Egzamin z rachunku prawdopodobieństwa B1, termin poprawkowy 02.09.2010 - zadania

1. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.
   (a) Wyznaczyć rozkład *(wystarczy dystrybuanta)* $U_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.
   (b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję $X_1 X_2$.
2. Rzucamy niesk. wiele razy sześcienną kostką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że niesk. wiele razy wypadnie ciąg (1,2,3,4,5,6).
3. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 4]$. Rozstrzygnąć zbieżność z prawdopodobieństwem 1 (przy $n \to \infty$) ilorazu
$$\frac{\sum_{i=1}^{3n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$
4. Rzucamy sześcienną kostką, aż pojawi się szóstka.
   (a) Ile razy trzeba rzucić, by szóstka pojawiła się z prawdopodobieństwem przynajmniej 99%?
   (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że szóstka pojawi się dopiero za dwunastym razem?
5. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, a]$, gdzie $a \leqslant 1$ jest nieznane. Niech $Y_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Do czego zbiega Y_n przy $n \to \infty$ i w jakim sensie? Odpowiedź uzasadnić.
   (b) Oszacować za pomocą CTG, jak duże trzeba wziąć n, żeby
$$P\left(|Y_n - a| < \frac{1}{5\sqrt{12}}\right) > 0,95.$$