

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Justyna Zakręt

Pojęcie pola w geometrii nieeuklidesowej

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

Serdecznie dziękuję swojemu promotorowi, Panu prof. dr hab. Jackowi Świątkowskiemu, który przez cały okres pisania pracy służył mi swoją wiedzą i doświadczeniem, pełnił rolę opiekuna, mentora i przewodnika.

SPIS TREŚCI

WSTĘP	4
CZĘŚĆ PIERWSZA – Wprowadzenie	6
CZĘŚĆ DRUGA - Pola figur w geometrii nieeuklidesowej	12
Rozdział I - Aksjomatyczna teoria pola dla figur wielokątnych	12
Rozdział II - Dedukcyjny wywód (wyprowadzenie) teorii	15
CZĘŚĆ TRZECIA - Analiza teorii aksjomatycznej	29
Rozdział I - Niesprzeczność teorii	29
Rozdział II - Niezależność aksjomatów	32
BIBLIOGRAFIA	39

WSTĘP

Każdy z nas na świat patrzy inaczej, dostrzega inne istotne dla niego elementy. Mamy różne wyczucie piękna, bardziej lub mniej wyostrzone zmysły. Wiąże się to bezpośrednio z wrażliwością człowieka, z jego poglądami, z tym co chce zobaczyć lub z jakiej perspektywy zarówno życiowej, poglądowej czy naukowej przygląda się danemu zjawisku. I tak: polonista zilustruje świat słowami, malarz posłuży się obrazem, muzyk wyrazi to co czuje za pomocą dźwięku. Każda z tych wizji jest prawdziwa, każda inna. Równie pięknie o świecie opowie biolog, chemik, informatyk. Moja przygoda z matematyką zaczęła się w szkole podstawowej. Szybko stała się ona kolejnym środkiem na to by opisać, zrozumieć rzeczywistość. Potem okazało się, że niekoniecznie zawsze mówi o świecie rzeczywistym – to tym bardziej pociągało mnie do tego by poznać, zgłębić, zrozumieć. Zadanie nie łatwe, muszę przyznać, że nie zawsze mój umysł potrafił ją ogarnąć, nie mniej jestem na piątym roku studiów – bogatsza w nową wiedzę, w nowe doświadczenia. Praca ta jest próbą udzielenia odpowiedzi na pytanie o pojęcie pola w geometrii nieeuklidesowej. Wybrałam geometrię bo to o tyle ciekawy dział matematyki, że opiera się po trosze na intuicji jako, że jest ściśle związany z doświadczeniem przestrzeni i zmysłem wzroku. Chociaż przyzwyczajeni do geometrii euklidesowej, na której od dziecka budujemy nasze wyobrażenie o świecie, nie zawsze chcemy zaufać tej intuicji w świecie nieeuklidesowym, który jest zresztą dużo trudniejszy a czasami niemożliwy do wyobrażenia. Bo przecież jak to możliwe, że suma kątów w trójkącie może nie wynosić 180° ? Nie mniej nie trzeba zapewne nikogo przekonywać, że liczby są dla nas nieco bardziej abstrakcyjne niż figury. Geometria wydaje się więc, być bardziej „biologiczna” w porównaniu z pozostałymi zagadnieniami, którymi zajmuje się matematyka.

Nie jest łatwo myśleć o polu w geometrii nieeuklidesowej. Istnieje wiele stanowisk odnoszących się do tego tematu (również w geometrii euklidesowej). Wszystko tak naprawdę zależy od temperamentu czy upodobań matematyka. Co ciekawe różne podejścia wcale nie są ze sobą sprzeczne, przeciwnie, uzupełniają się tworząc pełny, bogatszy obraz całego zagadnienia.

W swojej pracy proponuję podejście aksjomatyczne¹. Przy czym zamiast wielokątów rozważać będę szerszą klasę figur zwaną figurami wielokątnymi.

Pierwsza część pracy to wprowadzenie do geometrii nieeuklidesowej. W dużym uproszczeniu staram się pokazać w niej czym jest ta geometria, jak powstała i gdzie jest wykorzystywana. Dla ilustracji opisuję dwa modele geometrii *Bolya – Łobaczewskiego*: *model Kleina* oraz *model Poincarego*. Wiedza ta pomoże nam zrozumieć *część drugą* w której znajduje się dedukcyjny wywód teorii pola dla figur wielokątnych w geometrii nieeuklidesowej. Swoje rozważania oparłam na modelach, o których wspomniałam wcześniej.

W *rozdziale pierwszym, części drugiej* definiuję pojęcie figury wielokątnej, formułuję też aksjomaty pola. W *rozdziale drugim* wyprowadzam mniej lub bardziej oczywiste własności pola dla figur wielokątnych opierając się na wcześniej podanych, czterech aksjomatach.

Część trzecia to sprawdzenie czy wszystkie aksjomaty są potrzebne oraz zbadanie niesprzeczności teorii. W *rozdziale pierwszym* tej części zajmuję się zbadaniem niesprzeczności teorii. *Rozdział drugi* mówi o niezależności aksjomatów.

¹ Aksjomaty - stwierdzenia które przyjmuje się bez dowodu, z nich za pomocą logicznego rozumowania można wyprowadzić pozostałe twierdzenia danej teorii matematycznej.

CZĘŚĆ PIERWSZA Wprowadzenie

GEOMETRIA EUKLIDESOWA

Cała historia rozpoczyna się od Euklidesa, (-330,-275) który napisał swoistą biblię nauki zwanej geometrią pt: „Elementy”. Do dziś cała elementarna geometria jaką poznajemy w pierwszych szczeblach edukacji opiera się właśnie na dziele Euklidesa. Stało się ono podstawowym podręcznikiem matematyki dla całego cywilizowanego świata. W zasadzie nie powinno nas to dziwić: Euklides opiera rozważania na zaledwie pięciu oczywistych postulatach i wywodzi z nich całą teorię! Z kilku prostych przesłanek, drogą dedukcji dochodzi do ogromnej ilości ważnych wniosków - to musi robić wrażenie. Fascynacja stylem i perfekcją z jaką autor dowodził twierdzeń sprawiła, że podręcznik został gruntownie zbadany przez cały zastęp matematyków. Książka nie tylko wzbudzała powszechne zainteresowanie, ale też niedowierzenie w prawidłowość teorii. Przez wiele, wiele lat na przykład, starano się udowodnić zależność piątego aksjomatu od pozostałych. Jak łatwo zauważyć różni się od pierwszych czterech, co rodziło pewne podejrzenie, że być może nie jest tu konieczny:

Postulat I:

Od dowolnego punktu do dowolnego innego punktu można przeprowadzić prostą

Postulat II:

Ograniczoną prostą można przedłużyć w nieskończoność.

Postulat III:

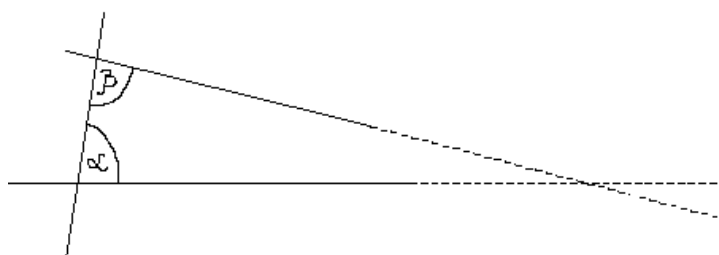
Z dowolnego punktu można dowolnym promieniem opisać okrąg.

Postulat IV:

Wszystkie kąty proste są równe

Postulat V:

Jeżeli dwie proste na płaszczyźnie przecięte trzecią tworzą po ustalonej stronie kąty wewnętrzne α i β takie, że $\alpha + \beta < \pi$ to te dwie proste przecinają się po tej samej stronie tej trzeciej prostej.



Rzeczywiście może się wydawać, że w takim sformułowaniu piąty postulat psuje genialną prostotę i estetykę, charakteryzującą pierwsze cztery pewniki geometrii. Co więcej Euklides korzysta z niego dopiero w dalszej części pracy – możliwe więc, że został dopisany później, że autor sądził, iż będzie się umiał bez niego obejść. Tak więc obecność V postulatu stała się obiektem dosłownie obsesyjnego zainteresowania. Od momentu napisania „Elementów” do XIX stulecia każdy wybitny matematyk pozostawiał po sobie prace, w których rozważał, czy przypadkiem nie udałoby się udowodnić go na podstawie reszty. Gdyby komuś udało się znaleźć taki dowód, to piąty postulat mógłby zostać z listy usunięty bez szkody dla teorii przez te postulaty opisywanej. Nikt jednak tego nie osiągnął.

Nie mniej badania te zaowocowały powstaniem nowych, innych geometrii. Początkowo nawet znani i szanowani matematycy - jak Gauss obawiali się przyznać do swoich odkryć. Błędna teoria oznaczałaby zgubę dla niejednego z nich. I rzeczywiście zamiast sławy pierwsze geometrie nieeuklidesowe, które pojawiły się na świecie okazały się tragiczne dla ich twórców. Zanim to jednak nastąpiło, przeświadczenie o niepodważalnej pewności twierdzeń geometrii euklidesowej stało się całkiem powszechne. Jak twierdził jeden z najśłynniejszych filozofów wszech czasów Immanuel Kant: *"[...] geometria wypowiada twierdzenia, którym towarzyszy świadomość konieczności; tego rodzaju twierdzenia nie mogą być empiryczne. Taki charakter tej nauki daje się wytłumaczyć tylko przez to, że jej przedmiot, tj. przestrzeń, nie jest wyobrażeniem empirycznym, jest stałą formą zmysłowości"*. (Władysław Tatarkiewicz: Historia filozofii. PWN, Warszawa 1981). Przestrzeń, jak twierdzi Kant nie istnieje poza nami, ale w nas, jako rodzaj formy naszej zmysłowości. To, że w określony sposób postrzegamy rzeczy, czy porządkujemy świat jest ograniczone bo związane nieodłącznie tylko z naszą umysłowością, z przestrzenią euklidesową. Trudno się zatem dziwić popularności „Elementów” Euklidesa, skoro jego twierdzenia są z nami zrośnięte. Łatwo z kolei pojąć opory z przyjęciem innych geometrii, skoro euklidesowa jest tak naturalna i bliska nam jak zmysł wzroku czy słuchu. Główny problem polega na tym by uwierzyć w dokonane odkrycie. Zauważmy, że mamy tu do czynienia ze zdumiewającym (przynajmniej na pozór) zjawiskiem: za odkrywcę uznawano nie tego kto odkrył, ale tego kto pierwszy w odkrycie uwierzył.

GEOMETRIA NIEEUKLIDESOWA

"Tymczasem powiem tylko, że z nicości stworzyłem cały świat" - w taki oto skromny sposób w 1823 roku podsumował swe wyniki jeden z pierwszych twórców geometrii nieeuklidesowych, 21-letni Janos Bolyai. Tymczasem ojciec Jonaosa - Wolfgang Bolyai - wybitny węgierski matematyk już od dzieciństwa wpajał mu naczelną zasadę: „nie wolno zajmować się V postulatem Euklidesa”. Świadomy własnej klęski starał się chronić syna - przed obłędem, przed zmarnowanym życiem, przed krzywdą swoją lub bliskich.

Młody Bolyai okazał się równie niepokorny co genialny. Napisał pracę w której rozważał geometrię różną od opisanej dotąd geometrii eliptycznej i euklidesowej. W stworzonej przez niego geometrii kąty wewnętrzne w trójkącie mają zawsze mniej niż 180° , a przez dany punkt poza prostą przechodzi nieskończenie wiele innych prostych równoległych do niej. Wolfgang był tak podekscytowany odkryciem syna, że w prywatnej korespondencji przesłał pracę Gaussowi. Ten natomiast twierdził, że tak naprawdę to on - Gauss - wszystko pierwszy wymyślił i nie widzi w tym nic dziwnego, że syn jego przyjaciela zna wyniki jego (tj. Gaussa) prac. Zabolalo to Bolyaiów, do tego stopnia, że odważyli się opublikować pracę Jonaosa jedynie jako dodatek do poświęconej nauczaniu matematyki książki Wolfganga (w 1832 roku). Wtedy okazało się, że świat poznał geometrię Jonaosa już trzy lata wcześniej w 1829 roku. Tyle tylko, że pod nazwiskiem Łobaczewski, który niezależnie od wszystkich stworzył taką samą teorię i szczęśliwym trafem opublikował ją najszybciej. Tego drugiego ciosu wielka nerwowość i chorobliwa ambicja Janosa Bolyaiego nie wytrzymała.... uznał, że winny wszystkiemu musi być ojciec, skoro tylko on miał dostęp do jego prac i zapewne żądza zysku zwyciężyła - tzn. sprzedano jego odkrycie. Obrażony na wszystkich przestał zajmować się matematyką, a niektórzy twierdzą nawet, że w ogóle przestał się do kogokolwiek odzywać.

Tymczasem Łobaczewskiego po pierwszym odczycie w 1826 roku wielu uznało za dziwaka. Po tym gdy jego praca ukazała się w Niemczech w 1833 roku, stracił stanowisko rektora Uniwersytetu w Kazaniu, zabrano mu również najwyższe odznaczenie dla osób spoza carskiej rodziny - Order św. Anny II klasy.

Najsprytniej zachował się zatem wybitny niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss, który zataił swoje przemyślenia dotyczące nowych geometrii - uparcie jednak twierdząc, że to on wie prym pierwszeństwa. Nawet jeśli wierzyć

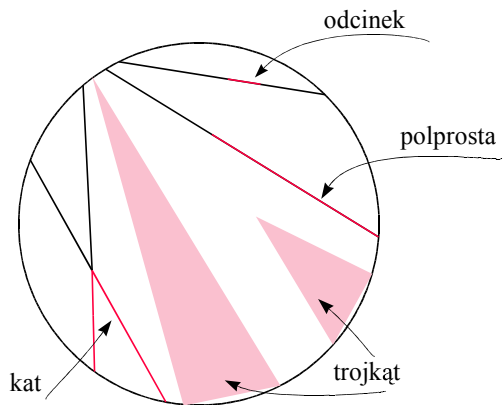
Gaussowi, że jako 15-letni chłopiec stworzył geometrię nieeuklidesową, to i tak przed nim zajmowali się nią inni. Na przykład Włoch Giuseppe Saccheri zaprzeczył piątemu postulatowi Euklidesa i dowiódł kilku twierdzeń geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. Opublikował nawet prace na ten temat w 1733 pt. „Euklides ze wszelkich skaz oswobodzony”. Tyle tylko, że kiedy doszedł do stwierdzenia, że proste mogą się do siebie zbliżać nieograniczenie, ale nie przecinać, uznał to za tak absurdalne, iż swe wywody przedstawił jako... dowód piątego postulatu Euklidesa.

MODELE GEOMETRII NIEEUKLIDESOWEJ BOLYAI-ŁOBACZEWSKIEGO

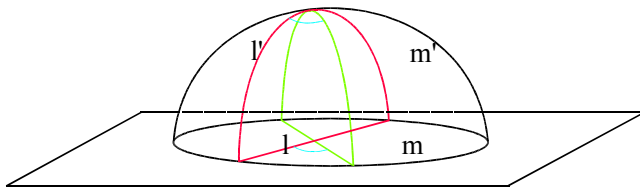
W geometrii Łobaczewskiego V aksjomat Euklidesa został zastąpiony aksjomatem równoległości: „przez punkt nie leżący na danej prostej przechodzą przynajmniej dwie różne proste nie przecinające danej.”

MODEL KLEINA

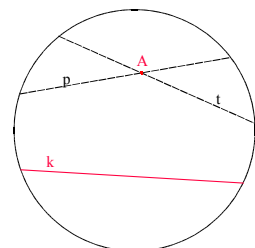
Płaszczyzna modelu Kleina w tej geometrii jest kołem, punkty płaszczyzny to punkty koła bez brzegu. Prostymi są cięciwy koła, odcinkiem jest fragment cięciwy. Miarę kątów mierzymy za pomocą kątów w półsferycznym modelu Beltramiiego. W praktyce oznacza to, że miara kąta



między dwiema prostymi l i m to miara kąta pomiędzy odpowiadającymi im półokręgami l' i m' w modelu Beltramiiego.

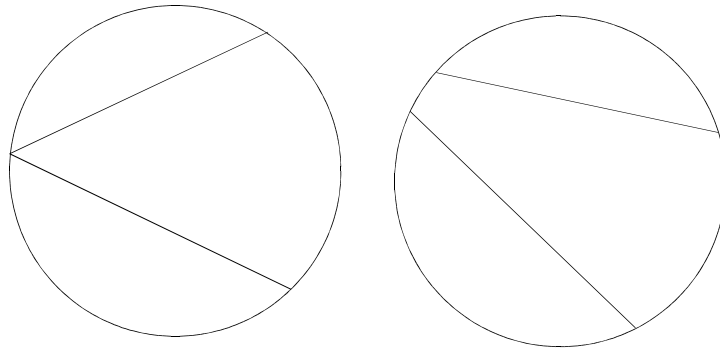


Zauważmy, że rzeczywiście w modelu Kleina zachodzi aksjomat Łobaczewskiego. Przez punkt A nie leżący na prostej k , przechodzą co najmniej dwie proste nie przecinające k .



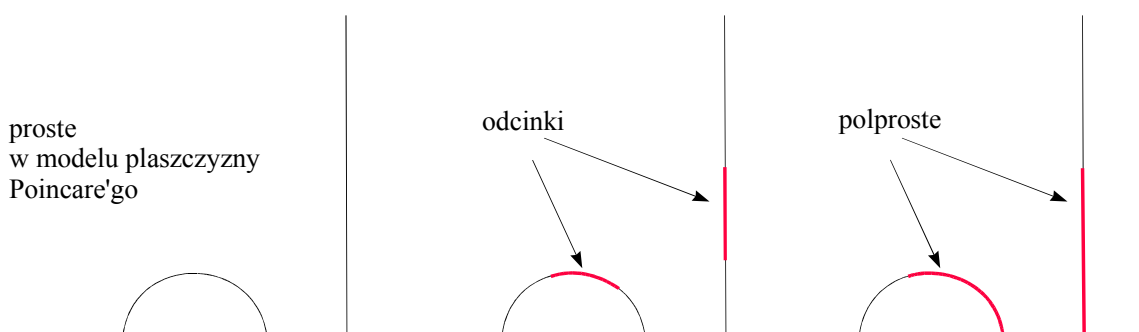
W modelu wyróżniamy dwa rodzaje par nieprzecinających się prostych:

- asymptotyczne – czyli takie które mają na brzegu koła jeden punkt wspólny
- rozbieżne – w modelu są rozłączne jako cięciwy, czyli nie mają punktów wspólnych ani wewnątrz, ani na brzegu)

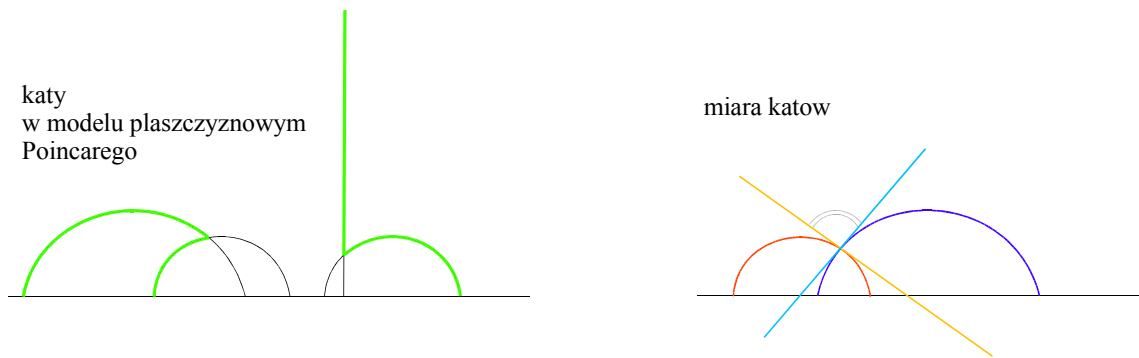


MODEL POINCARÉGO

Jest to półpłaszczyzna bez ograniczającej jej prostej. Proste w tym modelu to półproste prostopadłe do brzegu modelu albo półokręgi zawarte w półpłaszczyźnie o końcach na brzegu modelu. Odcinkiem i półprostą jest fragment prostej ograniczony odpowiednio dwoma punktami lub jednym.



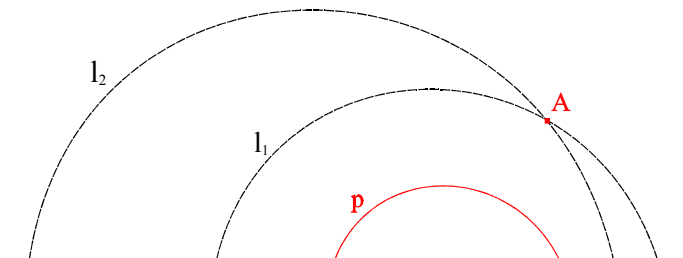
Miary kątów to euklidesowe miary kątów pomiędzy stycznymi do prostych w modelu. Poniżej na rysunku zaznaczono przykładowe rodzaje kątów pomiędzy prostymi różnego typu w tym modelu.



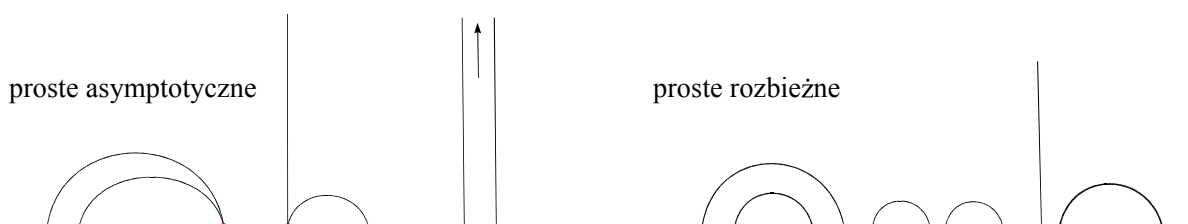
Podobnie jak w modelu Kleina zachodzi tu aksjomat Łobaczewskiego. Przez punkt nie leżący na prostej przechodzi nieskończenie wiele prostych nie przecinających danej prostej.

$$l_2 \cap p = \emptyset \quad A \in l_1$$

$$l_2 \cap p = \emptyset \quad A \in l_2$$



Proste asymptotyczne mają jeden punkt wspólny na brzegu modelu, proste rozbieżne natomiast nie mają punktów wspólnych.



CZĘŚĆ DRUGA

Pole figur w geometrii nieeuklidesowej

ROZDZIAŁ I

Aksjomatyczna teoria pola dla figur wielokątnych

PRZYGOTOWANIE

W dalszej części pracy będę stosować następujące oznaczenia:

- Przez T_0 będziemy oznaczać trójkąt idealny o trzech wierzchołkach w nieskończoności;
- Przez T_α będziemy oznaczać trójkąt idealny o dwóch wierzchołkach w nieskończoności i trzecim wierzchołku o kącie równym α ;
- Niech $T_{\alpha\beta}$ będzie trójkątem idealnym o jednym wierzchołku w nieskończoności i dwóch pozostałych wierzchołkach o kątach równych odpowiednio α i β ;

KOLEKCJA FAKTÓW Z GEOMETRII NIEEUKLIDESOWEJ KTÓRE STOSUJE W DALSZYCH ROZWAŻANIACH

Fakt 2.1.1

Każde dwa trójkąty idealne o trzech wierzchołkach w nieskończoności (tzn. trójkąty typu T_0), są przystające.

Fakt 2.1.2

$$T_{\alpha_1} \equiv T_{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_2.$$

Fakt 2.1.3

Jeśli $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ i $\beta_1 \equiv \beta_2$ to $T_{\beta_1} \equiv T_{\beta_2}$.

Fakt 2.1.4

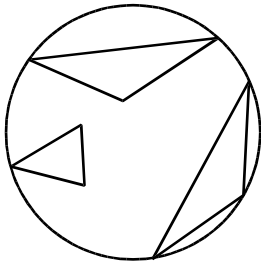
Suma kątów w trójkącie idealnym jest mniejsza niż π .

TRÓJKĄTY IDEALNE ORAZ FIGURY WIELOKĄTNE – DEFINICJE**Definicja 2.1.5**

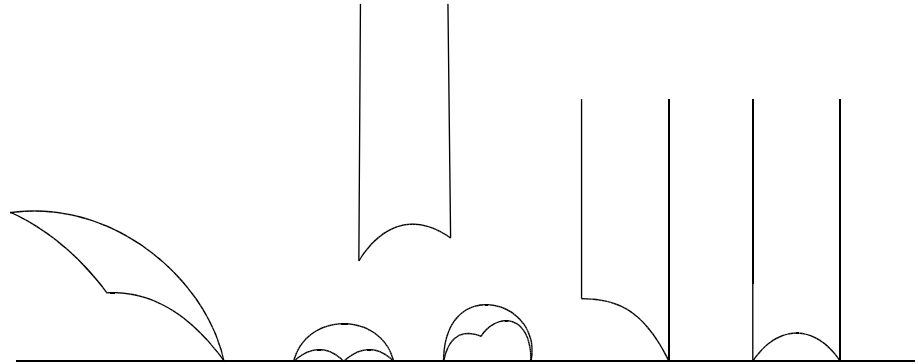
*Trójkątem idealnym*² nazywamy figurę złożoną z 3 „boków” w której pewne pary boków zamiast spotykać się w wierzchołku „spotykają się w nieskończoności”, tzn. są do siebie asymptotyczne.

Niżej widzimy ich ilustrację w modelach które omówiłam we wprowadzeniu:

W modelu Kleina



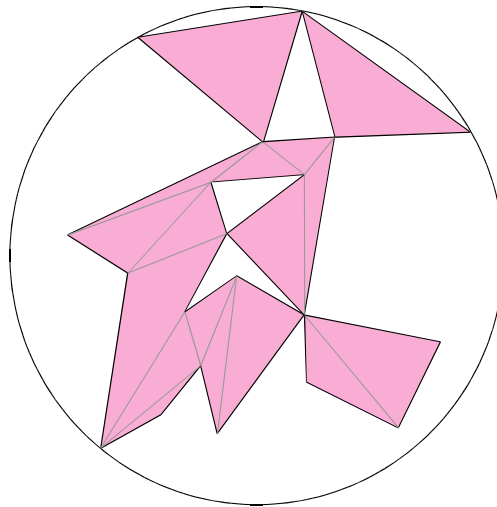
W modelu Poincarego

**Definicja 2.1.6**

Figury wielokątne są to figury dające się przedstawić jako suma skończonej ilości nie-zachodzących³ na siebie trójkątów zwykłych bądź idealnych.

² Pojęcia *trójkąt* będę w dalszej części używać zarówno w sensie zwykłym jak i idealnym.

³ Nie-zachodzenie na siebie oznacza, że figury te nie posiadają wspólnych punktów wewnętrznych.



AKSJOMATYCZNA TEORIA POLA DLA FIGUR WIELOKĄTNYCH

Polem nazywać będę pewną funkcję przypisującą figurom F liczby rzeczywiste $P(F)$. Aksjomatyczna teoria pola na płaszczyźnie nieeuklidesowej tym różni się od innych prób zdefiniowania tego pojęcia, że całe rozumowanie oparte jest na poniższych czterech aksjomatach.

Aksjomat Sumy (AS)

Jeśli figura wielokątna W jest sumą niezachodzących na siebie figur wielokątnych W_1, W_2 to $P(W) = P(W_1) + P(W_2)$.

Aksjomat Przystawania (PS)

Każde dwie figury wielokątne mają równe pola.

Aksjomat Monotoniczności (AM)

Jeśli $W_1 \subset W_2$ to $P(W_1) \subset P(W_2)$.

Aksjomat Jednostki (AJ)

Dla pewnego ustalonego trójkąta idealnego T_0 jego pole wynosi π .

CZĘŚĆ DRUGA – ROZDZIAŁ I

ROZDZIAŁ II

Dedukcyjny wywód (wyprowadzenie) teorii

Rozdział zawiera ściśle dedukcyjne wyprowadzenie podstawowych własności pola w geometrii nieeuklidesowej w oparciu o same aksjomaty.

Stwierdzenie 2.2.1

Jeśli figury wielokątne $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ nie zachodzą na siebie to
 $P(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n) = P(W_1) + P(W_2) + P(W_3) + \dots + P(W_n)$.

dowód

W dowodzie stosujemy indukcyjnie aksjomat sumy.

- 1) Pierwszy krok indukcyjny: wynika bezpośrednio z aksjomatu sumy (AS).
- 2) Drugi krok indukcyjny:

ZAŁOŻENIE:

Dla parami niezachodzących na siebie figur: $W_1 \dots W_n$ jest prawdą, że
 $P(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n) = P(W_1) + P(W_2) + P(W_3) + \dots + P(W_n)$.

TEZA:

Dla parami niezachodzących na siebie figur: $W_1 \dots W_n, W_{n+1}$ jest prawdą,
że $P(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n \cup W_{n+1}) =$
 $= P(W_1) + P(W_2) + P(W_3) + \dots + P(W_n) + P(W_{n+1})$

DOWÓD:

Niech $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n \cup W_{n+1}$.

Rozważmy $W' = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$.

Korzystając z ZAŁOŻENIA, ponieważ W_1, W_2, \dots, W_n są parami niezachodzące mamy: $P(W') = P(W_1) + P(W_2) + P(W_3) + \dots + P(W_n)$.

Ponieważ $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ oraz W_{n+1} przy danych założeniach nie zachodzą na siebie to z AS mamy: $P(W) = P(W') + P(W_{n+1})$ skąd
 $P(W) = P(W' \cup W_{n+1}) = P(W_1) + P(W_2) + P(W_3) + \dots + P(W_n) + P(W_{n+1})$.

c. n. u.

TRÓJKĄTY IDEALNE

Stwierdzenie 2.2.2

Dowolny trójkąt o trzech wierzchołkach idealnych ma pole π .

dowód

Z aksjomatu jednostki (AJ) wiemy, że pole ustalonego trójkąta idealnego jest równe π . Ponieważ każde dwa trójkąty idealne typu T_0 są przystające (fakt 2.2.1) oraz wszystkie przystające trójkąty idealne mają równe pola (AP) to pole dowolnego trójkąta idealnego jest równe π .

c. n. u.

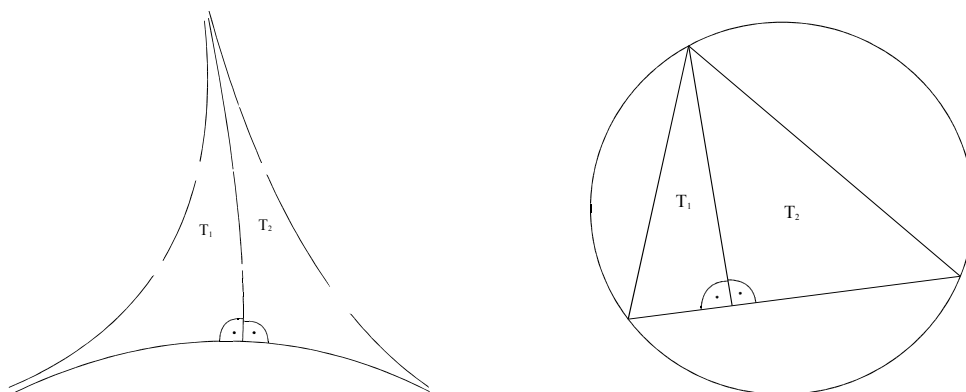
Zanim zajmiemy się uogólnieniami dotyczącymi obliczania pola postarajmy się intuicyjnie zrozumieć istotę zagadnienia. Stwierdzenia 2.2.3 – 2.2.5 to jedynie ilustracja dla problemu, który mamy przed sobą do rozwiązania. Korzystając z aksjomatów obliczam pola dla kilku przykładowych figur w geometrii nieeuklidesowej.

Stwierdzenie 2.2.3

Trójkąty o 2 wierzchołkach idealnych i jednym kącie zwykłym $\alpha = \frac{\pi}{2}$ mają pole równe $\frac{\pi}{2}$.

dowód

Zbudujmy z dwóch trójkątów, o dwóch wierzchołkach idealnych i jednym kącie zwykłym $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jeden trójkąt o wszystkich trzech wierzchołkach idealnych zestawiając je ze sobą.



Zauważmy, teraz że z AS mamy, że $P(T_1) + P(T_2) = \pi$. Z geometrii nieeuklidesowej

wiadomo, że $T_1 \cong T_2$, więc $P(T_1) \cong P(T_2)$. Stąd wniosek, że $P(T_1) = \frac{\pi}{2}$. c. n. u.

Stwierdzenie 2.2.4

Trójkąty o dwóch wierzchołkach idealnych i jednym kącie zwykłym $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ mają

pole równe $\frac{\pi}{3}$.

dowód

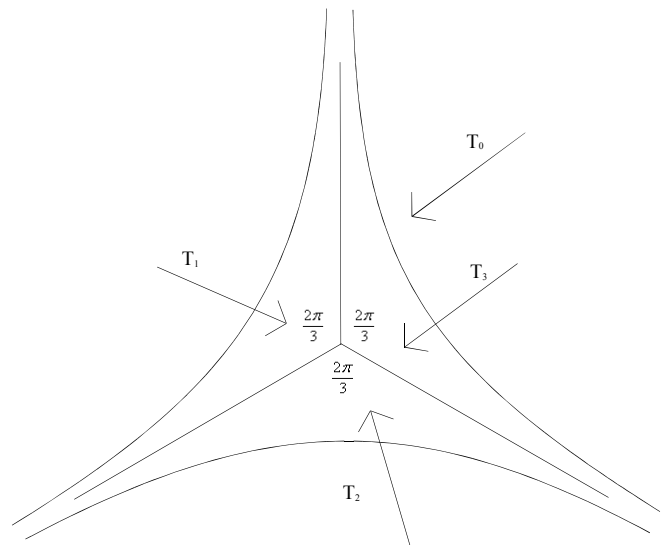
Postępujemy analogicznie jak w dowodzie stwierdzenia poprzedniego. Budujemy trójkąt o trzech wierzchołkach idealnych, składając z sobą trzy trójkąty idealne

o jednym kącie zwykłym równym $\frac{2\pi}{3}$

. W modelu Poincarego wszystkie trzy trójkąty o których mowa wyżej przystają do siebie: $T_1 \cong T_2 \cong T_3$. Co pociąga za sobą równość $P(T_1) = P(T_2) = P(T_3)$. Jak mówi AS a dokładniej stwierdzenie 2.2.1 suma pól tych trzech trójkątów jest równa polu trójkąta o trzech wierzchołkach idealnych: $P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) = P(T_0)$. Skąd po prostych przekształceniach $3 \cdot P(T_1) = \pi$ otrzymujemy rozwiązanie:

$$P(T_1) = \frac{\pi}{3}.$$

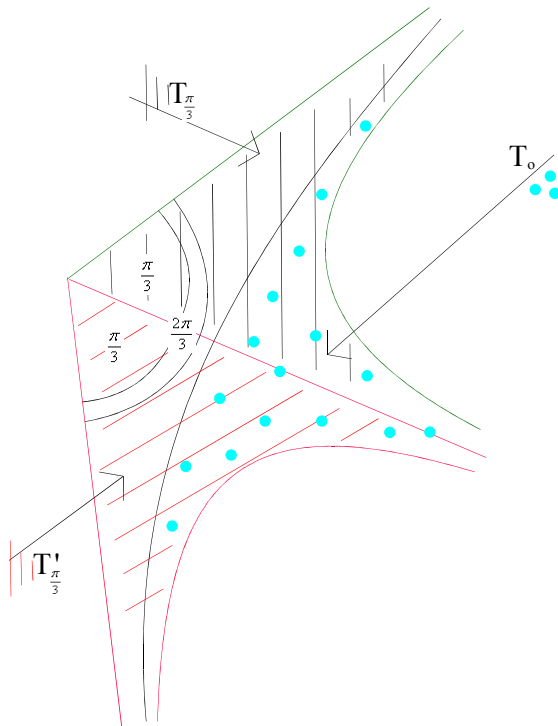
c. n. u.



Stwierdzenie 2.2.5

Trójkąty o dwóch wierzchołkach idealnych i jednym kącie zwykłym $\alpha = \frac{\pi}{3}$ mają

pole równe
$$P(T_{\frac{\pi}{3}}) = \frac{2\pi}{3}$$



Dowód

Pierwszy krok polega na złożeniu ze sobą dwóch trójkątów o jakich mowa w stwierdzeniu. Otrzymamy figurę

złożoną z trójkąta idealnego $T_{\frac{2\pi}{3}}$,

o jednym kącie zwykłym równym $\frac{2\pi}{3}$

z trójkątem idealnym o trzech wierzchołkach idealnych. Znamy pole tej figury. Jest to suma pól trójkątów z których się składa. Korzystamy z aksjomatu jednostki (AJ), który mówi, że $P(T_0) = \pi$ oraz ze stwierdzenia

2.2.4 mówiącego, że $P(T_{\frac{2\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3}$. Zauważmy, że trójkąty $T_{\frac{\pi}{3}} \equiv T'_{\frac{\pi}{3}}$ są przystające.

Stąd wniosek, że ich pola są równe: $P(T_{\frac{\pi}{3}}) = P(T'_{\frac{\pi}{3}})$. Czyli ostatecznie z aksjomatu

sumy (AS) otrzymamy: $P(T_{\frac{\pi}{3}}) + P(T'_{\frac{\pi}{3}}) = P(T_{\frac{2\pi}{3}}) + P(T_0)$. Skąd

$2 \cdot P(T_{\frac{\pi}{3}}) = P(T_{\frac{2\pi}{3}}) + P(T_0)$. Wstawiając dane do powyższego równania:

$2 \cdot P(T_{\frac{\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3} + \pi$ i dzieląc obie strony równania przez dwa: $P(T_{\frac{\pi}{3}}) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$

znajdujemy wartość pola dla trójkąta idealnego \mathcal{G} . n. u.

o jednym kącie zwykłym równym $\frac{\pi}{3}$.

Potrafimy już wyliczyć pola dla kilku przykładowych trójkątów idealnych. Teraz zajmiemy się uogólnieniem tego zagadnienia. Pomocne okażą się poniższe dwa twierdzenia:

Twierdzenie 2.2.6

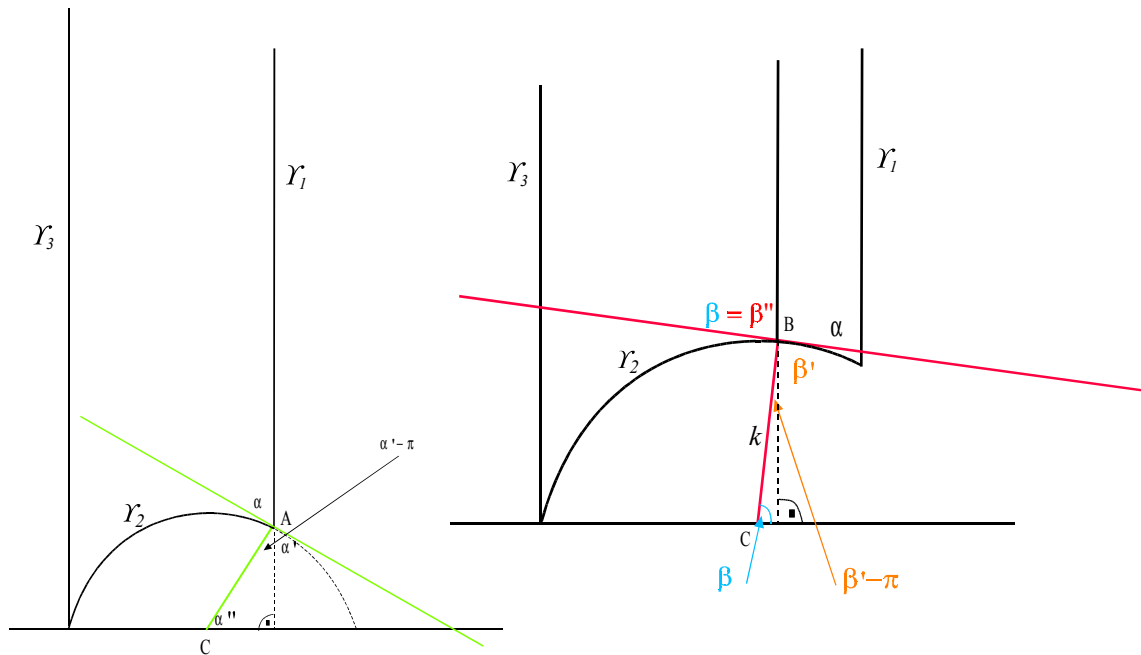
Jeśli $\alpha < \beta$ to trójkąt T_β daje się umieścić w trójkącie T_α .

dowód

Umieścimy trójkąt T_α w modelu Poincarego (z dokładnością do przystawania) w taki sposób, że jego ramiona zawierają się w prostych pionowych γ_1, γ_3 .

Mając dane $\beta > \alpha$ chcemy skonstruować trójkąt $T_\beta \subset T_\alpha$. Niech kąt α znajduje się między krzywymi γ_1, γ_2 . Rysujemy euklidesową prostą styczną do γ_2 w punkcie A . Zauważmy, że $\alpha = \alpha'$ bo to kąty wierzchołkowe oraz $\alpha' = \alpha''$ ponieważ α' uzupełnia

się do kąta $\frac{\pi}{2}$ z kątem $\pi - \alpha'$ i α'' uzupełnia się do kąta $\frac{\pi}{2}$ z kątem $\pi - \alpha'$. Stąd $\alpha = \alpha''$. Niech β będzie kątem z twierdzenia takim, że $\beta > \alpha$ i niech ma z α'' wspólny wierzchołek C (jak na rysunku). Zauważmy, że skoro $\beta > \alpha$ to również $\beta > \alpha''$ bo $\alpha = \alpha''$. Prosta k która zawiera drugie ramię kąta β przetnie γ_2 w punkcie B . Narysujemy euklidesową styczną do γ_2 w tym punkcie. Wtedy $\beta = \beta'$ bo oba kąty β, β' uzupełniają się do $\frac{\pi}{2}$ z kątem $\pi - \beta'$. Kąt $\beta' = \beta''$ bo to kąty wierzchołkowe, czyli $\beta = \beta''$.



Przyjmijmy, że T_β to nieeuklidesowy trójkąt (o dwóch kątach idealnych), taki jak w twierdzeniu. Niech $\alpha \in T_\alpha$, $\beta \in T_\beta$. Zauważmy, że skoro $\beta > \alpha$ i kąty leżą na jednej krzywej to $T_\beta \subset T_\alpha$.

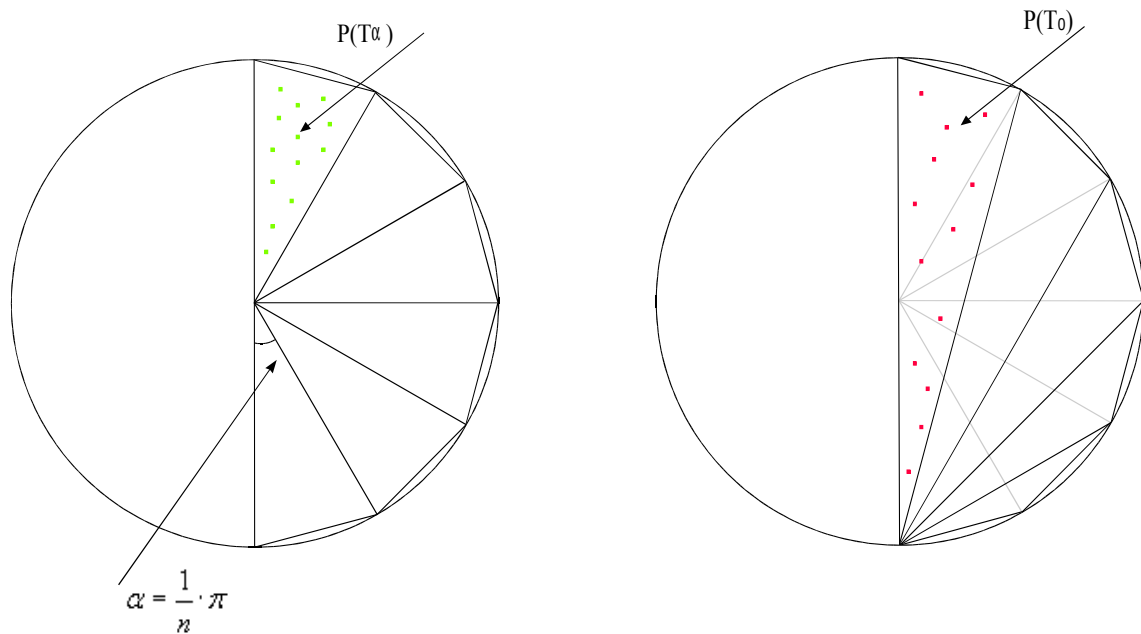
c. n. u.

Twierdzenie 2.2.7

Pole trójkąta (typu T_α) o dwóch wierzchołkach idealnych dla kąta postaci $\alpha = \frac{\pi}{n}$ wynosi $P(T_\alpha) = \pi - \alpha$.

dowód

Podzielmy kąt π na n równych kątów o mierze $\frac{\pi}{n}$. Rozważmy figurę powstałą z sumy n trójkątów idealnych typu $T_{\frac{\pi}{n}}$, gdzie $\alpha = \frac{\pi}{n}$ lub sumy $n-1$ trójkątów idealnych typu T_0 .



Możemy więc napisać, że $n \cdot P(T_\alpha) = (n - 1) \cdot P(T_0)$. Korzystając ze stwierdzenia 2.2.2 mamy pole $P(T_0) = \pi$, skąd otrzymujemy:

$$P(T_\alpha) = \frac{n-1}{n} \cdot \pi = \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) \cdot \pi = \pi - \frac{1}{n} \cdot \pi = \pi - \alpha$$

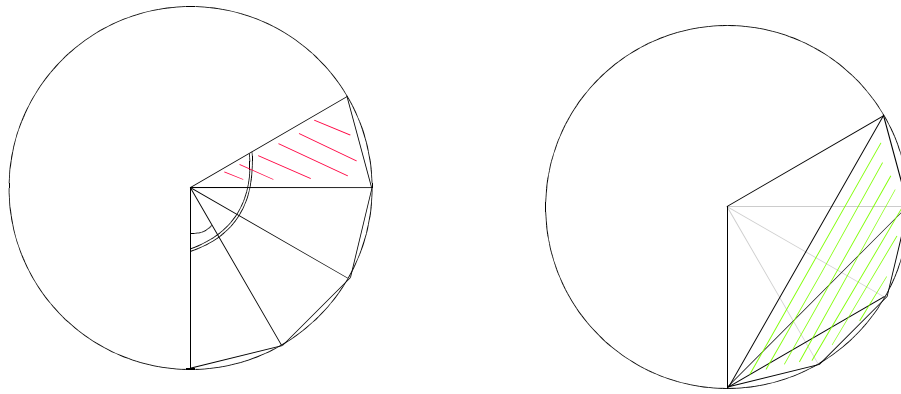
Twierdzenie 2.2.8

Pole trójkąta (typu T_α) o dwóch wierzchołkach idealnych współmiernego z π dla

wymiernego kąta postaci $\alpha = \frac{k}{n} \cdot \pi$ wynosi $P(T_\alpha) = \pi - \alpha$.

dowód

Podzielmy kąt π na n równych kątów o mierze $\frac{\pi}{n}$ (jak w dowodzie twierdzenia 2.2.7) i wybierzmy spośród nich k . Rozważmy sumę k trójkątów idealnych typu $T_{\frac{\pi}{n}}$ o kącie $\alpha = \frac{\pi}{n}$ oraz $k-1$ trójkątów idealnych typu T_0 , jak na rysunku.

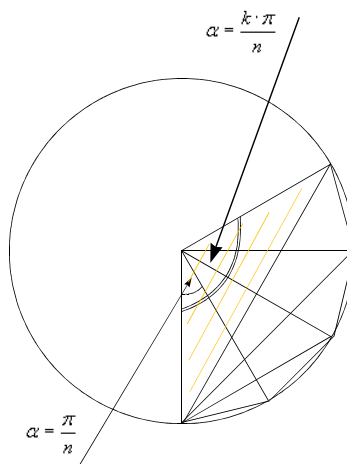


Zauważmy, że pole trójkąta T_α gdzie $\alpha = \frac{k\pi}{n}$ jest równe różnicy sumy pól

trójkątów $T_{\frac{\pi}{n}}$ o kącie $\alpha = \frac{\pi}{n}$ oraz sumy pól trójkątów T_0 :

$$P(T_{\frac{k\pi}{n}}) = k \cdot P(T_{\frac{\pi}{n}}) - (k-1) \cdot P(T_0).$$

Korzystając z twierdzenia 2.2.7 oraz stwierdzenia 2.2.2 mamy ,że:



$$P(T_{\frac{k\pi}{n}}) = k \cdot (\pi - \frac{\pi}{n}) - (k-1) \cdot \pi = k \cdot \pi - \frac{k}{n} \cdot \pi - k \cdot \pi + \pi = \pi - \frac{k}{n} \cdot \pi = \pi - \alpha$$

c. n. u.

Twierdzenie 2.2.9

Pole trójkąta (typu T_α) o dwóch wierzchołkach idealnych dla niewspółmiernych z π kątów α niewymiernego kąta postaci wynosi $P(T_\alpha) = \pi - \alpha$.

dowód

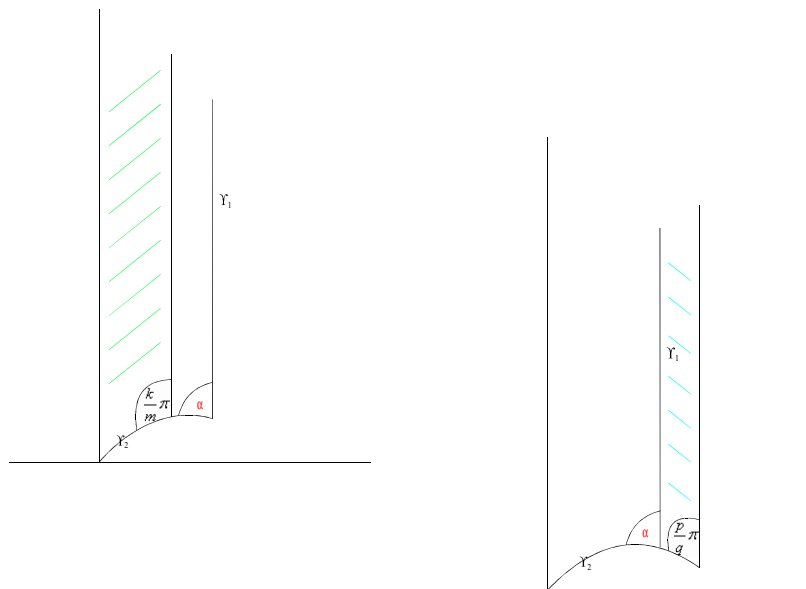
Weźmy współmierne z π kąty $\frac{p}{q}\pi$, $\frac{k}{m}\pi$ takie, że: $\frac{p}{q}\pi < \alpha < \frac{k}{m}\pi$.

Na podstawie twierdzenia 2.2.6 możemy stwierdzić, że: $P(T_\alpha) > P(T_{\frac{k}{m}\pi})$ skąd

oczywiście $P(T_\alpha) > \pi - \frac{k}{m}\pi$. Podobnie na podstawie twierdzenia 2.2.6 otrzymamy

$\pi - \frac{p}{q}\pi > P(T_\alpha)$. Reasumując pole trójkąta o niewymiernym kącie α mieści się

między wielkościami: $\pi - \frac{p}{q}\pi > P(T_\alpha) > \pi - \frac{k}{m}\pi$.



Rozważmy ciąg wymiernych kątów postaci $\frac{p_n}{q_n}\pi$ dla $n \in \mathbb{N}$ zbiegających do niewymiernego kąta α z prawej strony. Rozważmy równocześnie ciąg wymiernych

kątów postaci $\frac{k_n}{m_n} \cdot \pi$ dla $n \in \mathbb{N}$ zbiegających do niewymiernego kąta α z lewej strony.

Możemy powiedzieć, że: $\pi - \frac{p_n}{q_n} \cdot \pi > P(T_\alpha) > \pi - \frac{k_n}{m_n} \cdot \pi$.

Kolejny krok naszego rozumowania opiera się na twierdzeniu o trzech ciągach, które mówi, iż jeśli dane są trzy [ciągi](#) a_n , b_n i c_n takie, że dla każdego n większego od pewnej [liczby naturalnej](#) N : $a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Ponieważ $\pi - \frac{p_n}{q_n} \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi - \alpha$ oraz $\pi - \frac{k_n}{m_n} \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi - \alpha$ to na mocy powyższego $P(T_\alpha) = \pi - \alpha$. c. n. u.

Uwaga:

Jeśli zadajesz sobie pytanie jak można dobrać ciąg $\frac{k_n}{m_n}$ taki, że $\frac{k_n}{m_n} \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ to

zauważ, że wystarczy dobrać go tak by zbiegał do $\frac{\alpha}{\pi}$ przy n dążącym do

nieskończoności. Podobnie ciąg $\frac{p_n}{q_n}$ taki, że $\pi - \frac{p_n}{q_n} \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi - \alpha$ wystarczy

dobrać tak by zbiegał do $\frac{\alpha}{\pi}$.

Definicja 2.2.10

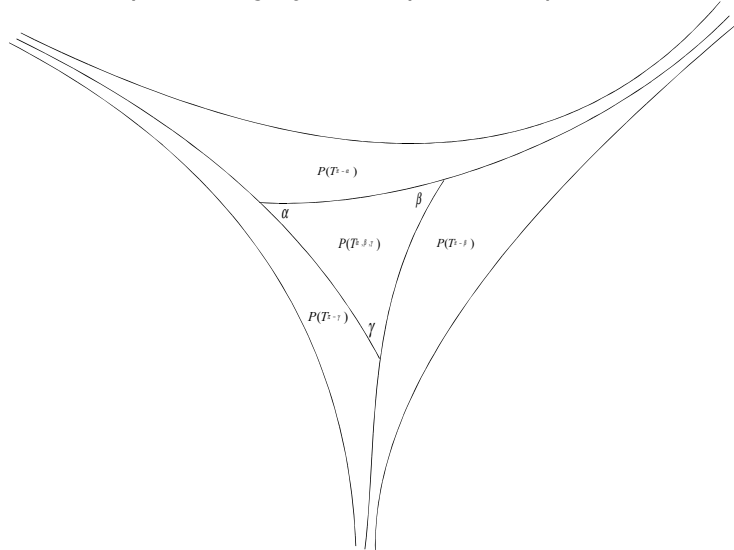
Defektem w trójkącie o kątach α, β, γ nazywamy liczbę: $\Delta(T_{\alpha, \beta, \gamma}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Twierdzenie 2.2.11

Pole trójkąta o kątach α, β, γ wynosi: $P(T_{\alpha, \beta, \gamma}) = \Delta(T_{\alpha, \beta, \gamma}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

dowód

Korzystając z aksjomatów i wyprowadzonych wcześniej twierdzeń następujący ciąg przekształceń pozwala na znalezienie pola trójkąta o trzech kątach α, β, γ w geometrii nieeuklidesowej. Zauważmy, że trójkąt idealny można podzielić na skończoną liczbę trójkątów idealnych o jednym, dwu lub trzech kątach zwykłych. Przyjmijmy, że dany jest podział jak na rysunku:



$$T_{\alpha, \beta, \gamma} \cup T_{\pi - \gamma} \cup T_{\pi - \beta} \cup T_{\pi - \alpha} = T_0$$

Wtedy z AS oraz

z stwierdzenia 2.2.1 otrzymamy, że:

$$P(T_{\alpha, \beta, \gamma}) + P(T_{\pi - \gamma}) + P(T_{\pi - \beta}) + P(T_{\pi - \alpha}) = P(T_0). \text{ Po zastosowaniu twierdzeń 2.2.7}$$

$$\text{– 2.2.9 otrzymamy: } P(T_{\alpha, \beta, \gamma}) + [\pi - (\pi - \gamma)] + [\pi - (\pi - \beta)] + [\pi - (\pi - \alpha)] = \pi .$$

$$\text{Co prowadzi do ostatecznego wniosku: } P(T_{\alpha, \beta, \gamma}) = \pi - (\gamma + \beta + \alpha) = \Delta(T_{\alpha, \beta, \gamma}).$$

c. n. u.

FIGURY WIELOKĄTNE

Dla zdefiniowania defektu figury wielokątnej będziemy posługiwać się reprezentacją tych figur w modelu Kleina.

Definicja 2.2.12

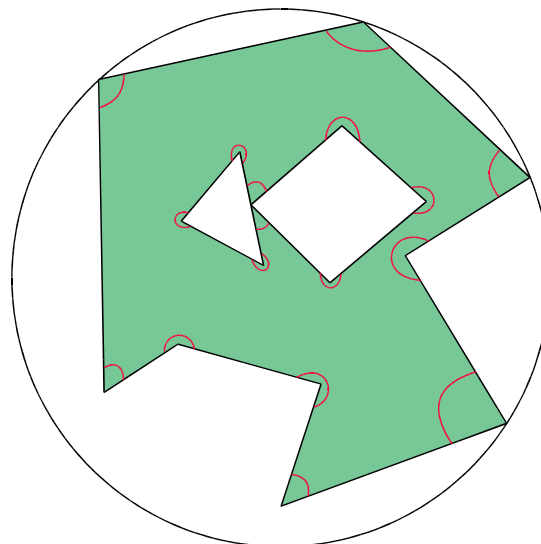
Defektem figury wielokątnej nazywać będziemy liczbę będącą różnicą euklidesowej sumy kątów w reprezentacji tej figury, w modelu Kleina oraz nieeuklidesowej sumy kątów. Przy czym przyjmujemy, że kąty w wierzchołkach idealnych są równe zero.

$$\Delta(W) = \text{euklidesowa suma kątów} - \text{nieceuklidesowa suma kątów}$$

Pod pojęciem sumy kątów figury wielokątnej rozumiemy sumę wszystkich kątów przyległych do wierzchołków tej figury. Dla przykładowej „skomplikowanej” figury wielokątnej – przedstawionej na rysunku niżej – jest to suma wszystkich zaznaczonych kątów. Licząc defekt zaznaczone kąty sumujemy najpierw w sensie euklidesowym następnie od tej wielkości odejmujemy sumę zaznaczonych kątów w sensie nieeuklidesowym.

Przykład

Na rysunku czerwonymi łukami zaznaczono wszystkie kąty figury wielokątnej.



Uwaga

Warto zauważyć, że defekt wypukłego n-kąta ma wartość: $\Delta(W) = (n-2) \cdot \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$. Gdzie $(n-2) \cdot \pi$ jest euklidesową sumą kątów n-kąta, natomiast $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ to nieeuklidesowa suma kątów. Przy czym $\alpha_i = 0 \quad i \in [1, n]$ dla wierzchołków idealnych.

Łatwo jest dowieść prawdziwości tego wzoru. Otóż każdą figurę wielokątną można podzielić na skończoną liczbę niezachodzących na siebie trójkątów zwykłych lub idealnych. Pole takiego wielokąta będzie równe sumie pól trójkątów. Pole jednego

trójkąta jest równe jego defektowi: π - nieeuklidesowa suma kątów trójkąta. Z geometrii euklidesowej wiemy, że mamy $n-2$ takie trójkąty (to minimalna liczba na jaką można podzielić wielokąt o n wierzchołkach). Nienieuklidesowa suma kątów wewnętrznych wszystkich trójkątów składa się na sumę kątów wewnętrznych n -kąta. Co dowodzi, że pole n -kąta jest równe jego defektowi.

Nie ma ogólnego wzoru na defekt figury wielokątnej, podobnego do powyższego wzoru na defekt n -kąta wypukłego. Nie jest łatwo znaleźć tę wielkość dla skomplikowanej figury wielokątnej jak w przypadku n -kąta ponieważ nie ma jasnego podziału na trójkąty (triangulacji). Z tego względu defekt definiujemy jako różnicę euklidesowej sumy kątów w reprezentacji figury w modelu nieeuklidesowym z nieeuklidesową sumą kątów.

W dalszych rozważaniach pracy okazały się pomocne następujące trzy fakty mówiące o własnościach defektu:

Fakt 2.2.13

Jeśli W rozkłada się na niezachodzące na siebie trójkąty T_1, T_2, \dots, T_k to:
 $\Delta(W) = \Delta(T_1) + \Delta(T_2) + \dots + \Delta(T_k)$.

dowód

Niech W rozkłada się na niezachodzące na siebie trójkąty T_1, T_2, \dots, T_k . Poszczególne defekty trójkątów T_i $i \in \{1, \dots, k\}$ są równe:

$$\begin{aligned} \Delta(T_1) &= \pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \\ \Delta(T_2) &= \pi - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \\ &\vdots \\ \Delta(T_k) &= \pi - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k) \end{aligned}$$

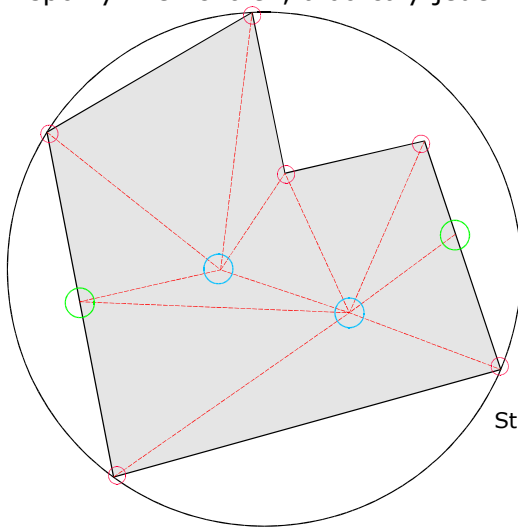
Jeśli dodamy te wielkości to otrzymamy:

$$\Delta(T_1) + \Delta(T_2) + \dots + \Delta(T_k) = k \cdot \pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) - \dots - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k).$$

Rozkład ma taką cechę, że dwa różne trójkąty są albo rozłączne albo mają jeden wspólny wierzchołek, albo cały jeden bok. Niech: b – liczba wierzchołków leżąca na

krawędziach figury wielokątnej;

s - liczba wierzchołków wewnętrznych.



Zauważmy, że suma miar kątów w trójkątach T_i , w wierzchołkach leżących na krawędziach figury wielokątnej jest równa $\pi \cdot b$, natomiast suma miar kątów w trójkątach T_i , leżących we wnętrzu figury wielokątnej jest równa: $2\pi \cdot s$. Zauważmy również, że nieeuklidesowa suma miar wszystkich kątów należących do trójkątów T_i jest równa:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \beta_1 + \dots + \beta_k + \gamma_1 + \dots + \gamma_k = \pi \cdot b + 2\pi \cdot s + \Sigma_n.$$

Gdzie Σ_n oznacza nieeuklidesową sumę miar kątów przyległych do wierzchołków figury wielokątnej.

$$\text{Skąd: } \Delta(T_1) + \dots + \Delta(T_k) = k\pi - b\pi - 2\pi \cdot s - \Sigma_n = \pi \cdot k - (b + 2s) \cdot \pi - \Sigma_n.$$

Kąt π ma taką samą miarę w geometrii nieeuklidesowej jak i euklidesowej, niezależnie od tego w jakim modelu figurę umieścimy. Rozważmy tę figurę, przy takiej samej triangulacji j.w. (czyli przy takim samym podziale na trójkąty) z punktu widzenia geometrii euklidesowej. Wiemy, że suma kątów w trójkącie w geometrii euklidesowej wynosi π . Ponieważ mamy podział na k trójkątów, więc suma wszystkich kątów należących do trójkątów T_i jest równa $k \cdot \pi$. Chcemy policzyć sumę wszystkich kątów tej figury wielokątnej więc od $k \cdot \pi$ musimy odjąć wszystkie kąty leżące na krawędziach figury wielokątnej oraz wszystkie kąty wewnętrzne. Stąd euklidesowa suma kątów wierzchołkowych tej figury będzie równa $\Sigma_e = \pi \cdot k - (b + 2s) \cdot \pi$.

Na mocy definicji 2.2.12 możemy więc stwierdzić, że:

$$\Delta(T_1) + \dots + \Delta(T_k) = k\pi - (b + 2s) \cdot \pi - \Sigma_n = \Sigma_e - \Sigma_n = \Delta(W)$$

Co kończy dowód faktu.

Fakt 2.2.14

Dla każdego trójkąta idealnego $\Delta(T) > 0$

dowód

Załóżmy nie wprost, że $\Delta(T) < 0$.

Wtedy na podstawie definicji 2.2.10 mamy, że $\Delta(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ gdzie $\alpha + \beta + \gamma$ oznacza nieeuklidesową sumę kątów. Zgodnie z założeniem

$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < 0$. Po przekształceniach otrzymamy następującą nierówność:
 $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Nierówność ta jest sprzeczna z faktem 2.1.4 (rozdział pierwszy),
 który mówi, że nieeuklidesowa suma kątów dla każdego trójkąta jest mniejsza niż
 π . Tym sposobem udowodniliśmy, że prawdą jest, że $\Delta(T) > 0$.

Fakt 2.2.15

Dla każdej figury wielokątnej $\Delta(W) > 0$

dowód

Każdą figurę wielokątną można podzielić na skończoną liczbę niezachodzących na siebie trójkątów: $W = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$. Zgodnie z faktem 2.2.13 defekt figury W wynosi $\Delta(W) = \Delta(T_1) + \Delta(T_2) + \dots + \Delta(T_k)$. Fakt 2.2.14 mówi, że $\Delta(T)$ jest wielkością nieujemną większą od zera. Skończona suma defektów trójkątów jest więc też wielkością nieujemną, co kończy dowód faktu.

Twierdzenie 2.2.16

Jeśli W jest dowolną figurą wielokątną o pewnej liczbie wierzchołków idealnych i pewnej liczbie wierzchołków właściwych to $P(W) = \Delta(W)$.

dowód

Każdą figurę wielokątną można podzielić na skończoną liczbę niezachodzących na siebie trójkątów:

$$W = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$$

Opierając się na AS (aksjomacie sumy) oraz na stwierdzeniu 2.2.1 możemy powiedzieć, że pole takiej figury wielokątnej to suma pól trójkątów:

$$P(W) = P(T_1) + P(T_2) + \dots + P(T_k)$$

Spróbujmy teraz wyznaczyć tę wielkość. Z twierdzenia 2.2.11 wiemy, że pole trójkąta jest równe jego defektowi, mamy więc:

$$\begin{aligned} P(T_1) &= \Delta(T_1) \\ P(T_2) &= \Delta(T_2) \\ &\vdots \\ P(T_k) &= \Delta(T_k) \end{aligned}$$

Skąd: $P(W) = \Delta(T_1) + \Delta(T_2) + \dots + \Delta(T_k)$. Pole figury wielokątnej będzie więc sumą defektów trójkątów na które została podzielona. Korzystając z faktu 2.2.13,

ponieważ W rozkłada się na niezachodzące trójkąty otrzymamy:

$P(W) = \Delta(T_1) + \Delta(T_2) + \dots + \Delta(T_k) = \Delta(W)$. Co kończy dowód twierdzenia.

CZĘŚĆ TRZECIA

Analiza teorii aksjomatycznej

Analiza teorii aksjomatycznej polega na zbadaniu niesprzeczności teorii (co czynię w rozdziale pierwszym) oraz sprawdzeniu niezależność aksjomatów (rozdział drugi). Wszystkie rozważania przeprowadzam opierając się na modelu Kleina.

ROZDZIAŁ I

Niesprzeczność teorii

W tym rozdziale badam niesprzeczność teorii pola dla figur na płaszczyźnie nieeuklidesowej. Układ aksjomatów (czyli teoria zbudowana na tych aksjomatach) jest niesprzeczny jeśli nie można z niego wyprowadzić stwierdzenia i jakiegoś stwierdzenia do niego przeciwnego. Niesprzeczności teorii można dowieść poprzez skonstruowanie funkcji, która spełnia wszystkie aksjomaty.

Szukamy funkcji $L: \{\text{figury wielokątne}\} \rightarrow \mathbb{R}$ która przypisuje figurom liczbę rzeczywistą. Niech $L(W) := \Delta(W)$. Gdzie $\Delta(W)$ zostało zdefiniowane w części drugiej (definicja 2.2.12) jako defekt.

Przy dowodzeniu, że $L(W) := \Delta(W)$ spełnia aksjomaty posłużymy się następującymi faktami pomocniczymi:

AKSJOMAT JEDNOSTKI

Sprawdzimy czy funkcja $L(W) := \Delta(W)$ spełnia aksjomat jednostki (AJ): *Dla pewnego ustalonego trójkąta idealnego T_0 jego pole wynosi π .*

Zgodnie z definicją funkcji L oraz z definicją defektu (definicja 2.2.10)

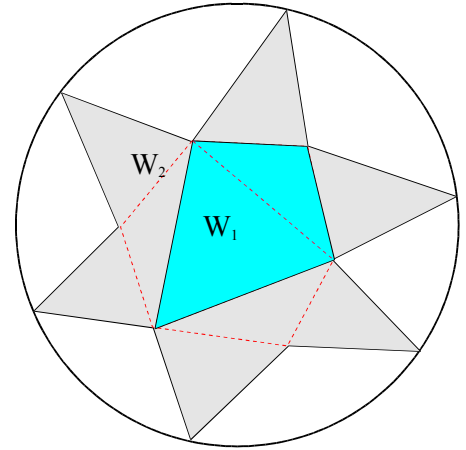
mamy, że $L(T_0) = \Delta(T_0) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \pi$ gdyż kąty w wierzchołkach idealnych są równe zeru, stad suma $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Wniosek: Funkcja L spełnia aksjomat jednostki.

AKSJOMAT MONOTONICZNOŚCI

Sprawdźmy czy funkcja $L(W) := \Delta(W)$ spełnia aksjomat monotoniczności (AM):
 Jeżeli $W_1 \subset W_2$ to $L(W_1) \leq L(W_2)$. Zrobimy to bez odwoływania się do pojęcia pola.

Każdą figurę wielokątną można podzielić na niezachodzące na siebie trójkąty. Niech W_1 i W_2 będą figurami wielokątnymi takimi, że $W_1 \subset W_2$ oraz $W_1 = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ i $W_2 = T_1 + \dots + T_k + \dots + T_n = W_1 + T_{k+1} + \dots + T_n$.



Zauważmy, że możliwy jest podział figury W_2 taki, że rozszerza on podział W_1 , tzn. że W_2 jest

podzielone w taki sposób, że część trójkątów podziału W_2 tworzy podział W_1 .

Wówczas z definicji funkcji $L(W)$ oraz z faktu 2.2.13 (rozdział drugi, część druga) mamy:

$$L(W_1) = L(T_1 + T_2 + \dots + T_k) = \Delta(T_1 + T_2 + \dots + T_k) = \Delta(T_1) + \Delta(T_2) + \dots + \Delta(T_k)$$

oraz

$$L(W_2) = L(T_1 + \dots + T_k + \dots + T_n) = \Delta(T_1 + \dots + T_k + \dots + T_n) = \Delta(T_1) + \dots + \Delta(T_k) + \dots + \Delta(T_n)$$

czyli $L(W_2) = L(W_1) + \Delta(T_{k+1}) + \dots + \Delta(T_n)$. Skąd ponieważ $\Delta(T) > 0$ dla trójkąta T (fakt 2.2.14), to $L(W_1) < L(W_2)$.

Wniosek: Funkcja L spełnia aksjomat monotoniczności.

AKSJOMAT SUMY

Sprawdźmy bez odwoływania się do pojęcia pola, czy funkcja $L(W) := \Delta(W)$ spełnia aksjomat sumy (AS):
 Jeżeli figura wielokątna W jest sumą niezachodzących na siebie figur wielokątnych W_1, W_2 to $L(W) = L(W_1) + L(W_2)$.

Niech W_1 i W_2 będą niezachodzącymi na siebie figurami wielokątnymi takimi, że $W = W_1 \cup W_2$. Podzielmy W_1 oraz W_2 na niezachodzące na siebie trójkąty zwykłe lub idealne: $W_1 = T_{11} + \dots + T_{1k}$, $W_2 = T_{21} + \dots + T_{2n}$.

Wtedy $W = W_1 \cup W_2 = T_{11} + \dots + T_{1k} + T_{21} + \dots + T_{2n}$.

Z faktu 2.2.13 oraz definicji funkcji L otrzymujemy:

$L(W_1) = L(T_{11} + T_{12} + \dots + T_{1k}) = \Delta(T_{11} + T_{12} + \dots + T_{1k}) = \Delta(T_{11}) + \Delta(T_{12}) + \dots + \Delta(T_{1k})$ oraz

$L(W_2) = L(T_{21} + \dots + T_{2n}) = \Delta(T_{21} + \dots + T_{2n}) = \Delta(T_{21}) + \dots + \Delta(T_{2k}) + \dots + \Delta(T_{2n})$. Suma

tych dwu wielkości to: $L(W_1) + L(W_2) = \Delta(T_{11}) + \dots + \Delta(T_{1k}) + \Delta(T_{21}) + \dots + \Delta(T_{2n})$.

$L(W)$ obliczamy korzystając również z faktu 2.2.13 oraz definicji funkcji:

$L(W) = L(W_1 \cup W_2) = \Delta(T_{11} + \dots + T_{1k} + T_{21} + \dots + T_{2n}) = \Delta(T_{11}) + \dots + \Delta(T_{1k}) + \Delta(T_{21}) + \dots + \Delta(T_{2n})$

Okazuje się, że zachodzi: $L(W) = L(W_1) + L(W_2)$.

Wniosek: $L(W)$ spełnia aksjomat sumy.

AKSJOMAT PRYZYSTAWANIA

Sprawdzimy czy funkcja $L(W) := \Delta(W)$ spełnia aksjomat przystawania (AP), tzn. sprawdzimy czy jeśli $W_1 \equiv W_2$ to $L(W_1) = L(W_2)$.

Jeśli $W_1 \equiv W_2$ to znaczy, że możemy jedną z tych figur rozciąć na skończoną ilość figur takich, że można z nich złożyć drugą (przystawanie przez rozkład). Jeśli rozetną W_1 na trójkąty zwykłe lub idealne $W_1 = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ tak by móc z nich złożyć W_2 , to $W_2 = T_1 + T_2 + \dots + T_k$. Wtedy po skorzystaniu z faktu 2.2.13 otrzymamy:

$$\begin{aligned} L(W_1) &= L(T_1 + T_2 + \dots + T_k) = \Delta(T_1 + T_2 + \dots + T_k) = \Delta(T_1) + \Delta(T_2) + \dots + \Delta(T_k) = \\ &= \Delta(T_1 + T_2 + \dots + T_k) = L(T_1 + T_2 + \dots + T_k) = L(W_2) \end{aligned}$$

Wniosek: $L(W)$ spełnia aksjomat przystawania.

PODSUMOWANIE

Okazało się, że funkcja $L(W) := \Delta(W)$ zdefiniowana jako defekt figury wielokątnej spełnia wszystkie aksjomaty teorii. Stąd wniosek: aksjomaty pola są niesprzeczne.

ROZDZIAŁ II

Niezależność aksjomatów

W tym rozdziale uwodnimy niezależność aksjomatów pola. Aksjomat niezależny to taki aksjomat, którego nie da się wyprowadzić logicznym rozumowaniem z pozostałych. Dowód przeprowadzimy konstruując funkcję, która spełnia wszystkie aksjomaty z wyjątkiem tego, którego niezależność dowodzimy.

NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATU JEDNOSTKI

Rozważmy funkcję $L_J(W) = 5 \cdot L(W)$, gdzie funkcja $L(W) := \Delta(W)$ została zdefiniowana w rozdziale drugim, części drugiej.

- Funkcja L_J nie spełnia AJ bo $L_J(T_0) = 5 \cdot L(T_0) = 5 \cdot \pi \neq \pi$

Pozostałe aksjomaty spełnione przez funkcję L_J :

- AM: Niech $W_1 \subset W_2$. Ponieważ $L(W)$ spełnia aksjomat monotoniczności to zachodzi $L(W_1) \leq L(W_2)$. Po obustronnym pomnożeniu nierówności przez pięć otrzymamy: $5 \cdot L(W_1) \leq 5 \cdot L(W_2)$ a więc $L_J(W_1) \leq L_J(W_2)$.

AM jest spełniony.

- AS: Z tego, że $L(W)$ spełnia AS wiemy, że: $L(W) = L(W_1) + L(W_2)$. Po obustronnym pomnożeniu nierówności przez pięć otrzymamy: $5 \cdot L(W) = 5 \cdot L(W_1) + 5 \cdot L(W_2)$. Skąd: $L_J(W) = L_J(W_1) + L_J(W_2)$.
- AP: Jeśli $W_1 \equiv W_2$ to $L(W_1) = L(W_2)$. Po obustronnym pomnożeniu nierówności przez pięć otrzymamy: $5 \cdot L(W_1) = 5 \cdot L(W_2)$. Skąd: $L_J(W_1) = L_J(W_2)$ więc AP jest spełniony.

Wniosek: Aksjomat jednostki jest niezależny od pozostałych.

NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATU SUMY

Rozważmy funkcję $L_S(W) = \frac{1}{\pi} \cdot L^2(W)$, gdzie funkcja $L(W) := \Delta(W)$ została zdefiniowana w rozdziale drugim, części drugiej.

- Sprawdźmy czy L_S spełnia AS. Wykorzystując definicję L , fakt 3.3.1 oraz to, że $L(W)$ spełnia AS policzymy $L_S(W)$:

$$L_S(W) = \frac{1}{\pi} \cdot L^2(W_1 \cup W_2) = \frac{1}{\pi} \cdot (\Delta(W_1) + \Delta(W_2))^2 = \frac{1}{\pi} \cdot (\Delta(W_1)^2 + 2 \cdot \Delta(W_1) \cdot \Delta(W_2) + \Delta(W_2)^2)$$

Podobnie znajdujemy wartości $L_S(W_1)$, $L_S(W_2)$:

$$L_S(W_1) = \frac{1}{\pi} \cdot L^2(W_1) = \frac{1}{\pi} \cdot \Delta(W_1)^2$$

$$L_S(W_2) = \frac{1}{\pi} \cdot L^2(W_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \Delta(W_2)^2$$

Otrzymamy stąd: $L_S(W) = L_S(W_1) + L_S(W_2) + 2 \cdot \Delta(W_1) \cdot \Delta(W_2)$.

Zauważmy, że $\Delta(W_1) > 0$ oraz $\Delta(W_2) > 0$ (fakt 2.2.15). Czyli na podstawie powyższych rozważań dochodzimy do wniosku, że $L_S(W_1 \cup W_2) \neq L_S(W_1) + L_S(W_2)$.

Więc $L_S(W)$ nie spełnia AS.

Pozostałe są spełnione przez L_S :

- AJ: Wykorzystując definicję defektu trójkąta idealnego, oraz to, że $L(W)$ spełnia aksjomat jedności otrzymamy:

$$L_S(T_0) = \frac{1}{\pi} \cdot L^2(T_0) = \frac{1}{\pi} \cdot (\Delta(T_0))^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = \pi.$$

- AM: Niech $W_1 \subset W_2$. Ponieważ $L(W)$ spełnia aksjomat monotoniczności to zachodzi $L(W_1) \leq L(W_2)$ przy założeniu, że $L(W_i) \geq 0$. Po obustronnym podniesieniu nierówności do kwadratu i pomnożeniu otrzymanych wartości

obustronnie przez $\frac{1}{\pi}$ otrzymamy: $(L(W_1))^2 \leq (L(W_2))^2$ skąd dostajemy

$$\frac{1}{\pi} \cdot (L(W_1))^2 \leq \frac{1}{\pi} \cdot (L(W_2))^2 \text{ i ostatecznie } L_J(W_1) \leq L_J(W_2).$$

AM jest spełniony.

- AP: Jeśli $W_1 \equiv W_2$ to $L(W_1) = L(W_2)$. Po obustronnym podniesieniu nierówności do kwadratu $(L(W_1))^2 = (L(W_2))^2$ i pomnożeniu otrzymanych

wartości obustronnie przez $\frac{1}{\pi}$ otrzymamy $\frac{1}{\pi} \cdot (L(W_1))^2 = \frac{1}{\pi} \cdot (L(W_2))^2$ skąd:

$L_J(W_1) = L_J(W_2)$ więc AP jest spełniony.

Wniosek: Aksjomat sumy jest niezależny od pozostałych.

NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATU PRYZYSTAWANIA

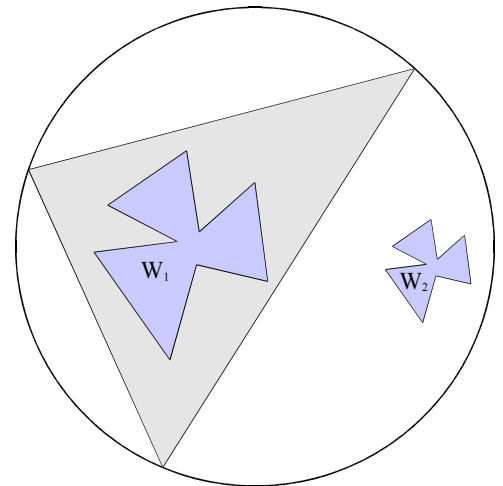
Niech T_0 będzie ustalonym trójkątem idealnym o trzech wierzchołkach idealnych (tym, który występuje w aksjomacie jednostki). Rozważmy funkcję $L_p(W) = L(W \square T_0)$ gdzie funkcja $L(W) := \Delta(W)$ została zdefiniowana w rozdziale drugim, części drugiej. Przy czym wynikiem operacji $W \square T_0$ jest maksymalna figura wielokątna zawarta w przekroju $W_1 \cap T_0$. Przy czym jeśli $W_1 \cap T_0$ ma puste wnętrze przyjmujemy, że $W \square T_0 = \emptyset$. Dodatkowo $L_p(\emptyset) = 0$.

- Sprawdźmy teraz czy L_p spełnia AP. Weźmy dwie figury wielokątne W_1 oraz W_2 takie, że $W_1 \equiv W_2$ oraz W_1 w całości zawiera się w T_0 natomiast W_2 jest z nim rozłączny. Wtedy $W_2 \square T_0 = \emptyset$.

$$L_p(W_1) = L(W_1 \square T_0) = \Delta(W_1 \square T_0) \text{ oraz}$$

$$L_p(W_2) = L(W_2 \square T_0) = L(\emptyset) = 0.$$

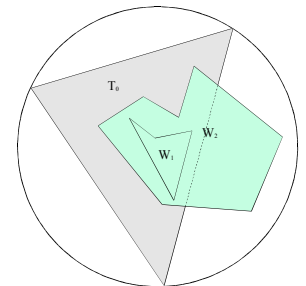
Ponieważ $(W_1 \square T_0) \neq \emptyset$ oraz to defekt figury wielokątnej $\Delta(W_1 \square T_0) > 0$ (fakt 2.2.15). Stąd wniosek, że $W_1 \equiv W_2$ ale $L_p(W_1) \neq L_p(W_2)$ więc aksjomat przystawania nie jest spełniony.



Pozostałe aksjomaty są spełnione przez funkcje L_p :

- AJ: Spełnione bo: $L_p(T_0) = L(T_0 \cap T_0) = L(T_0) = \Delta(T_0) = \pi$
- AM: Niech $W_1 \subset W_2$. Wtedy $W_1 \cap T_0 \subset W_2 \cap T_0$ a więc również $W_1 \square T_0 \subset W_2 \square T_0$. Czyli $L(W_1) \leq L(W_2)$ oraz $L(W_1 \cap T_0) \leq L(W_2 \cap T_0)$ więc $L(W_1 \square T) \leq L(W_2 \square T_0)$.

Ostatecznie $L_p(W_1) \leq L_p(W_2)$. AM jest spełniony.



- AS: Niech W będzie sumą niezachodzących na siebie figur wielokątnych W_1, W_2 . Sprawdźmy czy L_p spełnia AS. Wykorzystując definicje L oraz to, że L spełnia AS policzymy L_p :

Nietrudno zauważyć, że zachodzi równość:

$$(W_1 \cup W_2) \square T_0 = (W_1 \square T_0) \cup (W_2 \square T_0).$$

Policzmy wartość $L_S(W)$:

$$L_S(W) = L_S(W_1 \cup W_2) = L((W_1 \cup W_2) \square T_0) = L((W_1 \square T_0) \cup (W_2 \square T_0)).$$

$$\text{Czyli } L_S(W) = L(W_1 \square T_0) + L(W_2 \square T_0).$$

Podobnie znajdujemy wartości $L_S(W_1), L_S(W_2)$:

$$L_S(W_1) = L(W_1 \square T_0)$$

$$L_S(W_2) = L(W_2 \square T_0)$$

$$\text{oraz: } L_S(W_1) + L_S(W_2) = L(W_1 \square T_0) + L(W_2 \square T_0).$$

Mamy więc, że $L_S(W_1 \cup W_2) = L_S(W_1) + L_S(W_2)$. Więc L_S spełnia AS.

Wniosek: Aksjomat przystawania jest niezależny od pozostałych.

NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATU MONOTONICZNOŚCI

Skonstruujemy funkcję $H: W \rightarrow R$ (gdzie W to zbiór wszystkich figur wielokątnych, R to zbiór liczb rzeczywistych), która spełnia trzy aksjomaty: AJ, AS, AP ale nie spełnia AM.

Wykorzystamy istnienie funkcji: $f: R \rightarrow R$ mającej następujące własności:

$$(1) \forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{q \in Q} f(qx) = q \cdot f(x)$$

$$(2) \forall_{x, y \in \mathbb{R}} f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(3) \forall_{q \in Q} f(\pi \cdot q) = \pi \cdot q$$

$$(4) f \text{ nie jest tożsamościowa}$$

Istnienie takiej funkcji f wynika z możliwości potraktowania zbioru liczb rzeczywistych jako przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb wymiernych Q .

Mając daną funkcję $f(x)$ jak wyżej, funkcję $H(W)$ definiujemy jako: $H(W) := f(L(W))$. Gdzie funkcja $L(W)$ została zdefiniowana w rozdziale poprzednim.

Sprawdzimy czy $H(W)$ spełnia AJ, AS, AP:

- AJ: $H(W)$ spełnia AJ bo dla pewnego ustalonego trójkąta idealnego T_0 , z własności (3) funkcji $f(x)$ mamy: $H(T_0) = f(L(T_0)) = f(\pi) = \pi$. Zatem $H(W)$ spełnia AJ.
- AS: Niech W będzie figurą wielokątną będącą sumą niezachodzących na siebie figur wielokątnych W_1 oraz W_2 . Wtedy: $H(W) = f(L(W)) = f(L(W_1 \cup W_2)) = f(L(W_1) + L(W_2))$. Z tego, że $L(W)$ spełnia AS oraz z własności drugiej funkcji $f(x)$ mamy: $f(L(W_1) + L(W_2)) = f(L(W_1)) + f(L(W_2))$. Ponieważ: $H(W_1) + H(W_2) = f(L(W_1)) + f(L(W_2))$ to znaczy, że AS jest spełniony bo: $H(W) = H(W_1) + H(W_2)$.
- AP: Wiemy, że $L(W_1) = L(W_2)$. Zatem:

$$H(W_1) = f(L(W_1)) = f(L(W_2)) = H(W_2).$$

Stąd wniosek, że $H(W)$ spełnia AP.

- AM:
 Uzasadnienie, że $H(W)$ nie spełnia AM wymaga wyprowadzenia wcześniej następującego faktu:

Fakt 3.3.1

Istnieją liczby rzeczywiste y, z takie, że $0 < y < z$ oraz $f(y) > f(z)$.

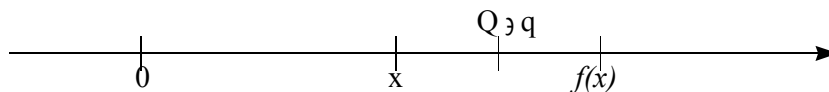
dowód

Niech x będzie taką liczbą rzeczywistą, że $f(x) \neq x$ oraz $x \in R$. Taka liczba istnieje dzięki temu, że funkcja f nie jest tożsamościowa (spełnia własność (4)). Możemy przyjąć, że $x > 0$. Jeśli $x < 0$ to zamiast x bierzemy liczbę przeciwną do niego, czyli $-x$, wtedy $f(-x) = f((-1) \cdot x) = -1 \cdot f(x) = -f(x)$ i równocześnie $f(-x) \neq -x$. Rozważmy dwa przypadki w zależności od tego czy $f(x) > x$.

A) Załóżmy, że $f(x) > x$. Niech $a = q \cdot \pi$, gdzie $q \in Q$, będzie taką liczbą, że $x < a < f(x)$. Zauważmy, że takie a istnieje ponieważ istnieje

q spełniające: $\frac{x}{\pi} < q < \frac{f(x)}{\pi}$ (bo $q \in Q$). Wtedy $x < q \cdot \pi < f(x)$. Niech

$a > x$ oraz $a < f(x)$. Ponieważ $f(a) = a$ z własności (3) funkcji f to $f(a) < f(x)$.

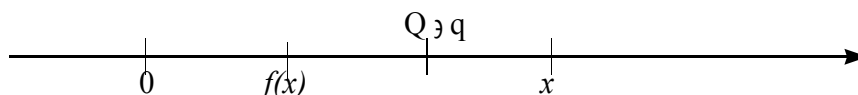


Wtedy przyjmujemy $y = x$, $z = a$.

B) Załóżmy, że $f(x) < x$. Niech $a = q \cdot \pi$, gdzie $q \in \mathcal{Q}$, będzie taką liczbą, że $x > a > f(x)$. Zauważmy, że takie a istnienie ponieważ istnieje

q spełniające: $\frac{x}{\pi} > q > \frac{f(x)}{\pi}$ (bo $q \in \mathcal{Q}$). Niech $a < x$ oraz $a > f(x)$.

Ponieważ $f(a) = a$ z własności funkcji $f(x)$ to $f(a) > f(x)$.



Wtedy przyjmujemy $y = x$, $z = a$.

Z powyższych obliczeń wynika, że dla funkcji f istnieją liczby y, z , że $0 < y < z$ oraz $f(y) > f(z)$.

c. n. u.

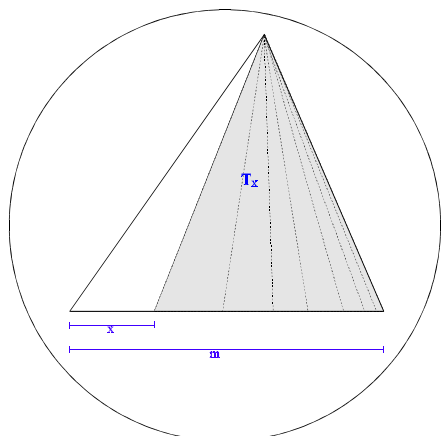
Jeśli $0 < y < z$ i $f(y) > f(z)$ to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy: $0 < \frac{y}{n} < \frac{z}{n}$

i $f(\frac{y}{n}) > f(\frac{z}{n})$. Pierwsza nierówność jest prawdziwa gdyż podzielenie y oraz z przez dowolną liczbę naturalną nie zmieni ich porządku na osi. Przyjrzyjmy się drugiej nierówności. Skorzystamy teraz z własności (1),

mamy, że $f(\frac{y}{n}) = f(1 \cdot \frac{y}{n}) = \frac{1}{n} \cdot f(y)$ i podobnie $f(\frac{z}{n}) = f(1 \cdot \frac{z}{n}) = \frac{1}{n} \cdot f(z)$.

Skąd wynika druga nierówność $f(\frac{y}{n}) > f(\frac{z}{n})$.

Szukamy W i V takich, że $L(W) = \frac{y}{n}$ i $L(V) = \frac{z}{n}$ oraz $W \subset V$.



Niech T to dowolny trójkąt z wyróżnionym bokiem długości m . Wtedy $T(x) \subset T$ w taki sposób, że jego dwa ramiona pokrywają się z trójkątem T , natomiast trzecie leży we wnętrzu T . (Jak na rysunku.)

Konstruujemy funkcję $h(x)$ taką, że: $h(x) = \Delta(T(x))$.

Funkcja $h(x)$ ma następujące własności:

- jest ciągła
- jest malejąca
- jest określona na przedziale $[0, m)$
- $\lim_{x \rightarrow L} h(x) = 0$

Możemy rozszerzyć funkcję h o wartość: $h(m) = 0$ tak by funkcja była ciągła na całym odcinku $[0, m]$.

Wybermy tak małe n , że: $0 < \frac{y}{n} < \frac{z}{n} < L(T)$.

Z własności (4) funkcji f istnieją a, b takie, że $0 < a < b < m$.

Wtedy $h(b) = L(T(b)) = \frac{y}{n}$ oraz $h(a) = L(T(a)) = \frac{z}{n}$.

Zauważmy, że skoro $a < b$ to odpowiadające tym parametrom trójkąty $T(b)$, $T(a)$ spełniają własność $T(b) \subset T(a)$.

Okazuje się więc, że można znaleźć takie figury idealne $W = T(b)$ i $V = T(a)$, że $T(b) \subset T(a)$ i $f(T(b)) > f(T(a))$.

Dzięki własności Darboux funkcji ciągłej h oraz monotoniczności tej funkcji

możemy stwierdzić, że: $H(W) = f(L(W)) = f(\frac{y}{n})$, $H(V) = f(L(V)) = f(\frac{z}{n})$.

Czyli $W \subset V$ a jednocześnie $H(V) < H(W)$. Funkcja $H(W)$ nie spełnia AM, co dowodzi niezależności tego aksjomatu.

PODSUMOWANIE

Wszystkie aksjomaty pola są niezależne. Dowody na niesprzeczność teorii oraz niezależność aksjomatów zostały przeprowadzone bez odwoływania się do pojęcia pola.

Bibliografia

1. „*O geometrii dla postronnych*” - M. Kordos, L. Włodarski
2. „*Historia filozofii*” - Władysław Tatarkiewicz
3. „*Femme fatale*” – Witold Sadowski
4. Internet