4.34. prz. Wyznaczyć wartość największą funkcji

$$f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$$

na zbiorze $\mathcal{X}$ rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \qquad\quad \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Z uwagi na to, że nierówność pierwsza jest typu "≥" w układzie równań, z którego będziemy wyznaczać startowe rozwiązanie bazowe musi pojawić się niewiadoma sztuczna t_1. Wobec tego model simpleks dla tego zadania ma postać:
wyznaczyć wartość największą funkcji

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, t_1) = -x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 - Mt_1,$$

przy warunkach na zmienne:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1 \qquad\qquad + t_1 = 4 \\ -x_1 + x_2 + \;\; y_2 \qquad\qquad\quad = 2 \\ x_1 \qquad\qquad\quad + y_3 \qquad = 3 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0, \;\; y_3 \geq 0, \;\; t_1 = 0. \end{cases}$$

Startowe rozwiązanie bazowe wyznaczają wektory przy niewiadomych t_1, y_2, y_3, i ma ono postać:

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = 0, \;\; y_1 = 0 \;\; y_2 = 3, \;\; y_3 = 3, \;\; t_1 = 4$$

4.35. prz. Zbudować model simpleks dla zadania 4.34 prz, gdy należy wyznaczyć wartość najmniejszą funkcji

$$f(x_1,x_2) = -x_1 + 2x_2.$$

Ponieważ w równoważnym układzie równań występuje zmienna sztuczna t_1, to w tym przypadku współczynnik przy tej zmiennej w funkcji $\tilde{f}$ wynosi $+M$. Model simpleks dla tego zadania ma więc postać:

wyznaczyć wartość najmniejszą funkcji

$$\tilde{f}(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,t_1) = -x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + Mt_1$$

przy warunkach na zmienne jak w przykładzie 4.34.

Pozostawiamy czytelnikowi wykonanie obliczeń i sprawdzenie, że funkcja $f(x_1,x_2) = -x_1 + 2x_2$ osiąga swą wartość najmniejszą równą -1 w wierzchołku $\mathbf{x}^w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ zbioru $\mathcal{X}$.

Na koniec omówimy jeszcze dwa przykłady, w których analizujemy sytuacje gdy funkcja swą wartość największą (najmniejszą) osiąga w więcej niż jednym punkcie zbioru $\mathcal{X}$ albo nie osiąga skończonej wartości największej (najmniejszej) na zbiorze $\mathcal{X}$.

4.35. prz. Wyznaczyć wartość największą funkcji

$$f(x_1,x_2) = 4x_1 + 6x_2$$

na zbiorze

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \in R^2 \ \wedge\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \ \wedge\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}\}.$$

4.38. prz. Wyznaczyć wartość największą funkcji

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$$

na zbiorze

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \in R^2\ \wedge\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\ \wedge \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}.$$

Zapiszmy model simpleks dla tego zadania - wyznaczyć wartość największą funkcji liniowej

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2x_1 - x_2 + 0y_1 + 0y_2,$$

przy warunkach na zmienne:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + y_1 \qquad = 1 \\ x_1 - 2x_2 \qquad + y_2 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Startowe rozwiązanie bazowe wyznaczają wektory przy niewiadomych y_1, y_2, więc $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2$. Określa ono wierzchołek $\mathbf{x}_1^w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, zaś $f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = 0$.

Rozwiązanie startowe, oraz następne rozwiązania bazowe, wraz ze wskaźnikami optymalności zapisujemy w tablicy simpleks (por. tablica 16).