

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: analiza danych

Maria Ressel

Dowód lematu z listu Coxetera do Eschera

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2021

Spis treści

Wstęp	3
1. Okręgi ortogonalne	4
2. Model dyskowy Poincarégo	7
3. Korespondencja Coxetera z Escherem	12
4. Dowód lematu	16
Bibliografia	22

Wstęp

Głównym celem tej pracy jest przedstawienie elementarnego dowodu lematu z listu Harolda Scotta Coxetera do Mauritsa Cornelisa Eschera. Do zrozumienia go wystarczy znać twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, co sprawia, że całe rozumowanie jest przystępne dla uczniów liceum oraz studentów. Twierdzenie to brzmi następująco:

Twierdzenie: *Jeśli mamy okrąg C o środku w punkcie O i promieniu R oraz różny od O punkt A wewnątrz okręgu, to środki okręgów ortogonalnych do okręgu C , przechodzących przez A , będą leżały na prostej nieprzecinającej C .*

Przed przedstawieniem powyższego twierdzenia, czytelnik w pierwszym rozdziale może zapoznać się z elementami niezbędnymi do przeprowadzenia dowodu, a w kolejnych dwóch rozdziałach poznaje jego kontekst.

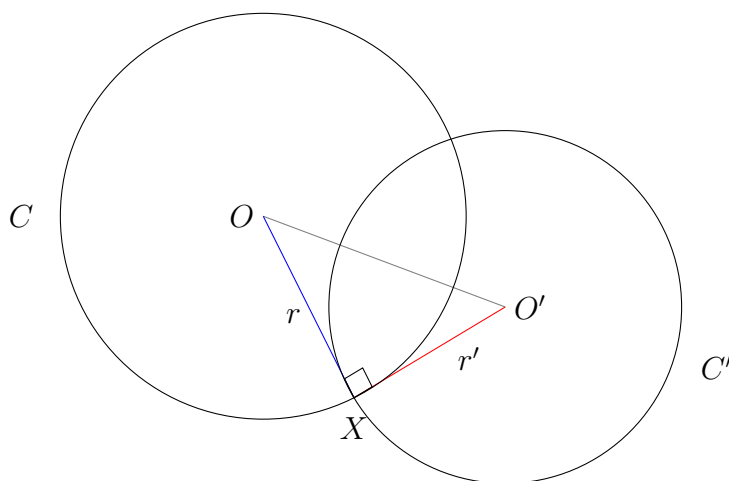
W pierwszym rozdziale przedstawiona jest definicja okręgów ortogonalnych oraz ich podstawowe cztery własności. W rozdziale drugim czytelnik może zapoznać się z pojęciem geometrii nieeuklidesowej oraz dowiedzieć się, czym różni się ona od geometrii euklidesowej. W tym rozdziale jest także przedstawiony model dyskowy Poincarégo oraz wyznaczanie w tym modelu punktów, prostych, odcinków oraz pęków prostych. W tym rozdziale jest też wyjaśnione, jakie znaczenie ma powyższe twierdzenie w kontekście geometrii nieeuklidesowej. W trzecim rozdziale przybliżona zostaje postać M. C. Eschera, jego prace oraz inspiracje czerpane z matematyki. Znajduje się tu również opis korespondencji Eschera z Coxeterem oraz pierwszy raz przedstawione jest główne twierdzenie. Na rozdział czwarty składają się przeprowadzony dowód tego twierdzenia oraz twierdzenia do niego odwrotne.

1. Okręgi ortogonalne

Przed przejściem do meritum tej pracy zapoznamy się z tym, czym są okręgi ortogonalne oraz jakie są ich własności.

Definicja 1.1. Dwa przecinające się okręgi są *ortogonalne (prostopadłe)*, gdy w punktach ich przecięcia styczne przecinają się pod kątem prostym (patrz [1]). Jest to równoważne z tym, że w punkcie przecięcia okręgów kąt tworzony między promieniami poprowadzonymi do tego punktu jest prosty.

Na Rysunku 1.1 znajdują się prostopadłe okręgi C i C' o środkach i promieniach odpowiednio O, O' oraz r, r' .



Rysunek 1.1: Ortogonalne okręgi C, C' .

Wszystkie przedstawione poniżej własności oraz ich dowody zostaną zaprezentowane dla dowolnych okręgów ortogonalnych C i C' odpowiednio o środkach w punktach O i O' oraz promieniach r i r' . Szczególną cechą takich okręgów jest to, że styczna jednego okręgu przechodzi przez środek drugiego, z czego wynika następująca własność:

Własność 1.2. *Okręgi C i C' są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy suma kwadratów długości ich promieni jest równa kwadratowi odległości między ich środkami:*

$$C, C' \text{ są ortogonalne} \iff r^2 + r'^2 = |OO'|^2.$$

Ta własność wynika bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa oraz z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa - promienie są przyprostokątnymi, a odcinek między środkami okręgów przeciwprostokątną.

Własność 1.2. to kluczowa cecha okręgów ortogonalnych, na której będziemy się opierać przez większość tej pracy. Wynikają z niej także trzy dodatkowe, pomocnicze własności, które sformułujemy i udowodnimy poniżej.

Własność 1.3. *Żaden okrąg prostopadły do okręgu C nie przechodzi przez jego środek.*

Dowód: Wynika to bezpośrednio z równości z Własności 1.2.

Równość $r^2 + r'^2 = |OO'|^2$ oznacza, że $r'^2 = |OO'|^2 - r^2$, a ponieważ $r > 0$, to $r'^2 < |OO'|^2$. Ostatecznie otrzymujemy

$$r' < |OO'|.$$

Promień r' jest mniejszy od odległości między środkami, z czego wynika, że okrąg C' nie przechodzi przez środek okręgu C . \square

Własność 1.4. *Każdy okrąg prostopadły do C ma środek na zewnątrz C .*

Dowód: Udowodnimy to w analogiczny sposób, co Własność 1.3, tutaj jednak będziemy opierać się na oszacowaniach dla promienia r . Z Własności 1.2 mamy, że $r^2 = |OO'|^2 - r'^2$. Długość promienia r' jest większa od 0, z czego wynika, że $r^2 < |OO'|^2$, czyli otrzymujemy

$$r < |OO'|.$$

Promień r jest mniejszy od odległości między środkami, z czego wynika, że O' znajduje się na zewnątrz okręgu C . \square

Własność 1.5. *Jeżeli punkt O' leży na zewnątrz okręgu C , to O' jest środkiem dokładnie jednego okręgu ortogonalnego do C .*

Dowód: Szukamy zatem ortogonalnego do C okręgu C' o środku w punkcie O' . Niech r' będzie jego promieniem. Pokażemy, że r' wylicza się jednoznacznie.

Do wyznaczenia promienia użyjemy dobrze nam już znanej równości z Własności 1.2, z której wynika, że $r^2 + r'^2 = |OO'|^2$. Otrzymujemy z niej $r' = \sqrt{|OO'|^2 - r^2}$.

Zauważmy, że skoro O' znajduje się na zewnątrz C , to wartość pod pierwiastkiem jest zawsze dodatnia. Odległość $|OO'|$ oraz długość r są z góry zadane, więc powyższa równość jednoznacznie wyznacza r' - wynika stąd, że istnieje dokładnie jeden prostopadły do C okrąg o środku O' . \square

Własność 1.5, wraz z Własnością 1.4, możemy także zinterpretować w nieco inny sposób - wskazują one na istnienie wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między punktami na zewnątrz danego okręgu a środkami okręgów ortogonalnych do tego okręgu. Oznacza to, że dla danego okręgu punkt na zewnątrz niego wyznacza okrąg do niego ortogonalny, a okrąg ortogonalny wyznacza punkt na zewnątrz danego okręgu.

2. Model dyskowy Poincarégo

Skoro wiemy już, czym są okręgi ortogonalne oraz jakie są ich szczególne cechy, w tym rozdziale zapoznamy się z pojęciem geometrii nieeuklidesowej oraz sposobem przedstawiania jej za pomocą tzw. modelu dyskowego Poincarégo. Aby lepiej zrozumieć te pojęcia, musimy cofnąć się do początków geometrii.

Za ojca geometrii powszechnie uznaje się Euklidesa z Aleksandrii, greckiego matematyka żyjącego w IV i III wieku p.n.e. Około roku 300 p.n.e. napisał on swoje najbardziej znane dzieło - „*Elementy*”, czyli najstarszy znany nam wykład z zakresu geometrii oraz arytmetyki, w którym przedstawił całą ówczesnie znaną Grekom wiedzę za pomocą aksjomatów oraz dedukcji. Jest to pierwszy znany tekst opracowany metodą aksjomatyczną, czyli przez postulowanie pojęć pierwotnych i wykorzystywanie ich w dowodzeniu, który mimo odkrytych wieki później luk miał niewątpliwie ogromny wpływ na rozwój geometrii jako nauki (więcej w [2]).

Za najważniejszy fragment uznaje się przedstawienie pięciu aksjomatów w księdze I, na których Euklides opierał całe swoje dalsze rozumowanie. Brzmia one następująco (patrz [3]):

- I. Można poprowadzić prostą od dowolnego punktu do innego dowolnego punktu.
- II. Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.
- III. Z dowolnego punktu można zaznaczyć okrąg o dowolnym promieniu.
- IV. Wszystkie kąty proste są równe.
- V. Jeśli punkt A nie leży na prostej m , to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A i nieprzecinająca m .

Definicja 2.1. *Geometria euklidesowa* to geometria spełniająca aksjomaty I-V.

Ostatni postulat nazywany jest **aksjomatem równoległości**. Zauważmy, że wyróżnia się on spośród pozostałych postulatów - jest to jedyny aksjomat odnoszący się do całej prostej, pozostałe odnoszą się do jej ograniczonej części lub figur geometrycznych. Przez setki lat matematycy próbowali udowodnić jego prawdziwość z użyciem pozostałych aksjomatów, a gdy to nie dawało żadnych rezultatów, powstało pytanie, czy jest on prawdziwy oraz co stanie się po użyciu w zamian jego negacji. Badania te doprowadziły do powstania nowej gałęzi geometrii, czyli geometrii nieeuklidesowej, zwanej obecnie hiperboliczną. Różnica między nią a

geometrią euklidesową polega na tym, że V aksjomat zastępowany jest aksjomatem Łobaczewskiego, nazwanym od nazwiska odkrywcy geometrii nieeuklidesowej Nikołaja Łobaczewskiego.

Aksjomat Łobaczewskiego: dla pewnego punktu A nieleżącego na prostej m istnieją co najmniej dwie różne proste m_1, m_2 przechodzące przez A i rozłączne z m .

Definicja 2.2. *Geometria hiperboliczna* to geometria spełniająca aksjomaty I-IV oraz aksjomat Łobaczewskiego.

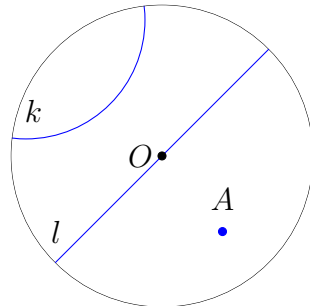
Definicja 2.3. Dowolny zbiór punktów wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną, spełniający aksjomaty I-IV oraz aksjomat Łobaczewskiego nazywamy *modelem płaszczyzny hiperbolicznej*.

Geometrię euklidesową poznaliśmy w pierwszych latach edukacji, mamy do czynienia z nią na co dzień i jest ona dla nas najbardziej naturalna. Geometria hiperboliczna jest nieco mniej intuicyjna, trudniej też przedstawić opisywaną przez nią płaszczyznę. Jednym z najczęściej przywoływanych modeli jest odkryty w 1882 roku i nazwany od nazwiska twórcy **model dyskowy Poincarégo**.

Płaszczyzna jest na nim przedstawiona jako wnętrze jednostkowego okręgu \mathbb{D} (patrz [4]):

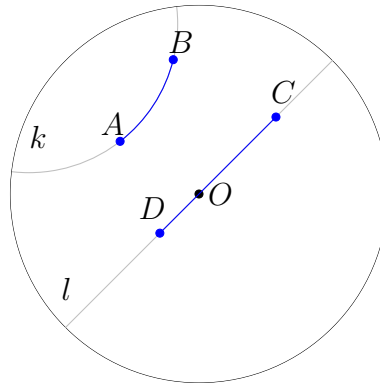
$$\mathbb{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Narysujmy okrąg C o promieniu 1 jak na Rysunku 2.1. Będziemy na nim zaznaczać różne elementy geometryczne, aby lepiej przybliżyć taki sposób przedstawiania geometrii hiperbolicznej. Punkty na płaszczyźnie nieeuklidesowej zaznacza się tak samo jak na euklidesowej. Na Rysunku 2.1 zaznaczony jest punkt A . Nieco inaczej przedstawia się proste - są one zaznaczane na płaszczyźnie jako dowolne średnice okręgu C lub jako łuki wewnątrz C dowolnych okręgów ortogonalnych do C . Zaznaczmy więc na Rysunku 2.1 prostą l przechodzącą przez środek O okręgu C oraz fragment k okręgu ortogonalnego do C , który także jest prostą w tym modelu.



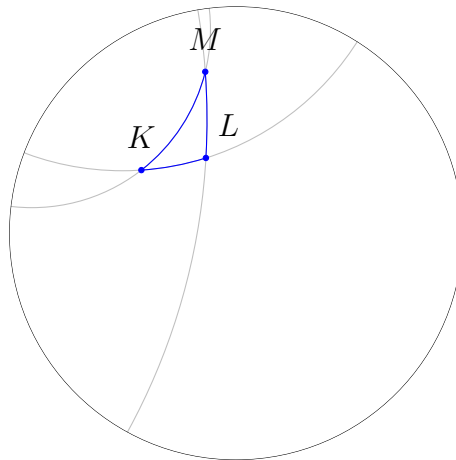
Rysunek 2.1: Proste k i l w modelu dyskowym Poincarégo.

W analogiczny sposób wyznaczamy w tym modelu odcinki, czyli fragmenty prostych między dwoma różnymi punktami. Skoro wiemy już, jak zaznacza się punkty oraz proste w naszym modelu płaszczyzny nieeuklidesowej, połączmy te dwa elementy - przerysujmy Rysunek 2.1 ponownie jako Rysunek 2.2 i zaznaczmy na nim odcinki na prostych l i k .



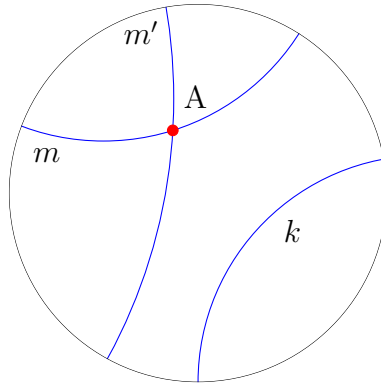
Rysunek 2.2: Odcinki AB i CD w modelu dyskowym Poincarégo.

Dowolne wielokąty wyznaczamy analogicznie jak na płaszczyźnie euklidesowej - rysujemy odcinki między punktami przecięcia prostych. Poniżej znajduje się Rysunek 2.3, na którym w okręgu C jest narysowany przykładowy nieeuklidesowy trójkąt o wierzchołkach K, L, M .



Rysunek 2.3: Trójkąt o wierzchołkach K, L i M w modelu dyskowym Poincarégo.

Skoro wiemy, jak wyglądają proste, możemy przejść do pokazania, że aksjomat Łobaczewskiego zachodzi na rozważanej płaszczyźnie. Wykonamy w tym celu kolejny rysunek - narysujmy jednostkowy modelowy okrąg C i zaznaczmy w jego wnętrzu prostą k . Następnie narysujmy 2 okręgi ortogonalne do C , takie że przecinają się wewnątrz C i nie przecinają się z k . Zaznaczmy punkt ich przecięcia czerwonym kolorem i nazwijmy go A . Łuki powyższych ortogonalnych do C okręgów, które znajdują się wewnątrz C , nazwijmy m i m' oraz zaznaczmy je na niebiesko. Wszystkie omówione elementy możemy zobaczyć na poniższym Rysunku 2.4.



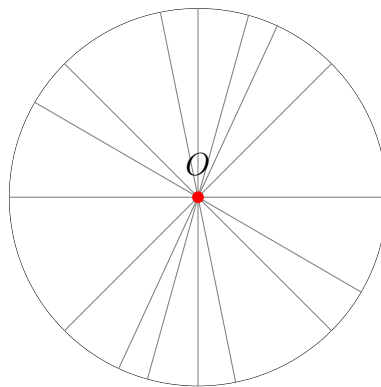
Rysunek 2.4: Proste m, m' przecinające się w punkcie A oraz prosta k w modelu dyskowym Poincarégo.

Rysunek 2.4 idealnie obrazuje spełnianie aksjomatu Łobaczewskiego na płaszczyźnie nieeuklidesowej - obie proste m i m' przecinają się w punkcie A , a przy tym nie mają z prostą k żadnych punktów przecięcia.

Skoro poznaliśmy już obie możliwości przedstawienia prostych w tym modelu, możemy zadać sobie pytanie, jak wygląda w nim pęk prostych.

Definicja 4.4. *Pęk prostych* to nieskończony zbiór prostych przechodzących przez ustalony punkt.

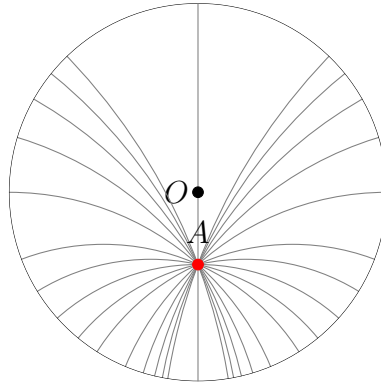
W modelu dyskowym musimy rozważać dwa rodzaje punktów. Zaczniemy od środka O okręgu C tworzącego model. Z Własności 1.3. wiemy, że żaden okrąg prostopadły do okręgu C nie przechodzi przez jego środek, czyli jedyne proste, które przechodzą przez środek C to jego średnice. Jest to pokazane na poniższym Rysunku 2.5.



Rysunek 2.5: Proste przechodzące przez środek O w modelu dyskowym Poincarégo.

Rozważmy teraz drugi rodzaj punktów, czyli wszystkie punkty wewnątrz okręgu C inne od środka O . Przez ustalony punkt A wewnątrz C przechodzi nieskończenie wiele okręgów ortogonalnych C , ale aby otrzymać pęk prostych w A musimy do

łuków tych okręgów ortogonalnych dodać średnicę okręgu C , która przechodzi przez A . Istnieje dokładnie jedna taka średnica. Przykładowe proste w modelu dyskowym Poincarégo przechodzące przez punkt A są zobrazowane na Rysunku 2.6.



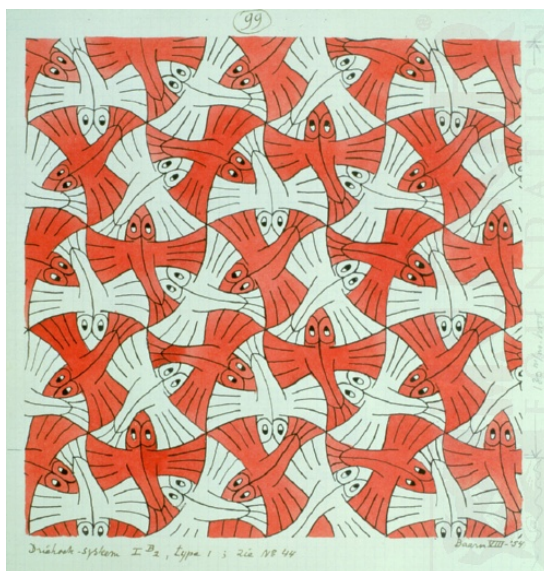
Rysunek 2.6: Proste przechodzące przez punkt A w modelu dyskowym Poincarégo.

Zauważmy, że do konstrukcji okręgów, których łuki stanowią pęk taki jak na Rysunku 2.6, przydatne jest główne twierdzenie omawiane w tej pracy. Zgodnie z nim te okręgi mają środki na pewnej prostej k nieprzecinającej modelowego okręgu C . Mając tę prostą k , łatwo nakreślić łuki okręgów stanowiące proste z tego pęku.

Skoro wiemy już, czym są okręgi prostopadłe oraz jak łączą się one z modelem dyskowym Poincarégo, przejdźmy do meritum i zapoznajmy się z głównym przedmiotem tej pracy, czyli lematem z listu Coxetera do Eschera.

3. Korespondencja Coxetera z Escherem

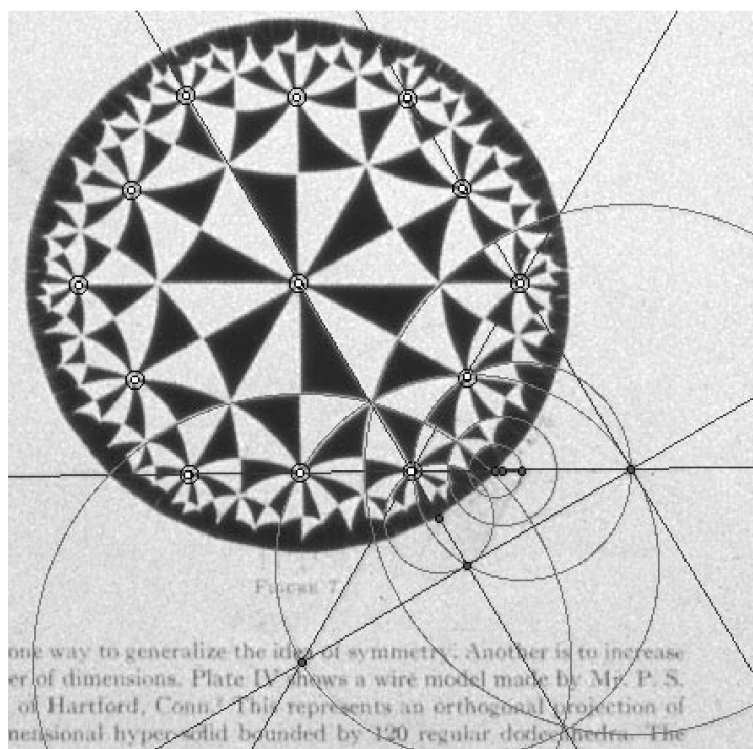
Matematyka od lat fascynuje nie tylko umysły ścisłe, ale także artystów. Zwłaszcza geometria, jako najbardziej przystępna wizualnie gałąź matematyki, inspirowała wielu twórców. Jednym z najczęściej wymienianych jest holenderski malarz i grafik Maurits Cornelis Escher. Do najbardziej charakterystycznych jego prac należą parkietaże, czyli płaszczyzny pokryte wielokątami, które nie zachodzą na siebie. Poniżej znajduje się jeden ze szkiców takiego parkietażu, na którym płaszczyzna pokryta jest dwukolorowymi rybami (więcej na oficjalnej stronie [5]).



Rysunek 3.1: Szkic parkietaża wykonany przez M.C Eschera.

Początkowo mało który matematyk znał twórczość Eschera, zmieniło się to jednak za sprawą Międzynarodowego Kongresu Matematyków zorganizowanego w 1954 r. w Amsterdamie. Podczas wydarzenia zorganizowano wystawę jego prac i pokazano szerokiej publiczności między innymi rzeźbione kule oraz rysunki związane z symetrią. Jednym z uczestników kongresu był Harold Scott Coxeter, kanadyjski matematyk specjalizujący się w geometrii. Po powrocie do Kanady napisał do Eschera list, w którym wyraził uznanie dla jego prac. Trzy lata później odezwał się do Holendra ponownie, tym razem z prośbą o wykorzystanie rysunków Eschera w artykule o symetrii na płaszczyźnie euklidesowej, w modelu dyskowym Poincarégo oraz na powierzchni kuli. Escher zgodził się bez wahania, a po otrzymaniu gotowego artykułu odpisał Coxeterowi, że „niektóre ilustracje w tekście, zwłaszcza rysunek 7 na stronie 11, wywołały we mnie spory szok” ([7] str. 712). Rekonstrukcja tego

rysunku wraz z zaznaczonymi przez artystę punktami oraz prostymi znajduje się poniżej na Rysunku 3.2.

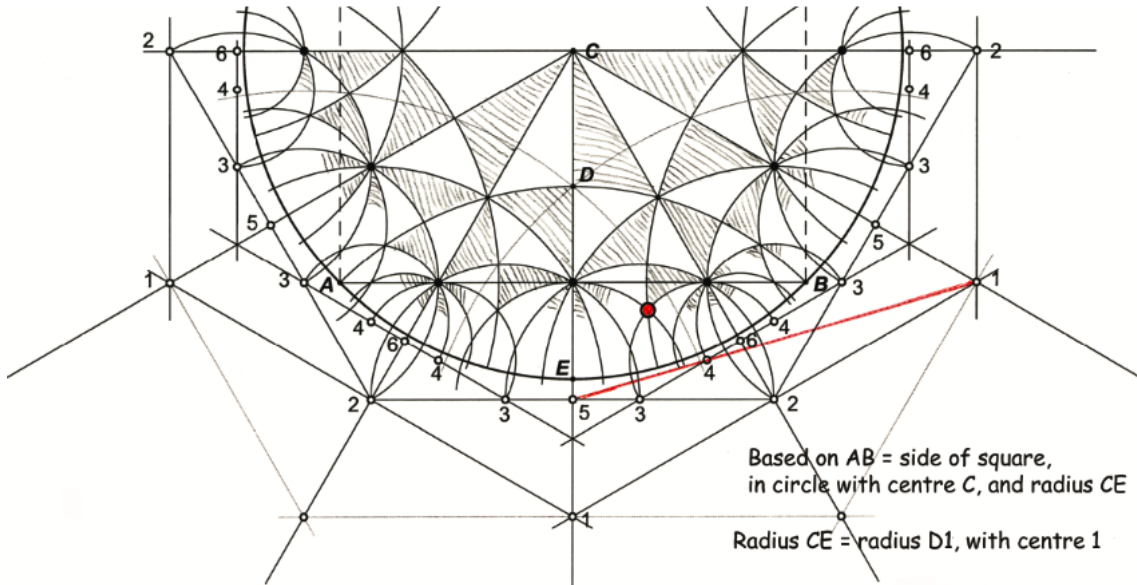


Rysunek 3.2: Rekonstrukcja rysunku 7 z artykułu Coxetera.

Hiperboliczny parkietaż wypełniający koło, z trójkątnymi kafelkami zmniejszającymi i powtarzającymi się teoretycznie w nieskończoność w obrębie figury, były dokładnie tym, czego szukał Escher, aby uchwycić nieskończoność w skończonej przestrzeni. Poznany w ten sposób model model dyskowy Poincarégo miał bardzo duży wpływ na twórczość artysty. Okazało się, że przez lata matematycy wypełniali go parkietażem trójkątów, a Escher znalazł w tych rysunkach bogate źródło inspiracji. Zaczął eksperymentować z wypełnianiem modelu dyskowego różnymi wielokątami, tak jak robił to z płaszczyzną euklidesową.

Zainspirowany powyższą ilustracją, przy użyciu liniału i cyrkla Escher stworzył *Circle Limit I* - pierwszy z serii czterech drzeworytów, w którym próbował przedstawić nieskończenie malejące figury na modelu dyskowym Poincarégo. Nie był jednak usatysfakcjonowany swoją konstrukcją, dlatego wysłał do Coxetera schemat pracy, rysunek 7 z zaznaczonymi punktami i prostymi oraz list z prośbą o proste wyjaśnienie, jak skonstruować kolejne okręgi, których promienie maleją, a środki coraz bardziej zbliżają się od zewnątrz do okręgu tworzącego model. Odpowiedź matematyka nie do końca była tym, czego Escher oczekiwał. Spodziewał się, że otrzyma jasne rozwiązanie problemu, a zamiast tego Coxeter odesłał schemat z zaznaczonymi na czerwono punktami i prostą, a w liście dodał opis swoich notatek: „Punkt zaznaczony na Twoim rysunku (jako czerwone „o” z tyłu strony) leży na 3 okręgach, których środki to punkty 1, 4 i 5. A zatem te środki leżą na prostej

(lekką zarysowaną czerwoną linią), a czwarty okrąg przechodzący przez czerwony punkt musi mieć środek na tej samej czerwonej linii” ([7] str. 712). Na Rysunku 3.3 znajduje się rekonstrukcja diagramu Eschera wraz z zaznaczonymi przez Coxetera punktami i prostą.



Rysunek 3.3: Rekonstrukcja diagramu Eschera z notatkami Coxetera (stworzona przez autora artykułu [6])

Escher nie miał wykształcenia matematycznego i mimo świetnej intuicji oraz korzystania z matematyki (zwłaszcza geometrii) w swoich pracach, wielokrotnie powtarzał, że nie posiada jakiegokolwiek zdolności rozumienia tej nauki. Dla niego matematyka była tym, z czym spotkał się w szkolnej ławce - symbolami, wzorami i zadaniami z podręczników (więcej w [7]). Mimo tej niechęci dalej współpracował z Coxeterem i próbował zrozumieć wskazówki, które od niego otrzymywał (co nazywał „Coxeterowaniem”). W latach 1959-1960 Escher stworzył pozostałe prace z serii *Circle Limit*. Za najbardziej dokładną uznaje się trzecią, przedstawiającą wyskakujące z wody różnokolorowe ryby. *Circle Limit III* znajduje się poniżej na Rysunku 3.4. Po zobaczeniu tego drzeworytu Coxeter napisał na jego temat trzystronicowy list, pełen matematycznych symboli i odniesień do tekstów. Escher po jego przeczytaniu powiedział do syna: „Trzy strony wyjaśnienia tego, co zrobiłem... Jaka szkoda, że nic z niego nie rozumiem, absolutnie nic ...” ([7] str. 713).



Rysunek 3.4: M. C. Escher *Circle Limit III* (więcej w [5])

Możemy zacząć się zastanawiać, czy jesteśmy w stanie udowodnić, że wskazówka z listu Coxetera do Eschera jest prawdą, a jeżeli tak, to w jaki sposób to pokazać. Do udowodnienia tego lematu potrzebujemy jedynie wiedzy o geometrii hiperbolicznej nabytej w poprzednim rozdziale oraz podstawowej wiedzy geometrycznej ze szkoły. Schemat stworzony przez Eschera jest modelem geometrii hiperbolicznej, czyli zaznaczone na nim łuki to fragmenty okręgów ortogonalnych do dużego okręgu. Wynika z tego, że ten lemat możemy równoważnie zapisać jako następujące twierdzenie:

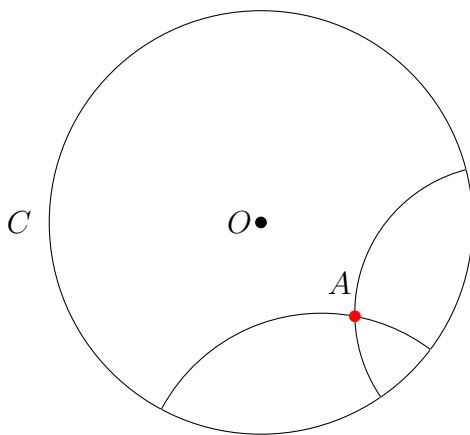
Twierdzenie 3.1. *Jeśli mamy okrąg C o środku w punkcie O i promieniu R oraz różny od O punkt A wewnątrz okręgu, to środki okręgów ortogonalnych do okręgu C , przechodzących przez A , będą leżały na prostej nieprzecinającej C .*

Głównym celem tej pracy jest podanie elementarnego dowodu Twierdzenia 3.1. Poprzednie rozdziały dotyczące ortogonalności okręgów oraz geometrii nieeuklidesowej były wstępem, niezbędnym do zrozumienia Twierdzenia 3.1. Skoro jednak mamy całą wiedzę, której potrzebujemy, przejdźmy do kolejnego rozdziału, w którym pokażemy, że lemat z listu Coxetera do Eschera jest prawdziwy.

4. Dowód lematu

Skoro omówiliśmy już wszystkie niezbędne elementy, przejdźmy do dowodzenia lematu z listy, czyli Twierdzenia 3.1. Udowodnimy je w obie strony - najpierw pokażemy, że dla okręgu oraz punktu wewnątrz okręgu niebędącego środkiem okręgi ortogonalnych do okręgu i przechodzące przez punkt leżą na prostej. W drugiej części tego rozdziału udowodnimy, że dla danej prostej nieprzecinającej danego okręgu okręgi o środkach na niej ortogonalne do danego okręgu przecinają się w punkcie wewnątrz tego okręgu, który nie jest jego środkiem. Zaczniemy od powtórzenia sformułowania Twierdzenia 3.1.

Twierdzenie 4.1. *Jeśli mamy okrąg C o środku w punkcie O i promieniu R oraz różny od O punkt A wewnątrz okręgu, to środki okręgów ortogonalnych do okręgu C , przechodzących przez A , będą leżały na prostej nieprzecinającej C .*



Rysunek 4.1: Okrąg C i punkt A .

Dany w Twierdzeniu 4.1 okrąg oraz punkt są zobrazowane na powyższym Rysunku 4.1. Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 4.1, wyznaczmy kilka pomocniczych elementów, które narysujemy na Rysunku 4.2. Zaczniemy od wyznaczenia prostej m przechodzącej przez punkty O oraz A . Na m znajdziemy punkt P , który będzie środkiem okręgu C_P o promieniu r_P , ortogonalnego do okręgu C i przechodzącego przez punkt A . Powstaje pytanie - jak wyznaczyć ten punkt?

Skorzystamy z tego, że znamy długość promienia R i odległość $|OA|$. Z własności okręgów ortogonalnych wiemy, że $|OP| = \sqrt{r_P^2 + R^2}$. Zauważmy że, że skoro punkt A znajduje się wewnątrz okręgu oraz na prostej $|OP|$, to $|OP| = |OA| + |AP|$, co równoważnie możemy zapisać jako $|OP| = |OA| + r_P$.

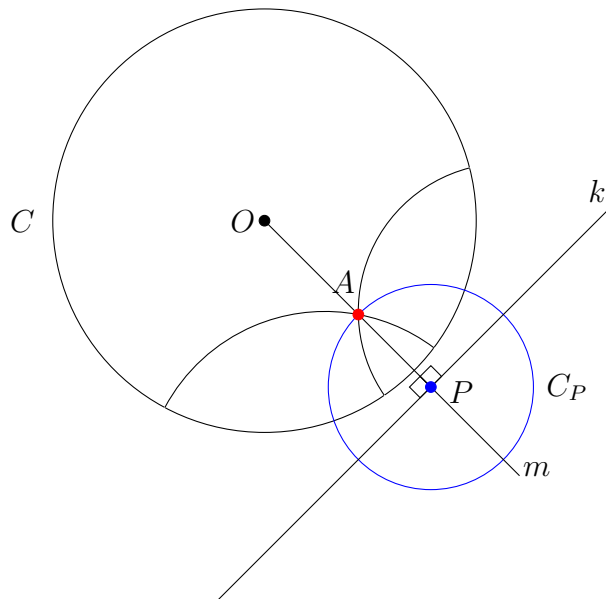
Otrzymujemy zatem następującą równość:

$$R^2 + r_P^2 = (|OA| + r_P)^2,$$

którą równoważnie możemy zapisać jako

$$R^2 + r_P^2 = |OA|^2 + 2 \cdot r_P \cdot |OA| + r_P^2.$$

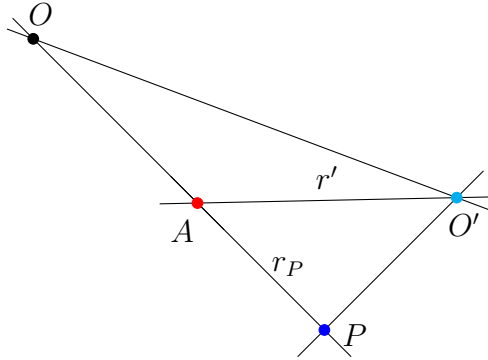
Otrzymujemy z niej długość promienia okręgu C_P : $r_P = \frac{R^2 - |OA|^2}{2 \cdot |OA|}$. Skoro znamy promień tego okręgu oraz wiemy, na jakiej prostej leży i przez który punkt przechodzi, to możemy zaznaczyć jego środek. Oprócz narysowania tego okręgu przeprowadzimy też prostą k prostopadłą do m , przechodzącą przez P . Pomoże nam ona w ustaleniu położenia pozostałych okręgów prostopadłych do C , przecinających się w punkcie A . Wszystkie opisane elementy znajdują się na Rysunku 4.2.



Rysunek 4.2: Ortogonalne okręgi C i C_P oraz proste k i m .

Przejdźmy teraz do pokazania, że jeżeli okrąg ortogonalny do okręgu C przechodzi przez A , to środek tego okręgu leży na k . Weźmy w tym celu dowolny różny od P punkt O' , który jest środkiem okręgu C' prostopadłego do C i przechodzącego przez A . Pokażemy, że O' leży na k .

Ta teza jest bardziej zrozumiała, gdy przedstawi się ją na osobnej ilustracji. W tym celu wykonajmy Rysunek 4.3, na którym znajduje się trójkąt o wierzchołkach O, O', P .



Rysunek 4.3: Trójkąt o wierzchołkach O, O', P .

Dowód Twierdzenia 4.1: Skorzystajmy z ortogonalności C' i C . Otrzymujemy z niej równość

$$|OO'|^2 = R^2 + |AO'|^2.$$

Z prostopadłości C_P oraz C wiemy, że $|OP|^2 = R^2 + r_P^2$. Z tej równości możemy wyliczyć R^2 postaci

$$R^2 = |OP|^2 - |AP|^2.$$

Po podstawieniu R^2 do równości określającej $|OO'|^2$ otrzymujemy

$$|OO'|^2 = |OP|^2 - |AP|^2 + |AO'|^2,$$

co równoważnie możemy zapisać jako

$$|OO'|^2 - |OP|^2 = |AO'|^2 - |AP|^2.$$

Tę równość możemy przedstawić jako układ równań z niewiadomą a :

$$\begin{cases} a = |OO'|^2 - |OP|^2 \\ a = |AO'|^2 - |AP|^2 \end{cases}$$

Równoważnie zapiszemy go w postaci

$$\begin{cases} |OO'|^2 = a + |OP|^2 \\ |AO'|^2 = a + |AP|^2 \end{cases}$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że dla dodatniego a istnieją dwa prostokątne trójkąty odpowiednio o bokach długości $\sqrt{a}, |OO'|, |OP|$ oraz $\sqrt{a}, |AP|, |AO'|$ i kącie prostym między bokami długości odpowiednio \sqrt{a} i $|OP|$ oraz \sqrt{a} i $|AP|$.

Skoro są to trójkąty, to prosta o długości \sqrt{a} jest odcinkiem między punktami P i O' . Wynika z tego, że kąt $\angle OPO'$ jest prosty, czyli punkt O' leży na prostej k . Kończy to dowód Twierdzenia 4.1, ponieważ pokazaliśmy, że środki wszystkich okręgów ortogonalnych do C przechodzących przez A leżą na k . \square

Przeprowadzimy teraz dowód twierdzenia odwrotnego do Twierdzenia 4.1, którego teza brzmi następująco:

Twierdzenie 4.2. *Niech k będzie dowolną prostą nieprzecinającą C . Wówczas wewnątrz okręgu C znajduje się punkt A , taki, że każdy ortogonalny do C okrąg o środku na prostej k nieprzecinającej C przechodzi przez A . Ponadto punkt A jest inny od środka O okręgu C .*

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 4.1, zaczniemy od wyznaczenia pomocniczych elementów oraz zilustrowania ich. Narysujmy więc okrąg C o środku O i promieniu R oraz nieprzechodzącą przez C prostą k . Przeprowadźmy prostą m od punktu O , prostopadłą do k w punkcie P przecięcia k i m oraz ortogonalny do C okrąg C_P o środku w tym punkcie. Długość jego promienia wyznaczmy z dobrze znanej własności okręgów prostopadłych i wynosi ona $r_P = \sqrt{|OP|^2 - R^2}$.

Skoro szukamy punktu przecięcia wszystkich okręgów o środkach na k , to na pewno ten punkt przecięcia będzie znajdował się na C_P , czyli w odległości r_P od P . Dobrym kandydatem na niego jest punkt przecięcia m i C_P , oznaczmy więc go jako A i pokażmy, że każdy okrąg ortogonalny do C , którego środek leży na k , przechodzi przez A . Wszystkie wymienione powyżej elementy znajdują się na Rysunku 4.4.

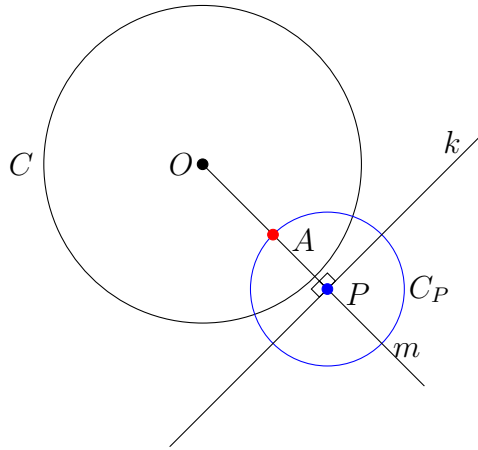
Sprawdźmy jak położony względem O jest punkt A . Zauważmy, że $|PO| = |OA| + |AP|$, co równoważnie możemy zapisać jako $|OA| = |OP| - r_P$. Korzystając z ortogonalności C i C_P , tę równość możemy przedstawić w postaci

$$|OA| = \sqrt{r_P^2 + R^2} - r_P. \quad (4.1)$$

Do dalszych rozważań związanych z powyższym równaniem potrzebujemy lematu związanego z sumą elementów pod pierwiastkiem.

Lemat 4.3. *Dla dowolnych dodatnich liczb a i b zachodzi następująca nierówność:*

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$



Rysunek 4.4: Ortogonalne okręgi C i C_P .

Dowód: Dla dowolnych wartości $a, b > 0$ pierwiastek $\sqrt{a+b}$ mogą przedstawić jako:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2} = \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b}.$$

A skoro $a, b > 0$, to $ab > 0$, czyli

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} > \sqrt{a+b}.$$

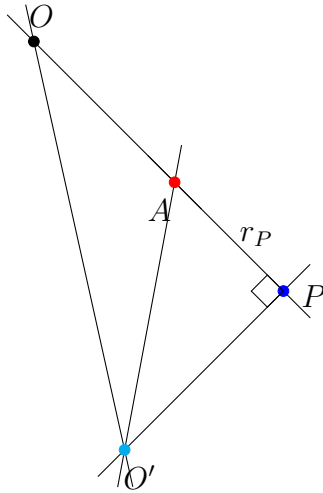
□

Korzystając z Lematu 4.3, z równości (1) otrzymujemy

$$\sqrt{r_P^2 + R^2} - r_P < \sqrt{r_P^2} + \sqrt{R^2} - r_P,$$

z czego wynika, że $|OA| < R$, czyli A znajduje się wewnątrz C i nie jest jego środkiem.

Z powyższą wiedzą przejdźmy do dowodzenia Twierdzenia 4.2. Pokażemy, że dowolny okrąg o środku na k , ortogonalny do C , przechodzi przez punkt A , czyli, że $|O'A| = r'$. Weźmy ortogonalny do C okrąg C' o środku w dowolnym punkcie O' na k oraz promieniu r' . Powstały w ten sposób trójkąt ortogonalny o wierzchołkach O, O', P przedstawiony jest na Rysunku 4.5.



Rysunek 4.5: Trójkąt o wierzchołkach O, O', P .

Dowód Twierdzenia 4.2: Z prostokątności C i C' wiemy, że

$$|OP|^2 = r'^2 + R^2, \quad (4.2)$$

a z ortogonalności C oraz C_P otrzymujemy

$$|OO'| = r'^2 + R^2. \quad (4.3)$$

Z twierdzenia Pitagorasa i kąta prostego $\angle OPO'$ wynika, że:

$$|OO'| = |OP|^2 + |PO'|^2. \quad (4.4)$$

Po podstawieniu (2) i (3) do (4) otrzymujemy $r'^2 + R^2 = r_P^2 + R^2 + |PO'|^2$, co równoważnie możemy zapisać jako

$$r'^2 = |AP|^2 + |PO'|^2.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że istnieje prostokątny trójkąt o bokach długości r' , $|AP|$, $|PO'|$ i kącie prostym między bokami długości AP i $|PO'|$. Skoro jest to trójkąt, to odcinek długości r' leży między punktami A i O' , czyli okrąg C' przechodzi przez punkt A . Oznacza to, że przecinają się tam wszystkie ortogonalne do C okręgi o środkach na prostej k , co kończy dowód Twierdzenia 4.2. \square

Bibliografia

- [1] Steven Chaplick, Henry Förster, Myroslav Kryven, Alexander Wolff, *On Arrangements of Orthogonal Circles*, 2019, s. 2, URL: <https://arxiv.org/abs/1907.08121>.
- [2] R. Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001, s.90-91.
- [3] I. Przewdzink, *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*, praca magisterska napisana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2010.
- [4] J. W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, drugie wydanie, Springer-Verlag London, 2005, s.118
- [5] M.C. Escher, Zbiór prac zarządzany przez THE M.C. ESCHER COMPANY, URL: <https://mcescher.com/gallery/>.
- [6] D. Dunham, *Creating Repeating Hyperbolic Patterns - Old and New*, „Notices of the American Mathematical Society” 50, nr. 4, 2003, str. 452
- [7] D. Schattschneider, *The Mathematical Side of M. C. Escher*, „Notices of the American Mathematical Society” 57, nr. 6, 2010, str. 706-712