A = \bigcap \{X \in \mathcal{A} : A \subseteq X\}. \tag{3}$$

Inkluzja $\subseteq$ jest oczywista. $\supseteq$ pokażemy przez kontrapozycję: załóżmy, że $y \notin A$. W takim razie są dwie możliwości:

- istnieje $Z \in \mathcal{A}$ tże $A \subseteq Z$, ale $y \notin Z$, lub
- istnieje $Z \in \mathcal{A}$ tże $y \in Z$, ale $A \not\subseteq Z$ (czyli wobec (1), $A \cap Z = \emptyset$). Wtedy weźmy dowolny $X \in \mathcal{A}$ tże $A \subseteq X$. Mamy $X \setminus Z \in \mathcal{A}$ oraz $A \subseteq X \setminus Z$, ale $y \notin X \setminus Z$.

W obu przypadkach dostajemy $y \notin \bigcap\{X \in \mathcal{A} : A \subseteq X\}$.
Z (3) i zamkniętości $\mathcal{A}$ na skończone iloczyny mamy (2).
Dla dowodu tezy, rozważmy funkcję f określoną na zbiorze $\mathcal{P}(U/_\sim)$ wzorem $f(Q) = \bigcup Q$.
f jest

- w $\mathcal{A}$ - na mocy (2) i zamkniętości $\mathcal{A}$ na skończone sumy (w tym puste - dla $Q = \emptyset$, $\bigcup Q = \emptyset \in \mathcal{A}$ z definicji ciała),
- surjekcją, tzn. każdy element z $\mathcal{A}$ jest sumą pewnego zbioru klas abstrakcji - na mocy (1) oraz $\bigcup U/_\sim = U$,
- injekcją - bo klasy abstrakcji są niepuste i rozłączne.

f jest więc bijekcją, skąd $|\mathcal{A}| = |\mathcal{P}(U/_\sim)| = 2^{|U/\sim|}$.

2.B) Wykazać, że suma **dowolnej** ilości odcinków domkniętych na prostej jest zbiorem borelowskim.
(Zakładam, że chodzi o nietrywialne odcinki, tzn. $[a, b]$ takie, że $a < b$.)

Motto: Pan chce nas zabić tym formalizmem.
Fakt. Zbiór rozłącznych nietrywialnych przedziałów na prostej jest przeliczalny.
Dowód. Liczby wymierne są gęste na prostej, więc z każdego przedziału możemy wybrać po jednej. Przedziały są rozłączne, więc wybrane liczby będą parami różne. Zbudowaliśmy

injekcję ze zbioru przedziałów w przeliczalny zbiór $\mathbb{Q}$.

Niech S będzie dowolnym zbiorem nietrywialnych przedziałów na prostej, oznaczmy $Q = \bigcup S$. Trzeba pokazać, że $Q \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Wprowadzamy na Q relację $\sim$:

$$a \sim b \iff \mathrm{interv}(a,b) \subseteq Q,$$

gdzie

$$\mathrm{interv}(a,b) = \begin{cases} [a,b] & a \leqslant b \\ [b,a] & a > b \end{cases}$$

$\sim$ jest relacją równoważności: zwrotność i symetria są oczywiste, dla dowodu przechodniości niech b.s.o. $a < b < c$ i $a \sim b, b \sim c$, wtedy $[a,c] = [a,b] \cup [b,c] \subseteq Q$, więc $a \sim c$.
Ustalmy $A \in Q/_\sim$; pokażemy, że A jest przedziałem. Jego lewy koniec to $\inf A$, a prawy to $\sup A$ (jeśli kres dolny jest osiągnięty, to A jest lewostronnie domknięty, podobnie z kresem górnym). Istotnie; weźmy dowolne $x \in (\inf A, \sup A)$ i pokażmy, że $x \in A$.
Istnieje $p \in A$ takie, że $\inf A \leqslant p < x$ (jeśli kres jest osiągnięty, to można przyjąć $p = \inf A$; jeśli nie, to dowolnie blisko kresu jest pewien element z A, więc w szczególności jest jakiś między $\inf A$ i x). Analogicznie bierzemy q i dostajemy $\inf A \leqslant p < x < q \leqslant \sup A$. Dalej, skoro $p, q \in A$, to $p \sim q$, czyli $[p,x] \subset [p,q] \subseteq Q$, czyli $x \sim p$, skąd $x \in A$.
Ponadto A jest nietrywialny; istotnie, dla każdego $x \in A$, skoro $A \subseteq Q = \bigcup S$, to $x \in [a,b] \in S$ dla pewnych $a < b$. Tak więc oprócz x w A są jeszcze jakieś (mniejsze lub większe) liczby.
Zatem $Q/_\sim$ to zbiór rozłącznych nietrywialnych przedziałów; na mocy faktu jest on przeliczalny. Wobec $Q = \bigcup Q/_\sim$ i definicji $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ teza.

3.A) Przeprowadzić następującą konstrukcję zbioru Vitali'ego: dla $x, y \in [0,1)$, niech $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Niech Z będzie zbiorem, który z każdej klasy abstrakcji tej relacji wybiera dokładnie jeden element. Sprawdzić, że $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (Z \oplus q) = [0,1)$, gdzie $\oplus$ oznacza dodawanie mod 1.
Wywnioskować stąd i z niezmienniczości miary Lebesgue'a na przesunięcia, że powyższy zbiór Z nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Motto: relacje równoważności nigdy się nie nudzą.
Oznaczmy $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cap [0,1)$.
Sprawdzamy, że $\sim$ jest relacją równoważności. Zwrotność: $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, symetria: $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$, przechodniość: $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$.
Pokazujemy $\bigcup_{q \in \overline{\mathbb{Q}}} (Z \oplus q) = [0,1)$:

- przeciwdziedziną dodawania mod 1 jest $[0,1)$, stąd inkluzja $\subseteq$;
- $\supseteq$: weźmy $x \in [0,1)$. Na mocy konstrukcji Z, $|[x]_\sim \cap Z| = 1$; nazwijmy ten jedyny element y. $x \sim y$, więc $x - y \in \mathbb{Q}$. Mamy $x = y \oplus (x - y) \in \bigcup_{q \in \overline{\mathbb{Q}}} (Z \oplus q)$, bo za q możemy przyjąć $x - y$ (dla $x \geqslant y$) lub $x - y + 1$ (dla $x < y$).

Zauważmy jeszcze, że z konstrukcji Z wynika, że dla $q_1 \neq q_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$, $(Z \oplus q_1) \cap (Z \oplus q_2) = \emptyset$.
Istotnie, gdyby dla pewnych $z_1, z_2 \in Z$ było $z_1 \oplus q_1 = z_2 \oplus q_2$, to $z_1 \ominus z_2 = q_2 \ominus q_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, czyli $z_1 \sim z_2$ mimo że $z_1 \neq z_2$, sprzeczność.
Wniosek: suma $\dot{\bigcup}_{q \in \overline{\mathbb{Q}}} (Z \oplus q)$ jest rozłączna.
Przypuśćmy obecnie nie wprost, że Z jest mierzalny.
Dla $q \in \overline{\mathbb{Q}}$, dzieląc Z na $Z_1 = \{z \in Z : z + q < 1\}$ i $Z_2 = \{z \in Z : z + q \geqslant 1\}$ dostajemy

$$\lambda(Z \oplus q) = \lambda((Z_1 \oplus q) \cup (Z_2 \oplus q)) = \lambda(Z_1 + q) + \lambda(Z_2 + (q-1)) = \lambda(Z_1) + \lambda(Z_2) = \lambda(Z)$$

z niezmienniczości λ na przesunięcia.
Korzystając z tych faktów otrzymujemy

$$1 = \lambda[0,1) = \lambda\left(\dot{\bigcup_{q\in\overline{\mathbb{Q}}}}(Z \oplus q)\right) = \sum_{q\in\overline{\mathbb{Q}}}\lambda(Z\oplus q) = \sum_{q\in\overline{\mathbb{Q}}}\lambda(Z).$$

Jeśli $\lambda(Z) = 0$, to dostajemy $1 = 0$, w przeciwnym wypadku $1 = \infty$ - tak czy inaczej, sprzeczność kończąca dowód.

4.D) Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $A_1, ..., A_{2009} \in \Sigma$ będą zbiorami własności $\mu(A_i) \geqslant \frac{1}{2}$. Wykazać, że istnieje $x \in X$ taki, że $x \in A_i$ dla przynajmniej 1005 wartości i.

Rozwiązanie bez użycia całki.
Niech

$$B_n = \{x \in X : x \text{ należy do przynajmniej } n \text{ zbiorów } A_i\}.$$

Pokażemy, że

$$\sum_{i=1}^{2009}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{2009}\mu(B_i).$$

W tym celu wprowadzamy na X relację równoważności $\sim$ jak w pierwszym zadaniu:

$$a \sim b \iff (\forall i \leqslant 2009)(a \in A_i \Leftrightarrow b \in A_i).$$

Dla każdego $i \leqslant 2009$ oznaczmy:

$$\mathcal{A}_i = \{[a]_\sim : a \in A_i\}, \qquad \mathcal{B}_i = \{[a]_\sim : a \in B_i\}.$$

Wtedy

$$\sum_{i=1}^{2009}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{2009}\mu\left(\dot{\bigcup}\mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{2009}\sum_{P\in\mathcal{A}_i}\mu(P) \tag{4}$$

i analogicznie

$$\sum_{i=1}^{2009}\mu(B_i) = \sum_{i=1}^{2009}\mu\left(\dot{\bigcup}\mathcal{B}_i\right) = \sum_{i=1}^{2009}\sum_{P\in\mathcal{B}_i}\mu(P). \tag{5}$$

Dla dowolnego $P \in X/_\sim$ rozważmy, ile razy $\mu(P)$ występuje w sumach (4) i (5). Niech P będzie zawarty w $q(P)$ zbiorach A_i. Wtedy $\mu(P)$ występuje $q(P)$ razy w sumie (4) - raz dla każdego zbioru A_i, w którym jest zawarty. Z drugiej strony, w sumie (5) też występuje tyle razy - raz dla każdego ze zbiorów $B_1, B_2, ..., B_{q(P)}$. Zatem

$$\sum_{i=1}^{2009}\mu(A_i) = ... = \sum_{P\in X/_\sim} q(P)\cdot\mu(P) = ... = \sum_{i=1}^{2009}\mu(B_i).$$

Teraz załóżmy nie wprost, że $B_{1005} = B_{1006} = ... = B_{2009} = \emptyset$.
Szacujemy

$$1 \geqslant \mu(B_1) = \sum_{i=1}^{2009}\mu(A_i) - \sum_{i=2}^{2009}\mu(B_i) = \sum_{i=1}^{2009}\mu(A_i) - \sum_{i=2}^{1004}\mu(B_i) - \sum_{i=1005}^{2009}\mu(B_i) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\cdot 2009 - 1003\cdot 1 - 1005\cdot 0 = \frac{3}{2},$$

sprzeczność.

5.1) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, tzn. $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ dla pewnej stałej L. Pokazać, że $f[A]$ jest miary zero dla każdego A miary zero.

Zauważmy najpierw, że dla $a < b$ mamy

$$\operatorname{diam}(f[a, b)) = \sup_{x,y \in [a,b)} |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{x,y \in [a,b)} L|x - y| = L(b - a).$$

Niech A będzie miary zero. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje przeliczalne pokrycie A przedziałami o łącznej mierze $\frac{\varepsilon}{L}$, tzn.

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Epsilonowym pokryciem $f[A]$ będzie $\{f[a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Istotnie,

$$f[A] \subseteq f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f[a_n, b_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f[a_n, b_n)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam}(f[a_n, b_n)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} L(b_n - a_n) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Tak więc $f[A]$ jest miary zero.