

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Grzegorz Słaboń

**Elementarne metody obliczania
długości łuku, pola wycinka oraz krzywizny
horocyklu, ekwidystanty i okręgu
w geometrii hiperbolicznej**

Praca magisterska
wykonana pod kierunkiem
Prof. dra hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2011

Spis treści

Wstęp	5
1. Wiadomości wstępne	7
1.1. Funkcje hiperboliczne	7
1.2. Podstawowe obiekty geometrii hiperbolicznej w modelu półpłaszczyznowym	8
1.2.1. Punkty	8
1.2.2. Proste i odcinki	9
1.2.3. Długość odcinka	9
1.2.4. Kąty	10
1.2.5. Pole wielokąta	11
1.3. Izometrie hiperboliczne	11
1.4. Krzywe kołowe	11
1.4.1. Horocykl	12
1.4.2. Ekwidystanta	13
1.4.3. Okrąg hiperboliczny	14
1.5. Długość i krzywizna krzywej	17
2. Horocykl	18
2.1. Długość łuku horocyklu	19
2.2. Krzywizna horocyklu	21
2.3. Pole wycinka horocyklu	27
3. Ekwidystanta	28
3.1. Długość łuku ekwidystanty	30
3.2. Krzywizna ekwidystanty	33
3.3. Pole wycinka ekwidystanty	41
4. Okrąg hiperboliczny	42
4.1. Współrzędne kartezjańskie punktu o zadanej współrzędnej kątowej na okręgu hiperbolicznym	43
4.2. Długość okręgu hiperbolicznego	46
4.3. Krzywizna okręgu hiperbolicznego	50
4.4. Pole koła hiperbolicznego	59
5. Uwagi końcowe	61
Bibliografia	61

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest obliczenie długości łuku, krzywizny oraz pola wycinka dla każdej z krzywych kołowych w dwuwymiarowej geometrii hiperbolicznej, przy zastosowaniu elementarnych narzędzi matematycznych. Najbardziej zaawansowanym spośród nich wydaje się być obliczanie granic ciągów i funkcji. Elementarność ta czyni pracę zrozumiałą dla szerszego grona zainteresowanych i jednocześnie wskazuje głównych jej adresatów, a mianowicie studentów specjalności nauczycielskiej oraz młodzież szkolną.

Wszelkie obliczenia prowadzone są w modelu półpłaszczyznowych geometrii hiperbolicznej, który w niezbędnym zakresie został opisany w rozdziale "Wiadomości wstępne". Kolejne trzy rozdziały to szczegółowe wyliczenia atrybutów krzywych kołowych. Ostatni rozdział "Uwagi końcowe" przedstawia trzy spostrzeżenia dotyczące wszystkich krzywych kołowych jednocześnie.

Przy pisaniu tej pracy autor posługiwał się jedynie wykładem prof. Jacka Świątkowskiego "Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe", na podstawie którego został zredagowany rozdział "Wiadomości wstępne". Pozostałe zasadnicze dla tej pracy rozdziały powstały bez odwoływania się do innych źródeł. Podana na końcu literatura ma więc charakter uzupełniający.

Szczególne podziękowania autor składa opiekunowi swojej pracy magisterskiej Profesorowi Jackowi Świątkowskiemu za zainteresowanie autora tematem pracy oraz pomoc merytoryczną i edytorską, której efektem jest ostateczna wersja tej pracy.

1. Wiadomości wstępne

Zanim przejdziemy do meritum tej pracy, zapoznamy się wcześniej z funkcjami hiperbolicznymi, modelem półpłaszczyznowym dwuwymiarowej geometrii hiperbolicznej oraz definicjami długości i krzywizny krzywej. Wiadomości tu zawarte mają w dużej mierze charakter informacyjny, a nie badawczy, stąd niektóre fakty podane są bez uzasadnienia.

1.1. Funkcje hiperboliczne

Definicja 1.1.1. *Funkcje hiperboliczne przekształcające zbiór \mathbf{R} w siebie definiujemy jak poniżej*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{ctgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

i nazywamy je odpowiednio sinusem hiperbolicznym, cosinusem hiperbolicznym, tangensem hiperbolicznym oraz cotangensem hiperbolicznym.

Nietrudno wyprowadzić poniższe własności tak zdefiniowanych funkcji:

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},$$

$$\operatorname{ctgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)},$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Dla wszystkich funkcji hiperbolicznych definiujemy też na ich zbiorach wartości funkcje odwrotne. Ich nazwy powstają analogicznie jak nazwy funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych. Mamy zatem:

$$\sinh^{-1}(x) = \operatorname{ar} \sinh(x),$$

$$\cosh^{-1}(x) = \operatorname{ar} \cosh(x),$$

$$\operatorname{tgh}^{-1}(x) = \operatorname{ar} \operatorname{tgh}(x),$$

$$\operatorname{ctgh}^{-1}(x) = \operatorname{ar} \operatorname{ctgh}(x).$$

1.2. Podstawowe obiekty geometrii hiperbolicznej w modelu półpłaszczyznowym

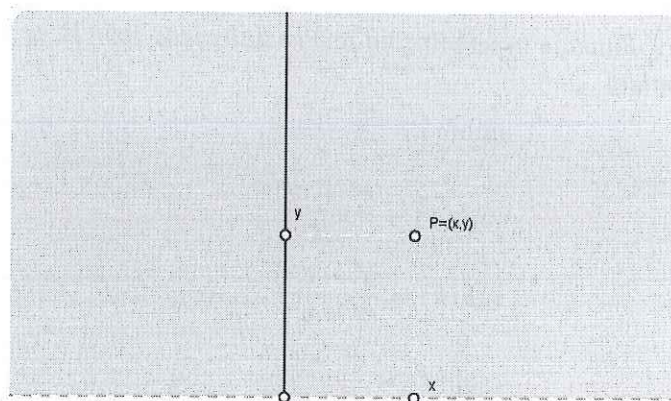
Zainteresowanemu Czytelnikowi polecamy porównać poniższy opis z Rozdziałem 9.2 w [2].

1.2.1. Punkty

Punkty w modelu półpłaszczyznowym reprezentowane są przez wszystkie punkty górnej euklidesowej półpłaszczyzny kartezjańskiej, wyłączając te o drugiej współrzędnej zerowej. Dokładniej, model płaszczyzny hiperbolicznej \mathbf{H}^2 wygląda następująco:

$$\mathbf{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}.$$

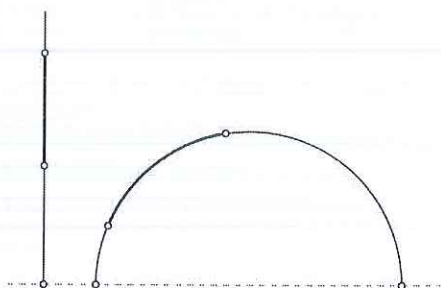
Oś OX będzie zwykle rysowana linią przerywaną, bo punkty na niej leżące



Rysunek 1.1.

nie reprezentują żadnych punktów z \mathbf{H}^2 . Oś OY kreślić będziemy linią ciągłą, oczywiście prostopadłą do przerywanej.

1.2.2. Proste i odcinki



Rysunek 1.2.

Proste w omawianym modelu mają postać euklidesowych półprostych prostopadłych do osi OX lub euklidesowych półokręgów o środkach na tej osi.

Odcinki więc reprezentowane są przez odcinki euklidesowe zawarte w pionowych półprostych, albo łuki okręgów reprezentujących proste, odpowiednio.

1.2.3. Długość odcinka

W niniejszej pracy będziemy stosować oznaczenia na dwojaką długość. Długość euklidesową obiektu liniowego w modelu będziemy oznaczać przez $|\cdot|_e$. Zaś długość hiperboliczną figury reprezentowanej w modelu przez ten obiekt euklidesowy będziemy oznaczać następująco: $|\cdot|_h$. Dowolne dwa punkty o współrzędnych $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ w modelu można połączyć hiperbolicznym odcinkiem. Cosinus hiperboliczny długości odcinka hiperbolicznego XY wyraża się następującym wzorem

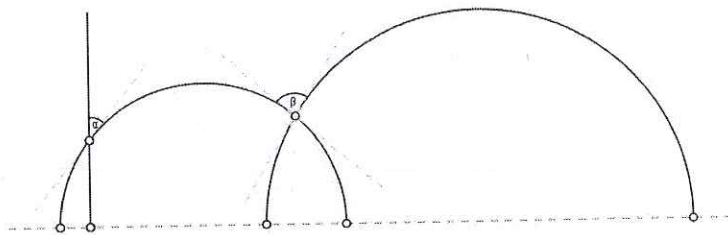
$$\cosh(|XY|_h) = 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1y_2},$$

co po przekształceniu daje wyrażenie

$$|XY|_h = \operatorname{ar} \cosh\left(1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1y_2}\right).$$

1.2.4. Kąty

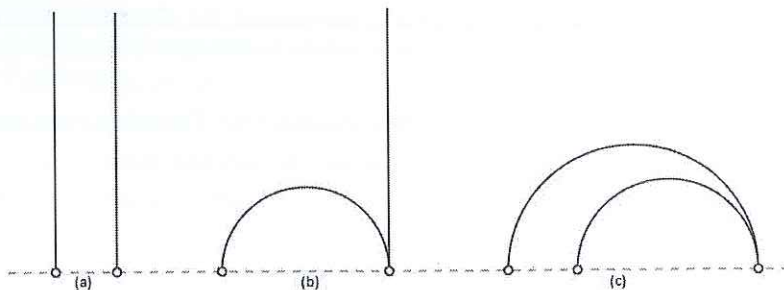
Proste hiperboliczne mogą być różnie względem siebie położone. Mogą się na przykład przecinać pod pewnym kątem. Miara hiperboliczna kąta między przecinającymi się prostymi hiperbolicznymi jest równa mierze euklidesowej kąta między figurami reprezentującymi te proste w modelu. Często zatem w tej pracy wyrażenie "miara kąta" będzie używane w tych dwóch znaczeniach jednocześnie. Zauważmy, że kąt euklidesowy między okręgiem a innym obiektem, to kąt między styczną do okręgu w punkcie przecięcia tych figur a wspomnianym obiektem.



Rysunek 1.3.

Proste hiperboliczne mogą być również asymptotyczne. Sytuacja taka może być obrazowana na trzy sposoby: (a) dwie proste pionowe, (b) prosta pionowa z prostą półokręgiem o "wspólnym" punkcie euklidesowym na osi OX , (c) dwie proste półokręgi o "wspólnym" punkcie euklidesowym na osi OX (patrz Rysunek 1.4). Proste z takiej pary zbliżają się na dowolnie małą, ale niezerową odległość. W przypadku asymptotycznych prostych pionowych jest tak, gdy wędrujemy w modelu "do góry", dla pozostałych par prostych asymptotycznych sytuacja ta zachodzi w modelu, gdy dążymy do ich "wspólnego" punktu na osi OX . Abstrakcyjne punkty wspólne, do których w ten

sposób dążymy (czyli punkt "u góry", bądź "wspólny" na osi OX) nazywamy idealnymi. Mówimy też wtedy, że kąt między takimi prostymi (o wierzchołku w punkcie idealnym) ma miarę hiperboliczną 0.



Rysunek 1.4.

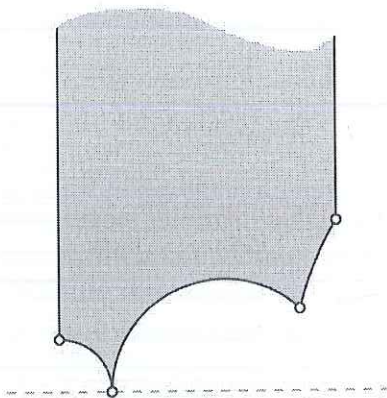
Proste hiperboliczne mogą być również rozchodzące się. Są to pary prostych nieprzecinających się i jednocześnie nieasymptotycznych.

1.2.5. Pole wielokąta

Pole n -kąta hiperbolicznego W_n o miarach kątów wewnętrznych α_i , gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, n$, obliczamy z poniższego wzoru.

$$P(W_n) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

W geometrii hiperbolicznej rozważamy też tak zwane wielokąty idealne, czyli takie, których przynajmniej jeden z wierzchołków jest punktem idealnym. Wtedy w powyższym wzorze za miarę kąta wewnętrznego w takim wierzchołku przyjmujemy 0. Rysunek 1.5 przedstawia przykład pięciokąta o dwóch wierzchołkach idealnych.



Rysunek 1.5.

1.3. Izometrie hiperboliczne

Izometrią hiperboliczną nazywamy każde przekształcenie płaszczyzny hiperbolicznej na siebie zachowujące odległości (oczywiście w sensie hiperbolicznym). Hiperbolicznymi izometriami są nieeuklidesowe symetrie osiowe względem prostych hiperbolicznych, bądź złożenia pewnej liczby takich odbić. Jeśli osią symetrii w modelu jest prosta pionowa, to symetria ta jest w modelu euklidesową symetrią osiową względem tej prostej. Zaś hiperboliczna symetria osiowa względem prostej reprezentowanej przez półokrąg jest w modelu euklidesową inwersją względem tego okręgu. Przypomnijmy, że inwersją względem okręgu o środku w punkcie O i promieniu długości r nazywamy euklidesowe przekształcenie płaszczyzny bez punktu O w siebie, które dowolnemu punktowi X przyporządkowuje punkt X' na półprostej OX , taki że

$$|OX|_e \cdot |OX'|_e = r^2.$$

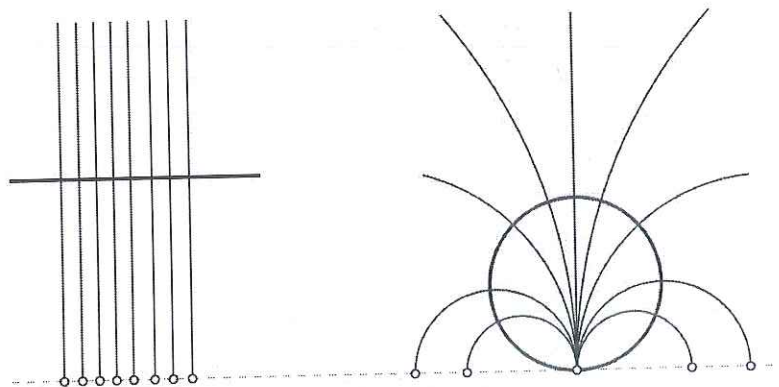
Równoważną definicję inwersji oraz omówienie jej podstawowych własności Czytelnik znajdzie w Rozdziale 5 w [2].

1.4. Krzywe kołowe

1.4.1. Horocykl

Definicja 1.4.1. *Horocyklem dla ustalonengo pęku prostych asymptotycznych nazywamy krzywą w każdym punkcie prostopadłą do przecinającej ją w tym punkcie prostej z tego pęku.*

W modelu są dwa rodzaje pęków prostych asymptotycznych, stąd też dwa obiekty reprezentujące horocykl. Pęk prostych "pionowych" asymptotycznych w "punkcie u góry" generuje horocykl reprezentowany przez dowolną prostą prostopadłą do nich. Natomiast z pęku prostych asymptotycznych w euklidesowym punkcie na osi OX otrzymujemy horocykl w postaci dowolnego okręgu stycznego do tej osi we wspomnianym punkcie asymptotyczności, ale niezawierającego tego punktu. Powyżej opisane sytuacje przedstawia Rysunek 1.6, przykładowe horocykle narysowano pogrubioną linią. Posługując



Rysunek 1.6.

się opisem izometrii z podrozdziału 1.3 nietrudno wyprowadzić następujące dwie własności horocykli (dowody pomijamy).

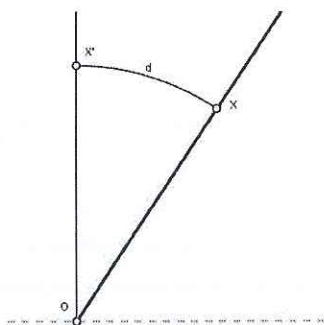
Fakt 1.4.2. *Dowolne dwa horocykle są izometryczne.*

Fakt 1.4.3. *Dla dowolnych dwóch punktów na ustalonym horocyklu istnieje izometria, która przekształca jeden na drugi i jednocześnie cały horocykl na siebie.*

1.4.2. Ekwidystanta

Definicja 1.4.4. *Ekwidystantą dla ustalonej prostej p i odległości d nazywamy zbiór punktów odległych o d od prostej p i leżących po tej samej stronie tej prostej. Prostą p nazywamy wtedy prostą bazową dla tej ekwidystanty.*

Rozważmy najpierw prostą "pionową" jako bazową. Bez straty ogólności (bo euklidesowe symetrie osiowe względem pionowych prostych w modelu reprezentują izometrie hiperboliczne) obróćmy ją tak w modelu, by pokrywała się z osią OY . Ustalmy też, że szukamy ekwidystanty, leżącej w odległości d i po prawej stronie prostej bazowej. Niech punkt $X = (x, y)$ leży na tej ekwidystancie, a X' będzie jego rzutem prostokątnym na prostą bazową. Wtedy $|XX'|_h = d$ oraz $X' = (0, \sqrt{x^2 + y^2})$ (patrz Rysunek 1.7). Ze wzoru



Rysunek 1.7.

na cosinus hiperboliczny długości odcinka mamy

$$\cosh(d) = 1 + \frac{x^2 + (y - \sqrt{x^2 + y^2})^2}{2y\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Po przemnożeniu przez mianownik ułamka i uproszczeniu otrzymujemy

$$\cosh(d)y\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2,$$

co po wydzieleniu obydwu stron przez $\sqrt{x^2 + y^2}$ i podniesieniu do potęgi drugiej daje

$$\cosh^2(d)y^2 = x^2 + y^2.$$

Po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów dostajemy

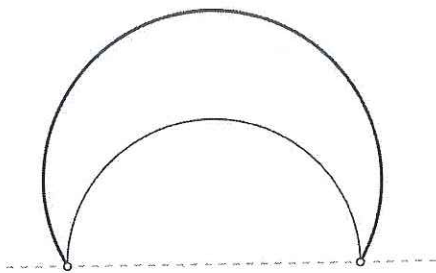
$$y^2(\cosh^2(d) - 1) = x^2,$$

co ostatecznie sprowadza się równania dwóch prostych przechodzących przez początek układu:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(d) - 1}} x.$$

Interesują nas tylko te ich części, które leżą w modelu i prawej stronie prostej bazowej. Otrzymujemy finalnie, że ekwidystanty dla "pionowych" prostych bazowych są reprezentowane w modelu przez euklidesowe półproste, mające w sensie euklidesowym wspólny początek z prostą bazową.

Postępując w analogiczny sposób, ale tym razem biorąc za prostą bazową euklidesowy półokrąg otrzymamy (po nietrudnych, choć żmudnych rachunkach), że ekwidystanty dla takich prostych bazowych w modelu są reprezentowane przez łuki okręgów, których końce pokrywają się w sensie euklidesowym z końcami półokręgu reprezentującego prostą bazową. Na Rysunku 1.8 przedstawiliśmy jedną z takich ekwidystant (pogrubiona linia) dla prostej bazowej półokręgu. Posługując się opisem izometrii nietrudno można udowodnić po-



Rysunek 1.8.

nizsze fakty.

Fakt 1.4.5. *Dowolne dwie ekwidystanty tak samo odległe od swoich prostych bazowych są izometryczne.*

Fakt 1.4.6. *Dla dowolnych dwóch punktów na ustalonej ekwidystancie istnieje izometria, która przekształca jeden na drugi i jednocześnie całą ekwidystantę na siebie.*

1.4.3. Okrąg hiperboliczny

Definicja 1.4.7. *Okręgiem hiperbolicznym o środku w punkcie S i promieniu długości R nazywamy zbiór punktów, których odległość hiperboliczna od S wynosi R .*

Znajdziemy reprezentację okręgu hiperbolicznego o promieniu R i środku w punkcie $S = (a, b)$ w modelu półpłaszczyznowym. Z definicji okręgu oraz ze wzoru na cosinus hiperboliczny długości odcinka, rozważając dowolny punkt $X = (x, y)$ na takim okręgu, mamy

$$\cosh(|SX|_h) = \cosh(R) = 1 + \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2by}.$$

Po przemnożeniu przez mianownik ułamka i uproszczeniu otrzymujemy

$$(x - a)^2 + y^2 - 2by \cosh(R) + b^2 = 0.$$

Przekształcając dalej dostajemy

$$(x - a)^2 + (y^2 - 2by \cosh(R) + b^2 \cosh^2(R)) - b^2 \cosh^2(R) + b^2 = 0,$$

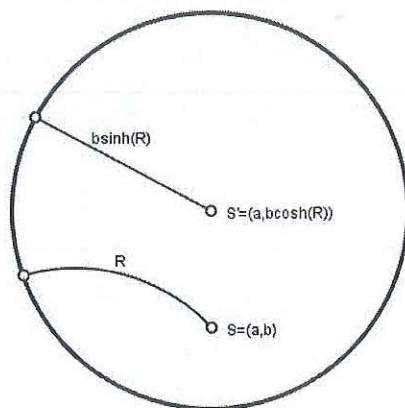
czyli

$$(x - a)^2 + (y - by \cosh(R))^2 = b^2 \cosh^2(R) - b^2,$$

ostatecznie

$$(x - a)^2 + (y - by \cosh(R))^2 = b^2 \sinh^2(R).$$

Zatem hiperboliczny okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu R reprezentowany jest w omawianym modelu przez euklidesowy okrąg o środku w punkcie $S' = (a, b \cosh(R))$ i promieniu $b \sinh(R)$. Przytaczamy również dla



Rysunek 1.9.

okręgu dwie własności, których uzasadnienie opiera się na opisie izometrii.

Fakt 1.4.8. *Dowolne dwa okręgi hiperboliczne o promieniu tej samej długości są izometryczne.*

Fakt 1.4.9. *Dla dowolnych dwóch punktów na ustalonym okręgu hiperbolicznym istnieje izometria, która przekształca jeden na drugi i jednocześnie cały okrąg na siebie.*

1.5. Długość i krzywizna krzywej

Przedstawimy w tym rozdziale definicje długości łuku krzywej i krzywizny krzywej w punkcie. Definicje te zaczerpnęliśmy z geometrii euklidesowej, ale mają zastosowanie też w przypadku omawianej geometrii hiperbolicznej. Równoważne definicje Czytelnik znajdzie w [4] na str. 183 oraz w [3] na str. 507 odpowiednio.

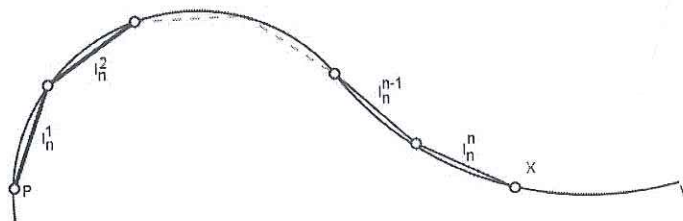
Definicja 1.5.1. Niech dana będzie krzywa γ różniczkowalna w sposób ciągły i wyróżniony przez punkty końcowe jej łuk $\frown PX$. Niech dany będzie też ciąg łamanych L_n spełniający następujące warunki:

- a) każda łamana z tego ciągu jest wpisana w ten łuk, tzn. końce jej odcinków leżą na łuku w porządku zgodnym z kolejnością ich występowania w łamanej, a końce łamanej ponadto pokrywają się z końcami łuku,
 b) ciąg d_n długości najdłuższego odcinka łamanej L_n jest zbieżny do 0, przy $n \rightarrow \infty$.

Niech $|L_n|$ oznacza długość n -tej łamanej tego ciągu. Długość łuku $\frown PX$ krzywej γ (ozn.: $|\frown PX|$) definiujemy jak poniżej

$$|\frown PX| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L_n|.$$

Wartość powyższej granicy nie zależy od wyboru ciągu łamanych.



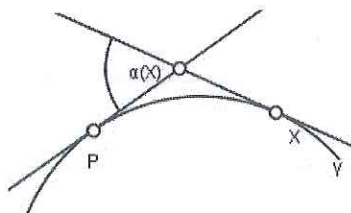
Rysunek 1.10.

Zwykle w obliczeniach w tej pracy będziemy wybierali takie ciągi łamanych L_n , że wszystkie odcinki $l_n^i, i = 1, 2, \dots, n$ danej łamanej będą równej długości. Wtedy długość n -tej łamanej obliczać będziemy jako iloczyn n i długości jednego (np. pierwszego) odcinka z tej łamanej.

$$|\frown PX| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot |l_n^1|.$$

Definicja 1.5.2. Niech dana będzie krzywa γ dwukrotnie różniczkowalna i punkt P na niej. Niech X będzie dowolnym punktem tej krzywej, $|\frown PX|$ długością jej łuku PX , a $\alpha(X)$ miarą kąta między stycznymi do krzywej w punktach P i X . Krzywiznę krzywej γ w punkcie P (ozn.: $K(\gamma, P)$) definiujemy jak poniżej

$$K(\gamma, P) = \lim_{X \rightarrow P} \frac{\alpha(X)}{|\frown PX|}.$$



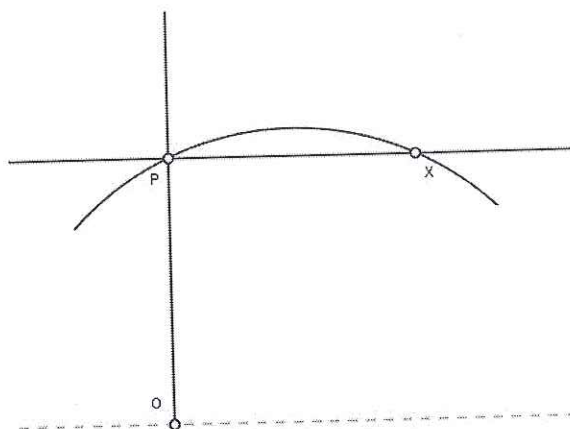
Rysunek 1.11.

2. Horocykl

W rozdziale tym przedstawimy wyliczenia długości łuku horocyklu, jego krzywizny w dowolnym punkcie oraz pola wycinka horocyklu. Dzięki izometryczności wszystkich horocykli możemy wybrać w modelu dogodny do obliczeń horocykl. Rozważać będziemy zatem horocykl reprezentowany przez prostą o równaniu

$$H : y = y_0. \quad (2.1)$$

Wyróżnijmy ponadto w modelu oś OY , która przecina nasz horocykl w punk-



Rysunek 2.1.

cie $P = (0, y_0)$. Wyznamy pomocniczo współrzędne takiego punktu X na horocyklu, że $|PX|_h = d$. Istnieją dwa takie punkty, interesować nas będzie ten o dodatniej odciętej w modelu. Oczywiście jego druga współrzędna wynosi y_0 , wyliczymy zatem pierwszą. Ze wzoru na cosinus hiperboliczny długości odcinka hiperbolicznego mamy

$$\cosh(d) = \cosh(|PX|_h) = 1 + \frac{x^2}{2y_0^2},$$

gdzie x to pierwsza współrzędna punktu X . Po przekształceniu otrzymujemy

$$x = y_0 \sqrt{2(\cosh(d) - 1)} = y_0 \sqrt{2 \frac{e^d + e^{-d} - 2}{2}} = y_0 \sqrt{4 \left(\frac{e^{d/2} - e^{-d/2}}{2} \right)^2} = 2y_0 \sinh\left(\frac{d}{2}\right).$$

Ostatecznie

$$X = \left(2y_0 \sinh\left(\frac{d}{2}\right), y_0 \right).$$

2.1. Długość łuku horocyklu

Twierdzenie 2.1.1. *Długość łuku horocyklu o cięciwie długości d wynosi*

$$\boxed{2 \sinh\left(\frac{d}{2}\right)}$$

Dowód : Rozważmy łuk PX horocyklu (ozn.: $\sim PX$) z Rysunku 2.1 Długość cięciwy tego łuku (czyli długość odcinka PX) wynosi d . Podzielmy teraz łuk $\sim PX$ na n izometrycznych łuków. Jeden z takich łuków ma początek w punkcie P , koniec zaś w punkcie o współrzędnych $(\frac{2}{n}y_0 \sinh(\frac{d}{2}), y_0)$. Wynika to z faktu, że w modelu symetrii względem pionowych prostych są reprezentacjami izometrii hiperbolicznych, więc dzieląc w modelu reprezentujący łuk horocyklu odcinek na n odcinków równej długości, czyli izometrycznych euklidesowo, dokonujemy też podziału łuku horocyklu na n przystających łuków, reprezentowanych przez te odcinki. Długość cięciwy każdego z takich n łuków wynosi

$$\operatorname{ar\,cosh}\left(1 + \frac{\frac{4}{n^2}y_0^2 \sinh^2\left(\frac{d}{2}\right)}{2y_0^2}\right) = \operatorname{ar\,cosh}\left(1 + \frac{2 \sinh^2\left(\frac{d}{2}\right)}{n^2}\right).$$

Długość $\sim PX$ obliczamy z podanego w 1. rozdziale wzoru, biorąc granicę przy $n \rightarrow \infty$ z iloczynu n i powyższego wyrażenia. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{ar\,cosh}\left(1 + \frac{2 \sinh^2\left(\frac{d}{2}\right)}{n^2}\right) &= \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ar\,cosh}\left(1 + 2\left(\frac{\sinh\left(\frac{d}{2}\right)}{n}\right)^2\right)}{\frac{\sinh\left(\frac{d}{2}\right)}{n}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sinh\left(\frac{d}{2}\right)}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{ar\,cosh}(1 + 2x^2)}{x} = (\bullet) \end{aligned}$$

Ostatnia granica jest symbolem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Do jej obliczenia zastosujemy regułę de l'Hospitala, wykorzystując poniższą zależność:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ar\,cosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\bullet) &= \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{\sqrt{(1 + 2x^2)^2 - 1}} = \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{\sqrt{2x^2(2 + 2x^2)}} = \\ &= \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{2x\sqrt{1 + x^2}} = 2 \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 2 \sinh\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

Wniosek 2.1.2. *Długość hiperboliczna łuku horocyklu $H : y = y_0$ jest wprost proporcjonalna do długości euklidesowej tego łuku w modelu.*

Dowód : Rozważmy $\sim PX$ jak na rysunku 2.1. Z Twierdzenia 2.1.1 mamy

$$|\sim PX|_h = 2 \sinh\left(\frac{d}{2}\right).$$

Ponadto, jako że

$$P = (0, y_0), \quad X = (2y_0 \sinh\left(\frac{d}{2}\right), y_0),$$

to

$$|\sim PX|_e = 2y_0 \sinh\left(\frac{d}{2}\right).$$

Zatem

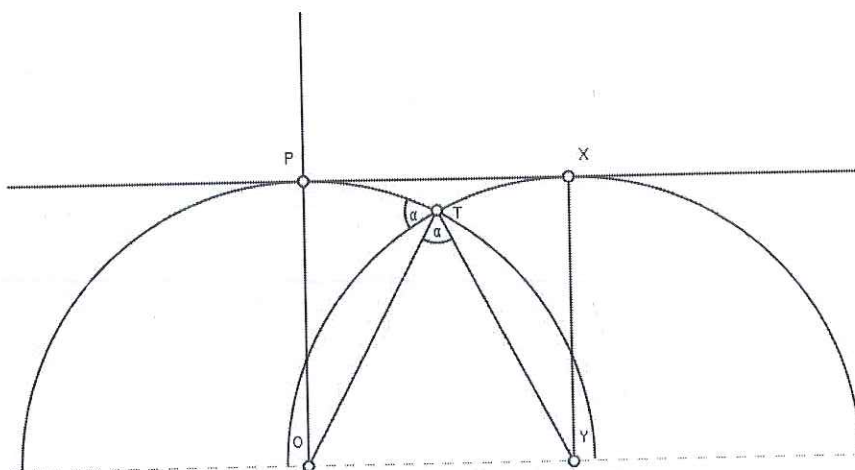
$$|\sim PX|_h = \frac{1}{y_0} \cdot |\sim PX|_e$$

■

2.2. Krzywizna horocyklu

Twierdzenie 2.2.1. *Krzywizna horocyklu w jego dowolnym punkcie wynosi 1.*

Dowód : Możemy wybrać dogodny dla nas punkt na horocyklu, ponieważ dla dowolnych dwóch punktów horocyklu istnieje izometria przekształcająca jeden na drugi i jednocześnie przekształcająca cały horocykl na siebie. Ustalmy zatem horocykl jak na Rysunku 2.1 i wyliczmy z definicji jego krzywiznę w punkcie P (ozn.: $K(H, P)$). Mamy



Rysunek 2.2.

$$K(H, P) = \lim_{X \rightarrow P} \frac{\alpha(X)}{|\sim PX|_h},$$

gdzie $\alpha(X)$ jest kątem między stycznymi do horocyklu w końcach $\sim PX$. Jako, że $X \rightarrow P$ dokładnie wtedy, gdy $|\sim PX|_h \rightarrow 0^+$, to powyższe wyrażenie możemy przepisać do następującej postaci

$$K(H, P) = \lim_{|\sim PX|_h \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(|\sim PX|_h)}{|\sim PX|_h} = \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(l)}{l}. \quad (2.2)$$

W ostatniej równości dokonaliśmy postawienia $l = |\sim PX|_h$ dla skrócenia dalszych zapisów. Musimy zatem wyznaczyć zależność $\alpha(l)$.

Fakt 2.2.2. *Kąt α między stycznymi do horocyklu w końcach jego łuku o długości l wynosi*

$$\alpha(l) = \arccos\left(1 - \frac{1}{2}l^2\right).$$

Dowód : Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2.2. Hiperboliczne styczne do horocyklu w punktach P i X reprezentowane są przez przecinające się półokręgi euklidesowe. Kąt między przecinającymi się okręgami jest równy kątowi między ich promieniami, wychodzącymi z punktu przecięcia tych okręgów. W modelu w trójkącie $\triangle OTY$ mamy zatem następującą zależność, wynikającą z twierdzenia kosinusów:

$$|OY|_e^2 = |OT|_e^2 + |TY|_e^2 - 2|OT|_e|TY|_e \cos(\alpha).$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\cos(\alpha) = \frac{|OT|_e^2 + |TY|_e^2 - |OY|_e^2}{2|OT|_e|TY|_e}.$$

Ponadto

$$|OT|_e = |OP|_e = y_0,$$

bo taka jest rzędna punktu P . Podobnie

$$|TY|_e = |XY|_e = y_0.$$

Mamy również

$$|OY|_e = |\sim PX|_e = y_0 |\sim PX|_h = y_0 l$$

(przedostatnia równość wynika z końcówki dowodu Wniosku 2.1.2). Podstawmy zatem powyższe wielkości do wyrażenia na $\cos(\alpha)$.

$$\cos(\alpha) = \frac{y_0^2 + y_0^2 - y_0^2 l^2}{2y_0^2} = \frac{2 - l^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}l^2$$

Ostatecznie zatem

$$\alpha(l) = \arccos\left(1 - \frac{1}{2}l^2\right),$$

co kończy dowód faktu. ■

Wracamy do dowodu Twierdzenia 2.2.1. Otrzymane w Fakcie 2.2.2 wyrażenie na $\alpha(l)$ wstawiamy do równania (2.2) i wyznaczamy krzywiznę horocyklu.

$$K(H, P) = \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(l)}{l} = \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1 - \frac{1}{2}l^2)}{l} = (\bullet\bullet)$$

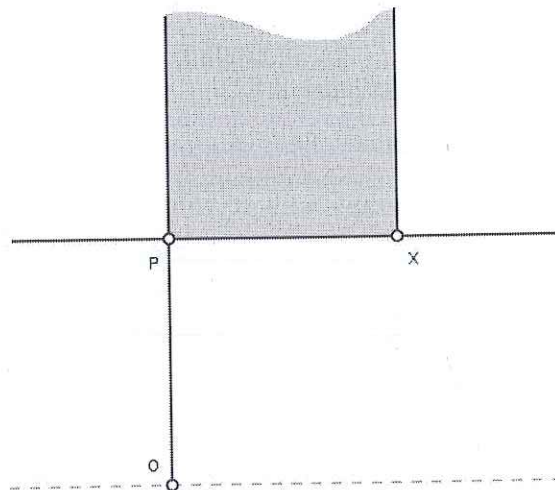
Powyższe wyrażenie to symbol nieoznaczony typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Zastosujemy zatem regułę de l'Hospitala, wykorzystując poniższą zależność:

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} (\bullet\bullet) &= \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{(-1) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 2l}{\sqrt{1 - (1 - \frac{1}{2}l^2)^2}} = \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{2}l^2} \sqrt{2 - \frac{1}{2}l^2}} = \\ &= \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}l^2}} = 1 \end{aligned}$$

W ten sposób udowodniliśmy Twierdzenie 2.2.1. ■

2.3. Pole wycinka horocyklu



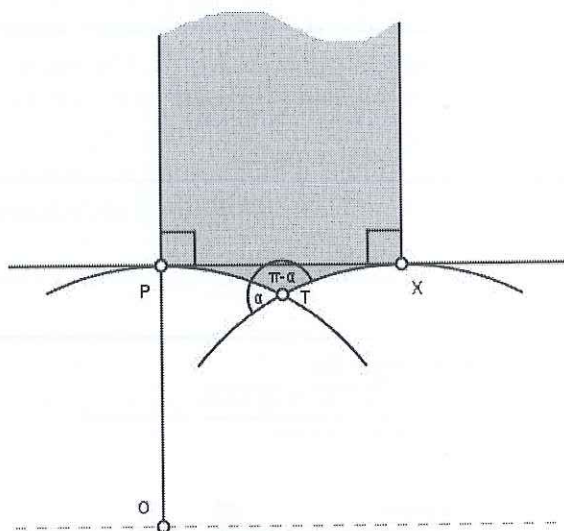
Rysunek 2.3.

Definicja 2.3.1. *Wycinkiem horocyklu opartym na jego łuku nazywamy figurę ograniczoną przez ten łuk oraz dwie asymptotyczne półproste, wychodzące z końców danego łuku horocyklu i prostopadle do tego łuku.*

Czytelnik może porównać powyższą definicję wycinka horocyklu z równoważną, choć nieco inaczej sformułowaną Definicją 24.D.1 na stronie 268 w [1]. W niniejszym podrozdziale wyznaczmy pole wycinka horocyklu, który oparty jest na łuku horocyklu o dowolnej długości.

Twierdzenie 2.3.2. *Pole wycinka horocyklu jest równe długości łuku horocyklu, na którym ten wycinek jest oparty.*

Dowód : Rozważmy wycinek $W(l)$ jak na Rysunku 2.3 oparty na łuku horocyklu $\sim PX$ o ustalonej długości l . W celu udowodnienia powyższego twierdzenia posłużymy się dwoma ciągami wielokątów: zawierających nasz wycinek - $W_n^+(l)$, oraz zawartych w nim - $W_n^-(l)$, rozważając ich pola. Opiszmy najpierw wielokąt $W_n^+(l)$.



Rysunek 2.4.

Wielokąt $W_1^+(l)$ to figura ograniczona stycznymi w końcach łuku horocyklu oraz wychodzącymi z tych punktów asymptotycznymi półprostymi, prostopadłymi do tego łuku. Obliczmy jej pole, korzystając ze wzoru na pole wielokąta hiperbolicznego.

$$P(W_1^+(l)) = 2\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha),$$

gdzie α to kąt $\alpha(l)$ z Faktu 2.2.2. Po wstawieniu odpowiedniej wartości α i uproszczeniu, otrzymujemy

$$P(W_1^+(l)) = \text{arc cos}\left(1 - \frac{1}{2}l^2\right).$$

Wielokąt $W_n^+(l)$ będzie składał się z n figur analogicznych do W_1^+ , ale wyznaczanych dla łuków horocyklu o długości l/n . Jego pole wyraża się zatem następująco

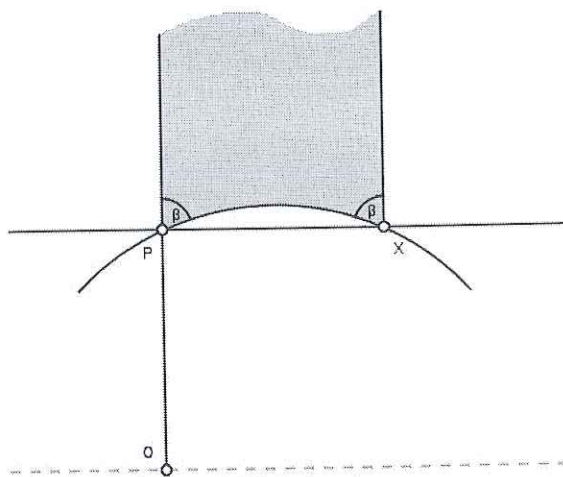
$$P(W_n^+(l)) = n \cdot \text{arc cos}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{n}\right)^2\right).$$

Wyliczymy teraz granicę ciągu zdefiniowanego powyżej przy $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n^+(l)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \arccos\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{n}\right)^2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot \frac{\arccos\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{n}\right)^2\right)}{\frac{l}{n}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{l}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = l \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos\left(1 - \frac{1}{2}(x)^2\right)}{x} = l \end{aligned}$$

Wartość ostatniej granicy podaliśmy od razu, ponieważ była ona obliczona w końcowej części dowodu Twierdzenia 2.2.1.

Zbudujemy teraz ciąg wielokątów $W_n^-(l)$. Wielokąt $W_1^-(l)$ ograniczony



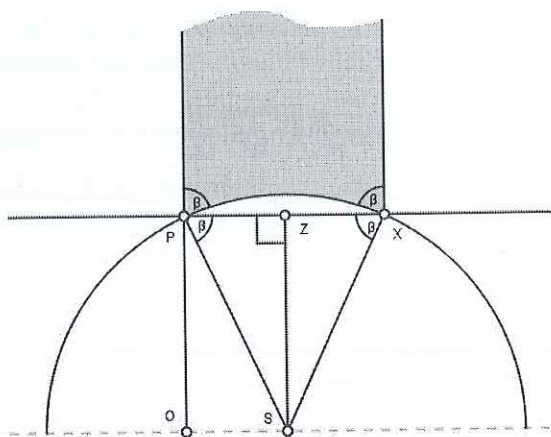
Rysunek 2.5.

jest przez dwie półproste asymptotyczne wychodzące z końców łuku horocyklu i do niego prostopadłe oraz sieczną przechodzącą przez te końce. Sieczna ta tworzy ze wspomnianymi półprostymi kąty o pewnej mierze β . Są one kątami wewnętrznymi wielokąta $W_1^-(l)$, więc wyznaczenie ich jako $\beta(l)$ jest niezbędnym krokiem do wyliczenia pola tego wielokąta.

Fakt 2.3.3. *Kąt β między asymptotycznymi bokami wycinka horocyklu opartego na łuku długości l , a sieczną przechodzącą przez końce tego łuku horocyklu, wynosi*

$$\beta(l) = \arctg\left(\frac{2}{l}\right).$$

Dowód Faktu 2.3.3: Zauważmy, że β występuje w modelu również jako kąt między prostą reprezentującą horocykl i promieniem (wychodzącym z punktu P) okręgu, który reprezentuje sieczną z treści faktu. Zgodnie z oznaczeniami Rysunku 2.6, β to kąt wewnętrzny trójkąta $\triangle PXS$. Taki sam kąt jest również w wierzchołku X tego trójkąta, więc jest to trójkąt równoramienny



Rysunek 2.6.

o podstawie PX . Spodek Z jego wysokości SZ dzieli zatem podstawę na połowy. Stąd mamy

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{|ZS|_e}{|ZP|_e} = \frac{y_0}{\frac{1}{2}|PX|_e} = \frac{2y_0}{y_0|PX|_h} = \frac{2}{l},$$

czyli

$$\beta(l) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{l}\right).$$

Wracając do wyliczenia pola $W_1^-(l)$, dostajemy

$$P(W_1^-(l)) = \pi - 2\beta = \pi - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{l}\right).$$

Wielokąt $W_n^-(l)$ bierzemy ze złożenia n wielokątów $W_1^-(l/n)$. Jego pole wyraża się zatem następująco

$$P(W_n^-(l)) = n\left(\pi - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\frac{l}{n}}\right)\right).$$

Wyznamy teraz granicę ciągu określonego powyżej przy $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n^-(l)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\pi - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\frac{l}{n}}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot \frac{\pi - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\frac{l}{n}}\right)}{\frac{l}{n}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{l}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = l \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{x}\right)}{x} = (\dots) \end{aligned}$$

Ostatnia granica to symbol nieoznaczony typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Do jej obliczenia zastosujemy regułę de l'Hospitala. Przypomnijmy jeszcze wyrażenie na pochodną funkcji arcus tangens.

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Mamy zatem

$$(\bullet\bullet\bullet) = l \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2) \cdot \frac{2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2}}{1 + (\frac{2}{x})^2} = l \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^2 + 4} = l$$

Podsumowując, dla dowolnych naturalnych n_1 i n_2 mamy

$$W_{n_1}^-(l) \subset W(l) \subset W_{n_2}^+(l).$$

Z monotoniczności funkcji pole otrzymujemy

$$P(W_{n_1}^-(l)) \leq P(W(l)) \leq P(W_{n_2}^+(l)).$$

Ponieważ

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P(W_{n_1}^-(l)) = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} P(W_{n_2}^+(l)) = l,$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

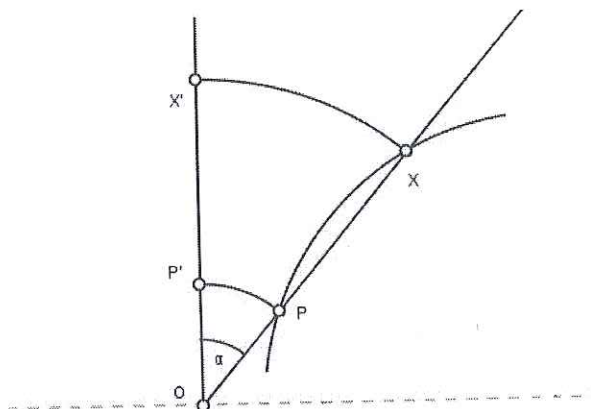
$$P(W(l)) = l,$$

co kończy dowód Twierdzenia 2.3.2. ■

3. Ekwidystanta

Rozdział niniejszy poświęcimy wyliczeniom długości łuku ekwidystanty, jej krzywizny w dowolnym punkcie oraz pola wycinka ekwidystanty. Jako że wszystkie ekwidystanty odległe od prostej bazowej o ten sam dystans są izometryczne, to do naszych rozważań możemy wybrać dogodny dla nas układ w modelu półpłaszczyznowym. Za prostą bazową obierzmy zatem prostą o równaniu $x = 0$. Rozważana ekwidystanta niech będzie odległa (w sensie hiperbolicznym) od tej prostej o d (ozn.: E_d). Reprezentowana jest ona przez euklidesową półprostą wychodzącą z początku układu współrzędnych, nachyloną do prostej bazowej pod pewnym kątem α . Łatwo wyliczamy równanie tej ekwidystanty w modelu:

$$E_d : y = \operatorname{ctg} \alpha \cdot x \quad (3.1)$$



Rysunek 3.1.

Lemat 3.0.4. *W modelu półpłaszczyznowym kąt euklidesowy między prostą bazową i odpowiadającą jej ekwidystantą, odległą w sensie hiperbolicznym o d , ma miarę*

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\cosh(d)}\right).$$

Dowód : Niech α będzie kątem, o którym mowa w lemacie. Niech ponadto P będzie dowolnym punktem na ekwidystancie, P' jego rzutem prostokątnym (w sensie hiperbolicznym) na prostą bazową. Oczywiście odcięta punk-

tu P' wynosi 0. Oznaczmy rzędną tego punktu przez y_0 . Punkt P ma wtedy współrzędne

$$P = (y_0 \sin \alpha, y_0 \cos \alpha).$$

Ze wzoru na cosinus hiperboliczny miary odcinka mamy:

$$\begin{aligned} \cosh(d) &= \cosh(|PP'|_h) = 1 + \frac{(y_0 \sin \alpha - 0)^2 + (y_0 \cos \alpha - y_0)^2}{2 \cdot y_0 \cos \alpha \cdot y_0} = \\ &= 1 + \frac{y_0^2 \sin^2 \alpha + y_0^2 (\cos \alpha - 1)^2}{2y_0^2 \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha + 1 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1}{2 \cos \alpha} = \\ &= \frac{1}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\cos \alpha = \frac{1}{\cosh(d)},$$

czyli

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\cosh(d)}\right).$$

3.1. Długość łuku ekwidystanty

Dla danej ekwidystanty ustalmy na jej prostej bazowej odcinek $P'X'$ o dowolnej długości hiperbolicznej l (patrz Rys. 3.1). Obierzmy również na ekwidystancie łuk $\smile PX$, taki że odcinek $P'X'$ jest jego hiperbolicznym rzutem prostokątnym na prostą bazową (odcinek $P'X'$ będziemy wtedy nazywać odcinkiem bazowym łuku ekwidystanty $\smile PX$). W tej części pracy zajmiemy się wyprowadzeniem wyrażenia na długość $\smile PX$ w zależności od l i d (d jest jak wcześniej odległością ekwidystanty od prostej bazowej).

Twierdzenie 3.1.1. *Dla ekwidystanty odległej od swojej prostej bazowej o d , długość jej łuku dla odcinka bazowego o mierze l wynosi*

$$l \cosh(d)$$

Dla dowodu powyższego twierdzenia najpierw wyprowadzimy następujący fakt pomocniczy.

Fakt 3.1.2. *Dla ekwidystanty odległej od swojej prostej bazowej o d , długość cięciwy jej łuku dla odcinka bazowego o mierze l wynosi*

$$\ar \cosh(\cosh^2(d) \cosh(l) - \cosh^2(d) + 1).$$

Dowód : Mamy

$$P' = (0, y_0), \quad |P'X'|_h = l.$$

Z bezpośredniego rachunku z użyciem wzoru na długość odcinka hiperbolicznego (którego wykonanie pozostawiamy Czytelnikowi) otrzymujemy

$$X' = (0, y_0 e^l).$$

Ponadto

$$P = (y_0 \sin \alpha, y_0 \cos \alpha), \quad (3.2)$$

po porównaniu współrzędnych trzech punktów wyżej opisanych otrzymamy

$$X = (y_0 e^l \sin \alpha, y_0 e^l \cos \alpha). \quad (3.3)$$

Aby obliczyć długość cięciwy łuku $\smile PX$ skorzystamy po raz kolejny ze wzoru na cosinus hiperboliczny miary odcinka. Dostajemy

$$\begin{aligned} \cosh(|PX|_h) &= 1 + \frac{y_0^2 \sin^2 \alpha (1 - e^l)^2 + y_0^2 \cos^2 \alpha (1 - e^l)^2}{2y_0^2 e^l \cos^2 \alpha} = \\ &= 1 + \frac{(1 - e^l)^2}{2e^l \cos^2 \alpha} = \frac{2e^l \cos^2 \alpha + 1 - 2e^l + e^{2l}}{2e^l \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1 + e^{2l}}{2e^l} - \frac{2e^l(1 - \cos^2 \alpha)}{2e^l \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cosh(l) - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = (*) \end{aligned}$$

Obliczenie kontynuujemy podstawiając za $\cos \alpha$ wyrażenie $1/\cosh(d)$ - patrz Lemat 3.0.4.

$$(*) = \cosh^2(d) \cosh(l) - \cosh^2(d) \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(d)}\right) = \cosh^2(d) \cosh(l) - \cosh^2(d) + 1$$

Zatem

$$|\smile PX|_h = \operatorname{ar} \cosh(\cosh^2(d) \cosh(l) - \cosh^2(d) + 1).$$

■

Dowód Twierdzenia 3.1.1: Celem wyznaczenia długości łuku $\smile PX$ dzielimy odpowiadający mu odcinek bazowy na n części równej długości, dla każdej z nich wyznaczamy długość odpowiadającej jej cięciwy ekwidystanty: $\operatorname{ar} \cosh(\cosh^2(d) \cosh(l/n) - \cosh^2(d) + 1)$, a następnie sumujemy takie długości i obliczamy granicę powstałego wyrażenia przy $n \rightarrow \infty$ (patrz Definicja 1.5.1). Sprowadza się to do następujących wyliczeń.

$$\begin{aligned} |\smile PX|_h &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{ar} \cosh(\cosh^2(d) \cosh(l/n) - \cosh^2(d) + 1) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot \frac{\operatorname{ar} \cosh(\cosh^2(d) \cosh(l/n) - \cosh^2(d) + 1)}{\frac{l}{n}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{l}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} l \cdot \frac{\operatorname{ar} \cosh(\cosh^2(d) \cosh(x) - \cosh^2(d) + 1)}{x} = (**). \end{aligned}$$

Powyższa granica jest symbolem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Do jej obliczenia stosujemy regułę de l'Hospitala. Przypomnijmy jeszcze następujący fakt:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ar} \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} (**) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} l \cdot \frac{\cosh^2(d) \sinh(x)}{\sqrt{(\cosh^2(d) \cosh(x) - \cosh^2(d) + 1)^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} l \cdot \frac{\cosh^2(d) \sinh(x)}{\sqrt{(\cosh^2(d) \cosh(x) - \cosh^2(d)) \sqrt{\cosh^2(d) \cosh(x) - \cosh^2(d) + 2}}} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} l \cdot \frac{\cosh^2(d) \sinh(x)}{\cosh(d) \sqrt{\cosh(x) - 1}} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(d) \cosh(x) - \cosh^2(d) + 2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} l \cdot \frac{\cosh(d) \sinh(x)}{\sqrt{\frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cosh(d) \sinh(x)}{\sqrt{\left(\frac{e^x/2 + e^{-x}/2}\right)^2 \cdot 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cosh(d) \sinh(x)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{2}} = \frac{l \cosh(d)}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} = \\ &= \frac{l \cosh(d)}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(x)}{\cosh\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} = l \cosh(d) \end{aligned}$$

Przedostatnią równość obliczyliśmy z reguły de l'Hospitala. W ten sposób udowodniliśmy Twierdzenie 3.1.1. ■

3.2. Krzywizna ekwidystanty

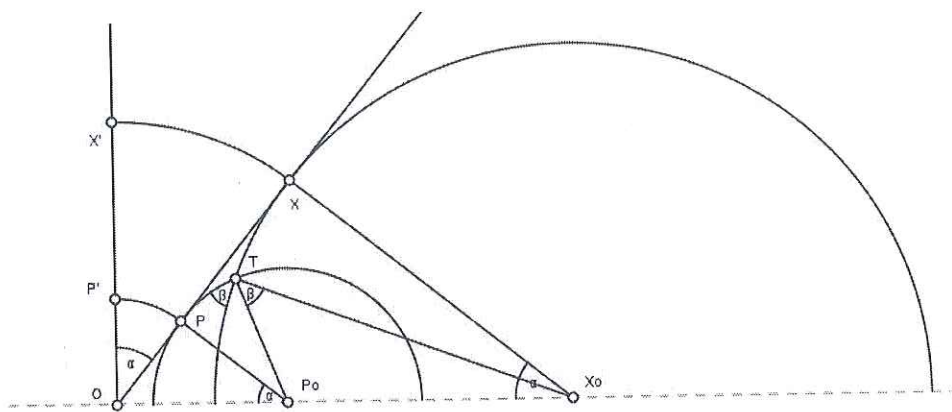
Wprowadzimy tu z definicji wyrażenie na krzywiznę ekwidystanty oddalanej od prostej bazowej o d . Będzie ono prawdziwe dla dowolnego punktu na ekwidystancie, ponieważ można dobrać odpowiednią izometrię przekształcającą punkt ekwidystanty na jej dowolny inny punkt, tak że i cała krzywa przejdzie na siebie. Rozważania oprzemy o sytuację z Rysunku 3.2, na który przenieśliśmy wszystkie oznaczenia z Rysunku 3.1.

Twierdzenie 3.2.1. *W ekwidystancie oddalonej od prostej bazowej o d , krzywizna w dowolnym jej punkcie wynosi*

$$\boxed{\operatorname{tgh}(d)}$$

Dowód: Wyliczać będziemy krzywiznę w punkcie P (ozn.: $K(E_d, P)$). Mamy

$$K(E_d, P) = \lim_{X \rightarrow P} \frac{\beta(X)}{|\cup PX|_h},$$



Rysunek 3.2.

gdzie β to kąt między stycznymi do ekwidystanty w końcach jej łuku $\smile PX$. Zauważmy, że dla ustalonej odległości d zarówno $|\smile PX|_h$ jak i β są zależne od długości l odcinka bazowego. Ponadto $X \rightarrow P$ doładnie wtedy, gdy $l \rightarrow 0^+$, zatem w świetle Twierdzenia 3.1.1 powyższe wyrażenie można równoważnie zapisać następująco:

$$K(E_d, P) = \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{\beta(l, d)}{l \cosh(d)}. \quad (3.4)$$

Musimy zatem najpierw wyznaczyć zależność $\beta(l, d)$.

Fakt 3.2.2. W ekwidystancie odległej od prostej bazowej o d , miara kąta między stycznymi w końcach łuku dla odcinka bazowego l wynosi

$$\arccos((1 - \cosh^2(d)) \cosh(l) - \cosh^2(d)).$$

Dowód: Styczne do ekwidystanty są reprezentowane w modelu przez okręgi. Kąt między przecinającymi się okręgami jest równy kątowi między promieniami tych okręgów wychodzącymi z punktu ich przecięcia. Przy oznaczeniach z Rysunku 3.2 mamy

$$\beta = |\angle P_o T X_o|.$$

Z twierdzenia kosinusów zastosowanego do $\triangle P_o T X_o$ otrzymujemy równość

$$|P_o X_o|_e^2 = |P_o T|_e^2 + |X_o T|_e^2 - 2|P_o T|_e |X_o T|_e \cos \beta,$$

skąd

$$\cos \beta = \frac{|P_o T|_e^2 + |X_o T|_e^2 - |P_o X_o|_e^2}{2|P_o T|_e |X_o T|_e}. \quad (3.5)$$

Zauważmy, że kąty $\angle P P_o O$ oraz $\angle X X_o O$ w odpowiednich trójkątach prostokątnych mają miarę α . Stąd

$$|P_o T|_e = |P_o P|_e = y_o \operatorname{ctg} \alpha,$$

bo $|OP|_e = y_o$, oraz analogicznie

$$|X_oT|_e = |X_oX|_e = y_o e^l \operatorname{ctg} \alpha.$$

Korzystając z tych samych trójkątów mamy również

$$|P_oX_o|_e = |OX_o|_e - |OP_o|_e = \frac{y_o e^l}{\sin \alpha} - \frac{y_o}{\sin \alpha} = \frac{y_o}{\sin \alpha} (e^l - 1)$$

Podstawiając do (3.5) trzy powyżej obliczone długości dostajemy

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{y_o^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + y_o^2 e^{2l} \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{y_o^2}{\sin^2 \alpha} (e^l - 1)^2}{2y_o \operatorname{ctg} \alpha \cdot y_o e^l \operatorname{ctg} \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + e^{2l} \cos^2 \alpha - (e^l - 1)^2}{2e^l \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha (1 + e^{2l}) - (e^l - 1)^2}{2e^l \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha (1 + e^{2l})}{2e^l \cos^2 \alpha} - \frac{(e^l - 1)^2}{2e^l \cos^2 \alpha} = \frac{e^{-l} + e^l}{2} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{(e^l - 1)^2}{2e^l} = (***) \end{aligned}$$

W powyższym dokonujemy podstawienia $\cosh(d)$ za $1/\cos \alpha$ (patrz Lemat 3.0.4).

$$\begin{aligned} (***) &= \cosh(l) - \cosh^2(d) \left(\frac{e^l + e^{-l}}{2} - 1 \right) = \cosh(l) - \cosh^2(d) (\cosh(l) - 1) = \\ &= (1 - \cosh^2(d)) \cosh(l) + \cosh^2(d) \end{aligned}$$

Zatem

$$\beta = \arccos((1 - \cosh^2(d)) \cosh(l) + \cosh^2(d))$$

Możemy teraz przystąpić do ostatecznych wyliczeń krzywizny ekwidystanty, podstawiając powyższe wyrażenie na β do (3.4). Mamy

$$\begin{aligned} K(E_d, P) &= \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{\beta(l)}{\cosh(d) \cdot l} = \\ &= \frac{1}{\cosh(d)} \lim_{l \rightarrow 0^+} \frac{\arccos((1 - \cosh^2(d)) \cosh(l) + \cosh^2(d))}{l} = (***) \end{aligned}$$

Fakt 3.2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos((1 - \cosh^2(d)) \cosh(x) + \cosh^2(d))}{x} = \sinh(d)$$

Dowód : Granica, którą chcemy wyliczyć, jest symbolem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0} \right]$, zastosujemy zatem regułę de l'Hospitala, korzystając z poniższego:

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)(1 - \cosh^2(d)) \sinh(x)}{\sqrt{1 - ((1 - \cosh^2(d)) \cosh(x) + \cosh^2(d))^2}} = \\
& = (\cosh^2(d) - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + ((1 - \cosh^2(d)) \cosh(x) + \cosh^2(d))}} \cdot \\
& \quad \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{1 - (1 - \cosh^2(d)) \cosh(x) - \cosh^2(d)}} = \\
& = \frac{\cosh^2(d) - 1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{(\cosh^2(d) - 1)(\cosh(x) - 1)}} = \\
& = \frac{\sqrt{\cosh^2(d) - 1}}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\cosh(x) - 1}} = \frac{\sinh(d)}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\cosh(x) - 1}} = \\
& = \frac{\sinh(d)}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}}} = \frac{\sinh(d)}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{2\left(\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{2}\right)^2}} = \\
& = \frac{\sinh(d)}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sinh(d)}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(x)}{\frac{1}{2} \cosh\left(\frac{x}{2}\right)} = \sinh(d)
\end{aligned}$$

Przedostatnia równość również wynika z zastosowania reguły de l'Hospitala. ■

Wykorzystujemy powyższy fakt i ostatecznie wyliczamy krzywiznę.

$$(***) = \frac{1}{\cosh(d)} \cdot \sinh(d) = \operatorname{tgh}(d)$$

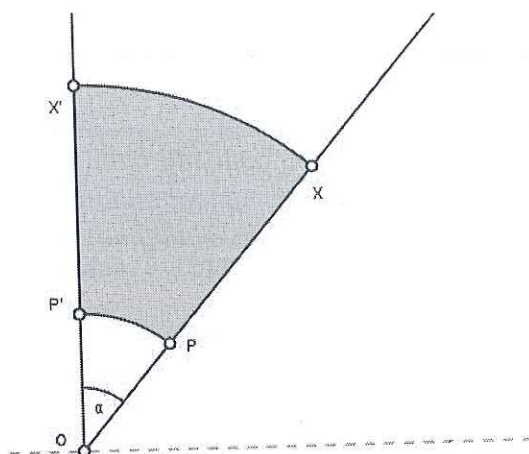
W ten sposób Twierdzenie 3.2.1 zostało uzasadnione. ■

3.3. Pole wycinka ekwidystanty

Dla skrócenia zapisu zdefiniujemy na potrzeby tej pracy figurę związaną z łukiem ekwidystanty.

Definicja 3.3.1. *Wycinkiem ekwidystantny dla jej ustalonego łuku nazywamy figurę ograniczoną przez łuk ekwidystanty, odpowiadający mu odcinek bazowy oraz dwa odcinki łączące odpowiednie końce łuku ekwidystantny i jego odcinka bazowego.*

Na przykład na Rysunku 3.3 wycinkiem ekwidystantny dla jej łuku $\smile PX$ jest figura $PXX'P'$. W tej części pracy wyprowadzimy wyrażenie na pole tego wycinka w zależności od długości l odcinka bazowego odpowiedniego łuku ekwidystantny oraz odległości d tej ekwidystantny od prostej bazowej.



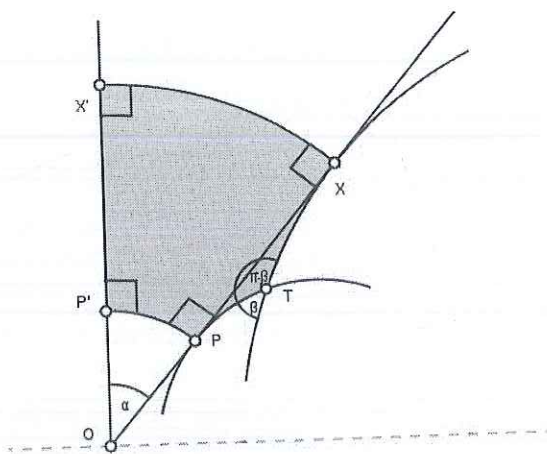
Rysunek 3.3.

Twierdzenie 3.3.2. Dla łuku ekwidystanty odległej od prostej bazowej o d , pole jej wycinka dla odcinka bazowego długości l wynosi

$$l \sinh(d)$$

Dowód : Rozważmy wycinek $PXX'P'$. Skonstruujmy dla niego dwa ciągi wielokątów. Jeden z nich $(W_n^+(l, d))$ będą stanowiły wielokąty zawierające nasz wycinek, drugi $(W_n^-(l, d))$ - wielokąty zawarte w wycinku. Wycinek ekwidystanty będzie niejako przybliżany z góry przez wielokąty $W_n^+(l, d)$ oraz z dołu przez wielokąty $W_n^-(l, d)$. Stąd, z rozważenia ciągów pól tych wielokątów i ich granic, otrzymamy pole naszego wycinka.

Najpierw zajmiemy się wielokątami o polach większych od pola wycinka.



Rysunek 3.4.

Wykreślmy styczne do ekwidystanty w punktach P i X i oznaczmy punkt ich przecięcia przez T . Wielokąt $W_1^+(l, d)$ to wielokąt $PTXX'P'$. Zauważmy, że kąt w wierzchołku T ma miarę $\pi - \beta$, gdzie β to kąt z Faktu 3.2.2, pozostałe kąty są proste. Z ogólnego wzoru na pole wielokąta hiperbolicznego mamy

$$P(W_1^+(l, d)) = 3\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{2} - (\pi - \beta) = \beta = \beta(l, d).$$

Wielokąt $W_n^+(l)$ tego ciągu będzie się składał z n wielokątów analogicznych do $PTXX'P'$, lecz odpowiadających odcinkom bazowym długości l/n . Stąd jego pole wyraża się jak poniżej

$$P(W_n^+(l, d)) = n \cdot \beta\left(\frac{l}{n}, d\right).$$

Po podstawieniu w powyższym wyrażenia na β , mamy ostatecznie

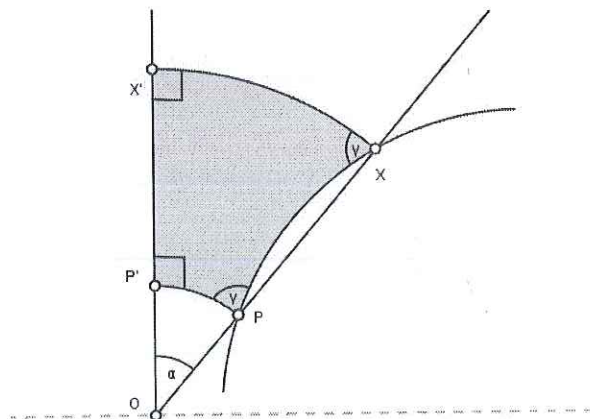
$$P(W_n^+(l, d)) = n \cdot \arccos\left(\left(1 - \cosh^2(d)\right) \cosh\left(\frac{l}{n}\right) + \cosh^2(d)\right).$$

Wyliczmy teraz granicę powyższego ciągu przy $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n^+(l, d)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \arccos\left(\left(1 - \cosh^2(d)\right) \cosh\left(\frac{l}{n}\right) + \cosh^2(d)\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot \frac{\arccos\left(\left(1 - \cosh^2(d)\right) \cosh\left(\frac{l}{n}\right) + \cosh^2(d)\right)}{\frac{l}{n}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{l}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = \\ &= l \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos\left(\left(1 - \cosh^2(d)\right) \cosh(x) + \cosh^2(d)\right)}{x} = l \sinh(d) \end{aligned}$$

Powyższa granica jest treścią Faktu 3.2.3, stąd od razu podaliśmy jej wynik, uwzględniając czynnik l .

Scharakteryzujemy teraz wielokąty $W_n^-(l, d)$. Kreślimy prostą sieczną prze-



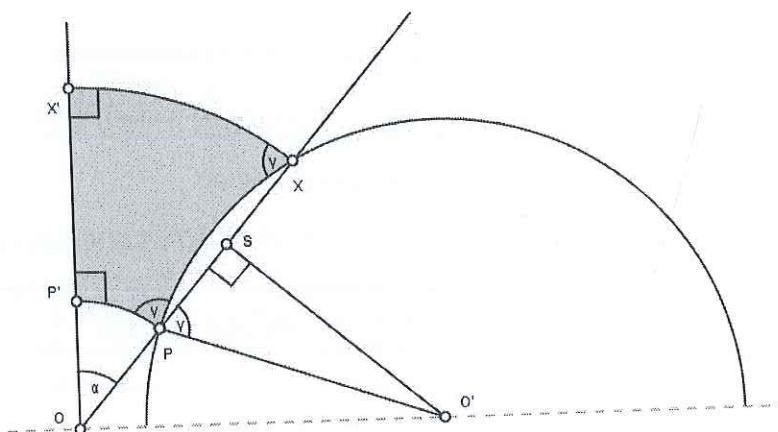
Rysunek 3.5.

chodzącą przez końce P i X rozważanego łuku ekwidystanty (reprezentowana jest w modelu przez półokrąg). Wielokąt $W_1^-(l, d)$ to wielokąt $PXX'P'$, posiadający dwa kąty proste, oraz dwa o pewnej mierze γ - kąty przy odcinku PX . Najbliższym celem jest zatem wyprowadzenie zależności na $\gamma(l, d)$.

Fakt 3.3.3. W ekwidystancie odległej od prostej bazowej o d , kąt między sieczną przechodzącą przez końce łuku ekwidystanty dla odcinka bazowego długości l , a odcinkiem łączącym jeden z końców łuku ekwidystatanty i odpowiadający mu koniec odcinka bazowego wynosi

$$\arccos\left(\frac{\operatorname{tgh}(d)(e^l - 1)}{\sqrt{(1 + e^l)^2 - 4 \operatorname{tgh}^2(d)e^l}}\right).$$

Dowód : Rozważania będziemy prowadzić na obiektach euklidesowych. Za-



Rysunek 3.6.

uważmy, że kąt o mierze γ występuje również między odcinkami PS i PO' , przy oznaczeniach z Rysunku 3.6, gdzie S jest środkiem odcinka PX . Mamy więc

$$\cos \gamma = \frac{|PS|_e}{|PO'|_e}.$$

Przypomnijmy, że

$$P = (y_0 \sin \alpha, y_0 \cos \alpha), \quad X = (y_0 e^l \sin \alpha, y_0 e^l \cos \alpha),$$

zatem

$$S = \left(y_0 \sin \alpha \frac{1 + e^l}{2}, y_0 \cos \alpha \frac{1 + e^l}{2}\right).$$

Dalej wyprowadzamy równanie prostej SO' , korzystając z tego, że jest prostopadła do prostej PX (a prosta PX ma równanie (3.1)) i przechodzi przez S . Dostajemy

$$y = -\operatorname{tg} \alpha \cdot x + \frac{y_0(1 + e^l)}{2 \cos \alpha}.$$

Podstawiając zaś do powyższego 0 za y (bo taka jest druga współrzędna O') i rozwiązując otrzymane równanie, otrzymujemy pierwszą współrzędną O' . Ostatecznie

$$O' = \left(\frac{y_0(1 + e^l)}{2 \sin \alpha}, 0\right).$$

Następnie wyliczamy $|PS|_e$ i $|PO'|_e$, korzystając ze standardowego wzoru na odległość euklidesową.

$$|PS|_e = \frac{1}{2}y_0(e^l - 1)$$

$$|PO'|_e = y_0 \sqrt{\frac{(1+e^l)^2}{4\sin^2\alpha} - e^l}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{\frac{1}{2}y_0(e^l - 1)}{y_0 \sqrt{\frac{(1+e^l)^2}{4\sin^2\alpha} - e^l}} = \frac{e^l - 1}{\sqrt{\frac{(1+e^l)^2}{\sin^2\alpha} - 4e^l}} = \\ &= \frac{\sin\alpha(e^l - 1)}{\sqrt{(1+e^l)^2 - 4\sin^2\alpha e^l}} = \frac{\operatorname{tgh}(d)(e^l - 1)}{\sqrt{(1+e^l)^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^l}} \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że $\cos\alpha = 1/\cosh(d)$ (Lemat 3.0.4). Mamy więc

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\operatorname{tgh}(d)(e^l - 1)}{\sqrt{(1+e^l)^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^l}}\right),$$

co należało pokazać. ■

Wracając do opisu pól wielokątów $W_n^-(l, d)$, dostajemy

$$P(W_1^-(l, d)) = 2\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\gamma(l, d) = \pi - 2\gamma(l, d)$$

Określmy wielokąt $W_n^-(l, d)$ jako sumę n wielokątów postaci $W_1^-(\frac{l}{n}, d)$. Jego pole wyraża się zatem jak poniżej.

$$P(W_n^-(l, d)) = n \cdot (\pi - 2\gamma(\frac{l}{n}, d))$$

Po podstawieniu w powyższym odpowiedniego wyrażenia na γ ciąg $P(W_n^-(l, d))$ przedstawia się następująco

$$P(W_n^-(l, d)) = n \cdot (\pi - 2 \arccos\left(\frac{\operatorname{tgh}(d)(e^{\frac{l}{n}} - 1)}{\sqrt{(1+e^{\frac{l}{n}})^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^{\frac{l}{n}}}}\right)).$$

Wyliczymy teraz jego granicę przy $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n^-(l, d)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\pi - 2 \arccos\left(\frac{\operatorname{tgh}(d)(e^{\frac{l}{n}} - 1)}{\sqrt{(1+e^{\frac{l}{n}})^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^{\frac{l}{n}}}}\right)) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot \frac{(\pi - 2 \arccos\left(\frac{\operatorname{tgh}(d)(e^{\frac{l}{n}} - 1)}{\sqrt{(1+e^{\frac{l}{n}})^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^{\frac{l}{n}}}}\right))}{\frac{l}{n}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{l}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} l \cdot \frac{(\pi - 2 \arccos\left(\frac{\operatorname{tgh}(d)(e^x - 1)}{\sqrt{(1+e^x)^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^x}}\right))}{x} = (****)$$

Powyższa granica jest symbolem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, wyliczymy ją stosując regułę de l'Hospitala. Przypomnijmy również wyrażenie na pochodną funkcji arcus cosinus:

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} (****) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(l \cdot \frac{(-2)(-1)}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tgh}^2(d)(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^x}}} \right) \\ &= \frac{\operatorname{tgh}(d)e^x \sqrt{(1+e^x)^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^x} - \operatorname{tgh}(d)(e^x-1) \cdot \frac{1}{2} \frac{2(1+e^x)e^x - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^x}{\sqrt{(1+e^x)^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^x}}}{(1+e^x)^2 - 4\operatorname{tgh}^2(d)e^x} = \\ &= l \cdot 2 \cdot \frac{\operatorname{tgh}(d)\sqrt{4-4\operatorname{tgh}^2(d)}}{4-4\operatorname{tgh}^2(d)} = \frac{2l\operatorname{tgh}(d)}{\sqrt{4-4\operatorname{tgh}^2(d)}} = \frac{l \frac{\sinh(d)}{\cosh d}}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2(d)}{\cosh^2(d)}}} = \\ &= \frac{l \sinh(d)}{\sqrt{\cosh^2(d) - \sinh^2(d)}} = l \sinh(d) \end{aligned}$$

Dla dowolnych naturalnych n_1 i n_2 mamy

$$W_{n_1}^-(l, d) \subset W(l, d) \subset W_{n_2}^+(l, d),$$

gdzie $W(l, d)$ oznacza wycinek ekwidystanty (odległej od prostej bazowej o d) dla odcinka bazowego l . Z monotoniczności funkcji pole otrzymujemy

$$P(W_{n_1}^-(l, d)) \leq P(W(l)) \leq P(W_{n_2}^+(l, d)).$$

Ponieważ

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P(W_{n_1}^-(l, d)) = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} P(W_{n_2}^+(l, d)) = l \sinh(d),$$

to ze znanego twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

$$P(W(l, d)) = l \sinh(d).$$

W ten sposób Twierdzenie 3.3.2 zostało udowodnione. ■

Wniosek 3.3.4. Dla ekwidystanty odległej od swojej prostej bazowej o d , pole wycinka opartego na jej łuku długości s wynosi

$$s \operatorname{tgh}(d)$$

Dowód : Rozważmy ekwidystantę odległą od prostej bazowej o d i jej łuk dowolnej długości s . Oznaczmy przez l długość odcinka bazowego dla tego łuku ekwidystanty. Wtedy z Twierdzenia 3.1.1

$$s = l \cosh(d),$$

czyli

$$l = \frac{s}{\cosh(d)}.$$

Z Twierdzenia 3.3.2 mamy też pole wycinka opartego na tym łuku (czyli dla odcinka bazowego długości l):

$$P(W(l, d)) = l \sinh(d).$$

Po podstawieniu w powyższym za l wyrażenie $s/\cosh(d)$ otrzymujemy

$$P(W(s, d)) = \frac{s}{\cosh(d)} \cdot \sinh(d) = s \operatorname{tgh}(d).$$

■

Wniosek 3.3.5. *Dla ekwidystanty o krzywiznie k pole wycinka opartego na jej łuku długości s wynosi*

$$\boxed{sk}$$

Dowód : Rozważmy ekwidystantę o krzywiznie k i jej łuk o dowolnej długości s . Oznaczmy przez d odległość tej ekwidystanty od prostej bazowej. Z Twierdzenia 3.2.1 mamy

$$\operatorname{tgh}(d) = k.$$

Podstawiając za $\operatorname{tgh}(d)$ zmienną k w $P(W(s, d))$ z Wniosku 3.3.4 otrzymujemy

$$P(W(s, k)) = sk.$$

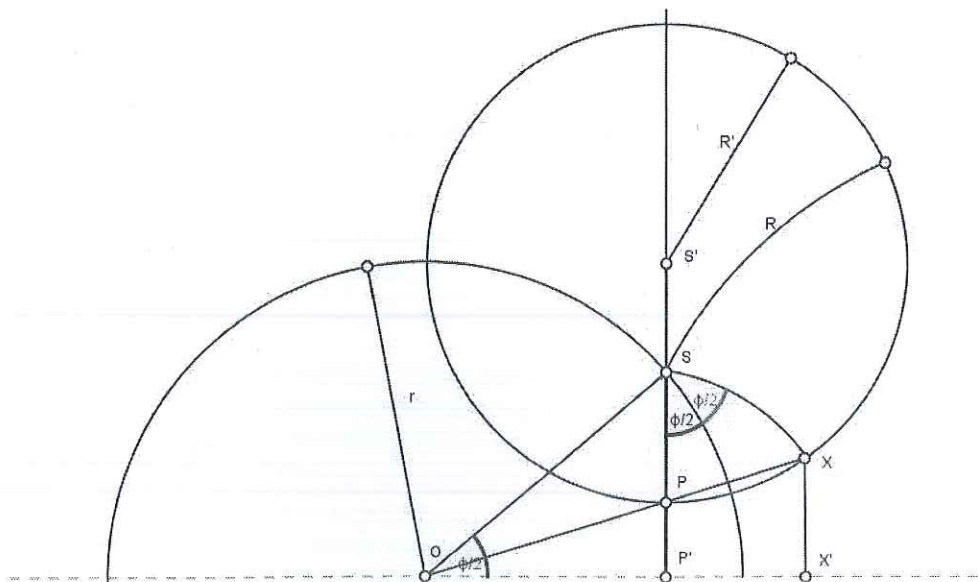
■

4. Okrąg hiperboliczny

W niniejszym rozdziale przeprowadzimy obliczenia długości okręgu hiperbolicznego, jego krzywizny w dowolnym punkcie oraz pola koła przezeń ograniczonego. W tym celu rozważmy okrąg o dowolnym promieniu długości R . Z izometryczności wszystkich okręgów o ustalonym promieniu wynika, że dla naszych rozważań możemy dowolnie wybrać jego położenie w układzie współrzędnych w modelu półpłaszczyznowym. Połóżmy zatem ten okrąg tak, by jego środek hiperboliczny S miał współrzędne $(0, e^R)$. Z ogólnego równania okręgu hiperbolicznego w modelu dostajemy:

$$O_R : x^2 + (y - e^R \cosh(R))^2 = e^{2R} \sinh^2(R) \quad (4.1)$$

Poprowadźmy teraz prostą o równaniu $x = 0$. Pomocniczo wyznaczamy współrzędne punktu P przecięcia tych dwóch krzywych, jak na Rysunku 4.1. Niech $P = (x_P, y_P)$. Oczywiście $x_P = 0$. Biorąc pod uwagę fakt, że $|SP|_h = R$, z bezpośredniego rachunku z użyciem wzoru na cosinus hiperboliczny miary odcinka, (którego wykonanie pozostawiamy Czytelnikowi) otrzymujemy $y_P = 1$, czyli $P = (0, 1)$.



Rysunek 4.1.

4.1. Współrzędne kartezjańskie punktu o zadanej współrzędnej kątowej na okręgu hiperbolicznym

Poniżej wyprowadzimy wyrażenia na odpowiednie współrzędne, zachowując ścisły związek między oznaczeniami z wprowadzenia do tego rozdziału (łącznie z Rysunkiem 4.1) a wszelkimi obiektami, o których mowa w poniższym lemacie.

Lemat 4.1.1. *Współrzędne kartezjańskie dowolnego punktu X na okręgu hiperbolicznym o promieniu R i środku w $(0, e^R)$ w zależności od kąta środkowego ϕ opartego na łuku XP , mierzonego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wynoszą*

$$X(\phi) = \left(e^R \operatorname{ctg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 1}, \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 1} \right). \quad (4.2)$$

Dowód : Niech

$$X(\phi) = (x(\phi), y(\phi)).$$

Wykreślmy dwusieczną kąta ϕ i przyjmijmy oznaczenia jak na Rysunku 4.1. Dwusieczna ta reprezentowana jest w modelu przez okrąg euklidesowy o środku w punkcie O i promieniu długości r . Zauważmy, że $|\angle SOP'| = \phi/2$ (wynika to z faktu, iż kąt między prostą styczną w punkcie S , a promieniem łączącym O z S jest prosty). Dalej z tego, że $\triangle SP'O$ jest prostokątny oraz $|SP'|_e = e^R$ (bo to rzędna punktu S), otrzymujemy

$$|OP'|_e = e^R \operatorname{ctg}\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do $\triangle PP'O$ łatwo wyliczamy

$$|OP|_e = \sqrt{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 1}.$$

Aplikując to samo twierdzenie do $\triangle SP'O$, dostajemy

$$r = |OS|_e = \sqrt{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + e^{2R}}.$$

Rozważmy przez moment euklidesową inwersję względem okręgu, który reprezentuje dwusieczną kąta ϕ . Inwersja ta jest przykładem hiperbolicznej izometrii, dokładnie jest odbiciem względem wspomnianej prostej dwusiecznej. Z faktu, iż odbicie względem dowolnej prostej hiperbolicznej przechodzącej przez środek okręgu hiperbolicznego przeprowadza ten okrąg na siebie wynika w szczególności, że obrazem punktu z okręgu musi być punkt również należący do tego okręgu. Ponadto, jako że inwersja zachowuje kąty, to jedynym możliwym obrazem punktu P może być X . Uwagi te pozwalają nam obliczyć $|OX|_e$ z definicji inwersji. Mamy

$$|OP|_e \cdot |OX|_e = r^2,$$

czyli

$$|OX|_e = \frac{r^2}{|OP|_e}.$$

Mamy zatem

$$|OX|_e = \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + e^{2R}}{\sqrt{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 1}}.$$

Wyznamy $x(\phi) = |P'X'|_e$. Dzięki równoległości odcinków PP' i XX' z twierdzenia Talesa dostajemy:

$$\frac{|OX|_e - |OP|_e}{|OP|_e} = \frac{x(\phi)}{|OP'|_e},$$

skąd otrzymujemy

$$x(\phi) = |OP'|_e \cdot \frac{|OX|_e - |OP|_e}{|OP|_e}.$$

Po podstawieniu i prostych uproszczeniach wynik przedstawia się następująco

$$x(\phi) = e^R \operatorname{ctg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 1}.$$

W podobny sposób uzyskamy wyrażenie na $y(\phi) = |XX'|_e$.

$$\frac{y(\phi)}{|PP'|_e} = \frac{|OX|_e}{|OP|_e}.$$

To jest równoważne

$$y(\phi) = |PP'|_e \cdot \frac{|OX|_e}{|OP|_e}.$$

Po wstawieniu wcześniej wyliczonych długości dostajemy

$$y(\phi) = \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 1}.$$

4.2. Długość okręgu hiperbolicznego

Znajdziemy najpierw długość łuku okręgu hiperbolicznego o promieniu R , który wyznaczony jest przez dowolny kąt środkowy ϕ . Z izometryczności wszystkich takich łuków dostajemy możliwość rozpatrzenia dogodnego dla nas położenia takiego łuku. Rozważać będziemy zatem łuk $\cap PX$ (Rys.4.1) dla kąta środkowego $\angle PSX$ mierzonego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Twierdzenie 4.2.1. *Dla dowolnego kąta środkowego ϕ w okręgu hiperbolicznym o promieniu R długość odpowiadającego mu łuku wynosi:*

$$\boxed{\phi \cdot \sinh(R)}.$$

Dla dowodu tego twierdzenia udowodnimy wcześniej poniższy fakt.

Fakt 4.2.2. Dla dowolnego kąta środkowego ϕ w okręgu hiperbolicznym o promieniu R długość odpowiadającej mu cięciwy wynosi

$$\operatorname{ar} \cosh\left(1 + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)(\cosh(2R) - 1)\right).$$

Dowód : Obliczmy długość cięciwy PX korzystając ze wzoru na cosinus hiperboliczny miary odcinka. Mamy

$$\cosh(|PX|_h) = 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1y_2},$$

gdzie $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (x(\phi), y(\phi))$. Po wstawieniu odpowiednich współrzędnych otrzymujemy następujący ciąg równości.

$$\begin{aligned} \cosh(|PX|_h) &= 1 + \frac{\left(\frac{e^{2R}-1}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1} \cdot e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})\right)^2 + \left(1 - \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1}\right)^2}{2 \cdot \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1}} = \\ &= 1 + \frac{\left(\frac{e^{2R}-1}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1} \cdot e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})\right)^2 + \left(\frac{e^{2R}-1}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1}\right)^2}{2 \cdot \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1}} = \\ &= 1 + \frac{(e^{2R}-1)^2(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)}{2(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+e^{2R})(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)} = 1 + \frac{(e^{2R}-1)^2}{2(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+e^{2R})} = \\ &= \frac{2e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+e^{4R}+1}{2e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)} = \frac{2e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})}{2e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)} + \frac{e^{4R}+1}{2e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})}{\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1} + \frac{e^{2R}+e^{-2R}}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1} = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cosh(2R) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \\ &= 1 - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cosh(2R) = 1 + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)(\cosh(2R) - 1) \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy zatem

$$\cosh(|PX|_h) = 1 + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)(\cosh(2R) - 1),$$

skąd

$$|PX|_h = \operatorname{ar} \cosh\left(1 + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)(\cosh(2R) - 1)\right). \quad \blacksquare$$

Dowód Twierdzenia 4.2.1: Rozważmy łuk $\frown PX$ i obliczmy z definicji jego długość. Najpierw dzielimy go na n przystających łuków wyznaczonych przez kąty środkowe o mierze ϕ/n . Dla każdego takiego łuku obliczamy długość jego cięciwy, dalej sumujemy te długości i przechodzimy z takim wyrażeniem do

granicy przy $n \rightarrow \infty$. Jako, że wszystkie takie cięgiwy są równej miary, to wspomniana suma wyraża się iloczynem n i długości jednej z nich. Opisany powyżej "zabieg" sprowadza się do następujących obliczeń.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ar \cosh\left(1 + \sin^2\left(\frac{\phi}{2n}\right)(\cosh(2R) - 1)\right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \cdot \frac{\ar \cosh\left(1 + \sin^2\left(\frac{\phi}{2n}\right)(\cosh(2R) - 1)\right)}{\frac{\phi}{n}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{\phi}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = \\ & = \phi \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ar \cosh\left(1 + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(\cosh(2R) - 1)\right)}{x} = (*) \end{aligned}$$

Ostatnia granica przyjmuje postać symbolu nieoznaczonego postaci $\left[\frac{0}{0}\right]$. Obliczenia zatem kontynuujemy stosując regułę de l'Hospitala, różniczkując licznik i mianownik. Przypomnijmy tu, że pochodna funkcji arcus cosinus hiperboliczny wyraża się następująco:

$$\frac{d}{dx} \ar \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Zgodnie z powyższymi uwagami mamy dalej

$$\begin{aligned} (*) & = \phi \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cosh(2R) - 1) \cdot 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(\cosh(2R) - 1))^2 - 1}} = \\ & = \phi \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cosh(2R) - 1) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(\cosh(2R) - 1)} \sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(\cosh(2R) - 1) + 2}} = \\ & = \phi \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cosh(2R) - 1) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{(\cosh(2R) - 1)} \sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(\cosh(2R) - 1) + 2}} = \\ & = \phi \cdot \frac{\cosh(2R) - 1}{\sqrt{\cosh(2R) - 1} \sqrt{2}} = \frac{\phi}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\cosh(2R) - 1} = \\ & \frac{\phi}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{e^{2R} + e^{-2R}}{2} - 1} = \frac{\phi}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{e^{2R} + e^{-2R} - 2}{2}} = \\ & = \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{e^R - e^{-R}}{2}\right)^2} = \phi \cdot \sinh(R) \end{aligned}$$

To kończy dowód twierdzenia. ■

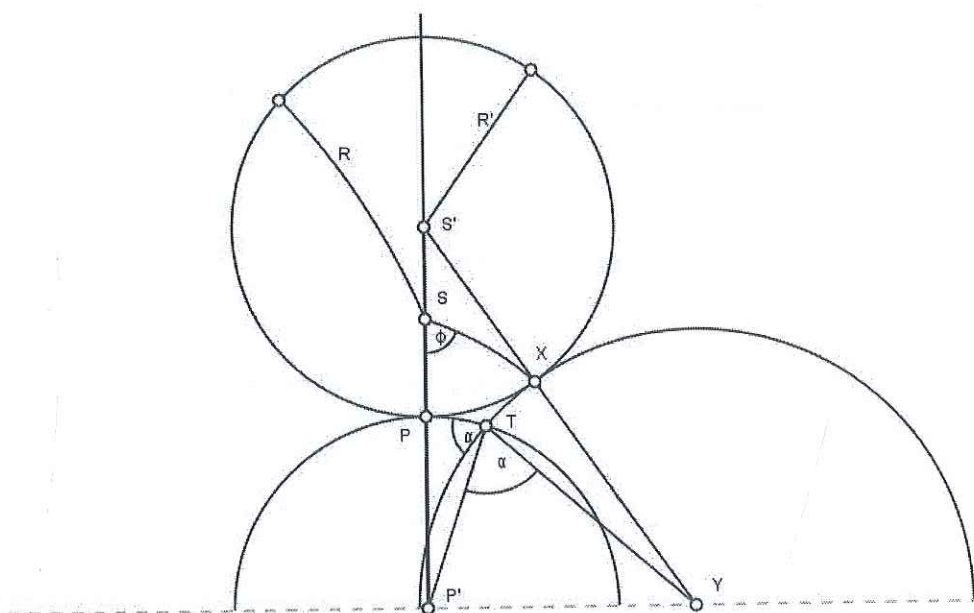
Wniosek 4.2.3. Długość okręgu hiperbolicznego o promieniu R wynosi

$$\boxed{2\pi \cdot \sinh(R)}.$$

Dowód Wniosku 4.2.3

Długość okręgu dostajemy stosując Twierdzenie 4.2.1 dla $\phi = 2\pi$, co wynika z faktu, że okrąg to łuk dla kąta środkowego 2π . ■

4.3. Krzywizna okręgu hiperbolicznego



Rysunek 4.2.

Twierdzenie 4.3.1. *Krzywizna w dowolnym punkcie okręgu hiperbolicznego o promieniu R wynosi*

$$\boxed{\operatorname{ctgh}(R)}$$

Dowód : Wiemy, że każdy punkt okręgu hiperbolicznego możemy przekształcić na dowolnie wybrany inny punkt tego samego okręgu przez odpowiednio dobraną izometrię, tak że i cały okrąg przejdzie na siebie. Krzywizna okręgu hiperbolicznego jest więc jednakowa bez względu na wybór punktu. Rozważmy zatem umiejscowienie okręgu O_R jak na Rys. 4.1 i zbadajmy z definicji jego krzywiznę w punkcie P (ozn. $K(O_R, P)$) - patrz Rys. 4.2. Mamy

$$K(O_R, P) = \lim_{X \rightarrow P} \frac{\alpha(X)}{|\cap PX|_h},$$

gdzie $\alpha(X) = \alpha$ to kąt między stycznymi do okręgu w punktach P i X . Ponieważ miara α zależy od położenia punktu X na okręgu, zaś to położenie jest zdeterminowane przez kąt środkowy ϕ , więc α jest zdeterminowana przez miarę ϕ ($\alpha = \alpha(\phi)$). Zauważmy również, że $X \rightarrow P$ dokładnie wtedy, gdy $\phi \rightarrow 0^+$. Z Twierdzenia 4.2.1 mamy też długość łuku PX : $\phi \cdot \sinh(R)$. Poczynione uwagi pozwalają nam przepisać wcześniejszą równość do postaci:

$$K(O_R, P) = \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(\phi)}{\phi \cdot \sinh(R)}. \quad (4.3)$$

Musimy zatem znaleźć wyrażenie na kąt α w zależności od ϕ .

Fakt 4.3.2. *Miara kąta między stycznymi do okręgu hiperbolicznego o promieniu R w końcach ramion jego kąta środkowego o mierze ϕ wynosi*

$$\arccos\left(1 - 2 \cosh(R) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right).$$

Dowód : Poczyńmy następujące spostrzeżenie. Kąt α to kąt między hiperbolicznymi prostymi, reprezentowanymi w modelu przez przecinające się okręgi euklidesowe. Jego znalezienie możemy więc oprzeć na rozważaniu obiektów euklidesowych w modelu. Kąt między okręgami euklidesowymi równy jest kątowi między promieniami tych okręgów poprowadzonymi z punktu ich przecięcia (u nas to punkt T). Zatem

$$\alpha = |\angle P'TY|.$$

Miarę tego kąta obliczymy stosując twierdzenie kosinusów do $\triangle P'TY$.

Mamy

$$|P'Y|_e^2 = |P'T|_e^2 + |TY|_e^2 - 2|P'T|_e|TY|_e \cos(\alpha),$$

skąd

$$\cos(\alpha) = \frac{|P'T|_e^2 + |TY|_e^2 - |P'Y|_e^2}{2|P'T|_e|TY|_e}. \quad (4.4)$$

Widzimy, że

$$|P'T|_e = |P'P|_e = 1. \quad (4.5)$$

Dalej (np. z podobieństwa trójkątów)

$$\frac{|S'P'|_e - y(\phi)}{|XS'|_e} = \frac{y(\phi)}{|XY|_e},$$

z czego po przekształceniu otrzymujemy

$$|XY|_e = \frac{|XS'|_e y(\phi)}{|S'P'|_e - y(\phi)}.$$

Ponieważ

$$|TY|_e = |XY|_e$$

oraz

$$|S'P'|_e = e^R \cosh(R), \quad |XS'|_e = e^R \sinh(R)$$

(patrz (4.1)), to

$$|TY|_e = \frac{e^R \sinh(R) y(\phi)}{e^R \cosh(R) - y(\phi)}.$$

W podobny sposób uzyskujemy wyrażenie na $|P'Y|_e$:

$$|P'Y|_e = \frac{e^R \cosh(R) x(\phi)}{e^R \cosh(R) - y(\phi)}.$$

Dokonyamy teraz przekształcenia dwu powyższych wyrażeń, wykorzystując znaną wcześniej parametryzację punktu $X(\phi)$ (patrz Lemat 4.1.1) oraz definicję funkcji hiperbolicznych sinus oraz cosinus.

$$\begin{aligned}
 |TY|_e &= \frac{e^R \sinh(R)y(\phi)}{e^R \cosh(R) - y(\phi)} = \frac{e^R \cdot \frac{e^R - e^{-R}}{2} \cdot \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1}}{e^R \cdot \frac{e^R + e^{-R}}{2} - \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1}} = \\
 &= \frac{e^{2R}(e^{2R} - 1)(\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2}) + 1)}{(e^{2R} + 1)(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1) - 2e^{2R}(\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2}) + 1)} = \\
 &= \frac{e^{2R}(e^{2R} - 1)(\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2}) + 1)}{e^{4R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - e^{2R} + 1} = \\
 &= \frac{e^{2R}(e^{2R} - 1)(\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2}) + 1)}{(e^{2R} - 1)(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)} = \frac{e^{2R}(\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2}) + 1)}{(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$|TY|_e = \frac{e^{2R}(\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2}) + 1)}{(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)}. \quad (4.6)$$

Podobnie poczynamy z $|P'Y|_e$.

$$\begin{aligned}
 |P'Y|_e &= \frac{e^R \cosh(R)x(\phi)}{e^R \cosh(R) - y(\phi)} = \frac{e^R \cdot \frac{e^R + e^{-R}}{2} \cdot \frac{e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})(e^{2R} - 1)}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1}}{e^R \cdot \frac{e^R + e^{-R}}{2} - \frac{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + e^{2R}}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1}} = \\
 &= \frac{(e^{4R} - 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{(e^{2R} + 1)(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1) - 2e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)} = \\
 &= \frac{(e^{4R} - 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{e^{4R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + e^{2R} + e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1 - 2e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 2e^{2R}} = \\
 &= \frac{(e^{4R} - 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{e^{4R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - e^{2R} + 1} = \frac{(e^{4R} - 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})(e^{2R} - 1) - (e^{2R} - 1)} = \\
 &= \frac{(e^{2R} - 1)(e^{2R} + 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{(e^{2R} - 1)(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)} = \frac{(e^{2R} + 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1}
 \end{aligned}$$

Podsumowując

$$|P'Y|_e = \frac{(e^{2R} + 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1}. \quad (4.7)$$

Podstawmy teraz znalezione długości boków trójkąta $\triangle P'TY$ ((4.5), (4.6), (4.7)) do wyrażenia (4.4) na cosinus kąta α .

Otrzymamy

$$\cos(\alpha) = \frac{1^2 + \left(\frac{e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1}\right)^2 - \left(\frac{(e^{2R} + 1)e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \frac{e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)^2 + e^{4R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)^2 - (e^{2R} + 1)^2 e^{2R} \operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2}}{(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)^2} = \\
&= \frac{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1) (e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)}{(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)^2} = \\
&= \frac{(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)^2 + e^{4R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)^2 - (e^{2R} + 1)^2 e^{2R} \operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2}}{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1) (e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)} = \\
&= \frac{2e^{4R} \operatorname{ctg}^4 \frac{\phi}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2} (-e^{6R} - 3e^{2R}) + e^{4R} + 1}{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1) (e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)} = \\
&= \frac{2e^{4R} \operatorname{ctg}^4 \frac{\phi}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2} (-e^{6R} - 3e^{2R}) + e^{4R} + 1}{2e^{4R} \operatorname{ctg}^4 \frac{\phi}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2} (2e^{4R} - 2e^{2R}) - 2e^{2R}} = \\
&= 1 + \frac{-\operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2} (-e^{6R} - 2e^{4R} - e^{2R}) + e^{4R} + 2e^{2R} + 1}{2e^{4R} \operatorname{ctg}^4 \frac{\phi}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2} (2e^{4R} - 2e^{2R}) - 2e^{2R}} = \\
&= 1 + \frac{(e^{2R} + 1)^2 - e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) (e^{2R} + 1)^2}{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1) (e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)} = \\
&= 1 - \frac{(e^{2R} + 1)^2 (e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)}{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1) (e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) - 1)} = 1 - \frac{(e^{2R} + 1)^2}{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)} = \\
&= 1 - \frac{(2e^R \frac{e^R + e^{-R}}{2})^2}{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)} = 1 - \frac{4e^{2R} \cosh^2(R)}{2e^{2R} (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2}) + 1)} = \\
&= 1 - \frac{2 \cosh^2(R)}{\frac{\cos^2(\frac{\phi}{2}) + \sin^2(\frac{\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\phi}{2})}} = 1 - 2 \cosh(R) \sin^2(\frac{\phi}{2})
\end{aligned}$$

Podsumowując

$$\cos(\alpha) = 1 - 2 \cosh(R) \sin^2(\frac{\phi}{2}),$$

zatem

$$\alpha = \alpha(\phi) = \arccos(1 - 2 \cosh(R) \sin^2(\frac{\phi}{2})),$$

co kończy dowód faktu. ■

Wstawiamy teraz otrzymaną wielkość $\alpha(\phi)$ do wyrażenia (4.3) i wyliczamy krzywiznę jak poniżej.

$$\begin{aligned}
K(O_R, P) &= \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1 - 2 \cosh(R) \sin^2(\frac{\phi}{2}))}{\phi \cdot \sinh(R)} = \\
&= \frac{1}{\sinh(R)} \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1 - 2 \cosh(R) \sin^2(\frac{\phi}{2}))}{\phi} = (***)
\end{aligned}$$

Fakt 4.3.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1 - 2 \cosh(R) \sin^2(\frac{x}{2}))}{x} = \cosh(R)$$

Dowód : Powyższa granica jest symbolem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, obliczamy ją stosując regułę de l'Hospitala. Dla przypomnienia:

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)(-2 \cosh^2(R)) \cdot 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - (1 - 2 \cosh^2(R) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right))^2}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cosh^2(R) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{(1 - 1 + 2 \cosh^2(R) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right))(1 + 1 - 2 \cosh^2(R) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right))}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cosh^2(R) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4 \cosh^2(R) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(1 - \cosh^2(R) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right))}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cosh^2(R) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cosh(R) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{1 - \cosh^2(R) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(R) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1 - \cosh^2(R) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \cosh(R) \end{aligned}$$

Korzystając z powyższego faktu, wyliczamy krzywiznę.

$$(\star\star) = \frac{1}{\sinh(R)} \cdot \cosh(R) = \operatorname{ctgh}(R)$$

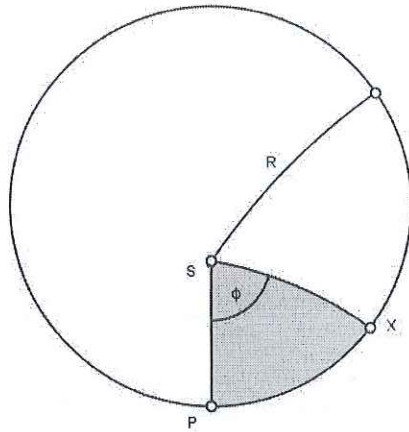
Twierdzenie 4.3.1 zostało udowodnione.

4.4. Pole koła hiperbolicznego

Rozwiążemy od razu problem bardziej ogólny, a mianowicie wyznaczmy pole wycinka kołowego dla okręgu o promieniu R i dowolnego kąta środkowego ϕ , który ten wycinek wyznacza.

Twierdzenie 4.4.1. *W kole hiperbolicznym o promieniu R pole wycinka kołowego dla dowolnego kąta środkowego ϕ wynosi*

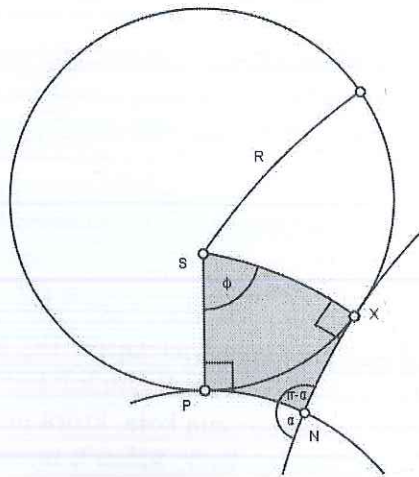
$$2\phi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right)$$



Rysunek 4.3.

Dowód : Przywołajmy sytuację z Rysunku 4.1 i rozważmy (mniejszy) z wycinków PSX (patrz Rys. 4.3). W celu obliczenia jego pola skonstruujemy dwa ciągi wielokątów, jeden będą stanowiły wielokąty o polach większych ($W_n^+(\phi, R)$), drugi - wielokąty o polach mniejszych ($W_n^-(\phi, R)$) od pola rozważanego wycinka. Dokładniej, interesować nas będą dwa ciągi liczbowe - ciągi pól tych wielokątów, dla których pokażemy, że posiadają tę samą granicę. Dalej korzystając z monotoniczności funkcji "pole" oraz znanego twierdzenia o trzech ciągach, wyliczymy pole omawianego wycinka kołowego.

Opiszmy najpierw wielokąt $W_n^+(\phi, R)$. Wielokąt $W_1^+(\phi, R)$ to zacienio-



Rysunek 4.4.

wana figura $SPNX$ na Rys. 4.4. Jego boki stanowią dwa ramiona kąta środkowego ϕ oraz dwa odcinki stycznych do okręgu w końcach tych ramion. Wielokąt ten ma cztery kąty: ϕ , dwa proste (bo taki jest zawsze kąt między

promieniem okręgu a styczną w końcu tego promienia) oraz kąt o mierze $\pi - \alpha$, gdzie α to kąt z Faktu 4.3.2, zależny od ϕ . Ze wzoru na pole wielokąta hiperbolicznego mamy

$$P(W_1^+(\phi, R)) = 2\pi - (\phi + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + (\pi - \alpha(\phi))).$$

Po uproszczeniu i odpowiednim podstawieniu za α otrzymujemy

$$P(W_1^+(\phi, R)) = \arccos(1 - 2 \cosh^2(R) \sin^2(\frac{\phi}{2})) - \phi.$$

Wielokąt $W_n^+(\phi, R)$ będzie składał się z n wielokątów analogicznych do W_1^+ , ale zbudowanych dla kątów środkowych o mierze ϕ/n . Jego pole wyliczamy zatem jak poniżej.

$$P(W_n^+(\phi, R)) = n(\arccos(1 - 2 \cosh^2(R) \sin^2(\frac{\phi}{2n})) - \frac{\phi}{n})$$

Wyliczmy granicę ciągu $P(W_n^+(\phi, R))$ przy $n \rightarrow \infty$. Mamy

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n(\arccos(1 - 2 \cosh^2(R) \sin^2(\frac{\phi}{2n})) - \frac{\phi}{n}) = \\ & = -\phi + \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \cdot \frac{\arccos(1 - 2 \cosh^2(R) \sin^2(\frac{\phi}{2n}))}{\frac{\phi}{n}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{\phi}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = \\ & = -\phi + \phi \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1 - 2 \cosh^2(R) \sin^2(\frac{x}{2}))}{x} = (***) \end{aligned}$$

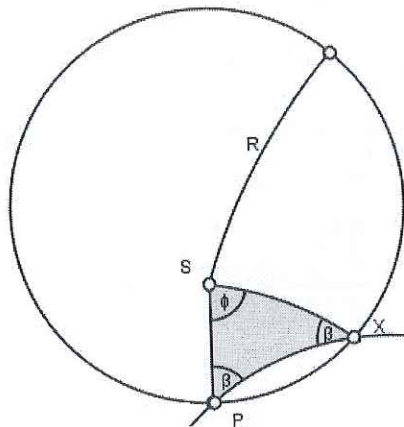
Granica w powyższym wyrażeniu to granica z Faktu 4.3.3. Uwzględniając składnik $-\phi$ oraz czynnik ϕ , dostajemy

$$\begin{aligned} (***) & = -\phi + \phi \cosh(R) = \phi(\cosh(R) - 1) = \\ & = \phi \left(\frac{e^R + e^{-R} - 2}{2} \right) = 2\phi \left(\frac{e^{\frac{R}{2}} - e^{-\frac{R}{2}}}{2} \right)^2 = \\ & = 2\phi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right) \end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz opisaniem ciągu wielokątów $W_n^-(\phi, R)$ i ich pól. Wielokąt $W_1^-(\phi, R)$ to zacieniowana figura na Rysunku 4.5. ograniczona dwoma ramionami kąta środkowego ϕ oraz sieczną koła, która przechodzi przez końce ramion wycinka. Posiada zatem trzy kąty: jeden o mierze ϕ i dwa o pewnej mierze β (oczywiście $\beta = \beta(\phi)$), którą musimy wyliczyć.

Fakt 4.4.2. W kole hiperbolicznym o promieniu R sieczna przechodząca przez końce ramion kąta środkowego ϕ tworzy z każdym z tych promieni kąt o mierze

$$\arctg\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\phi}{2}) \cosh(R)}\right).$$



Rysunek 4.5.

Dowód : Prosta sieczna, o której mowa w treści lematu, reprezentowana jest w modelu przez euklidesowy okrąg - patrz Rys. 4.6. Oznaczmy jego środek przez $O = (x_O, y_O)$. Oczywiście $y_O = 0$. Wyznamy x_O , prowadząc rozważania na obiektach euklidesowych w modelu. Punkt O leży na prostej $S'O'$, gdzie O' jest środkiem odcinka PX . Stąd

$$O' = \left(\frac{x(\phi)}{2}, \frac{y(\phi) + 1}{2} \right).$$

Przypomnijmy (patrz: równanie (4.1)), że

$$S' = (0, e^R \cosh(R)).$$

Łatwo wyliczyć, że równanie prostej przechodzącej przez te dwa punkty ma postać

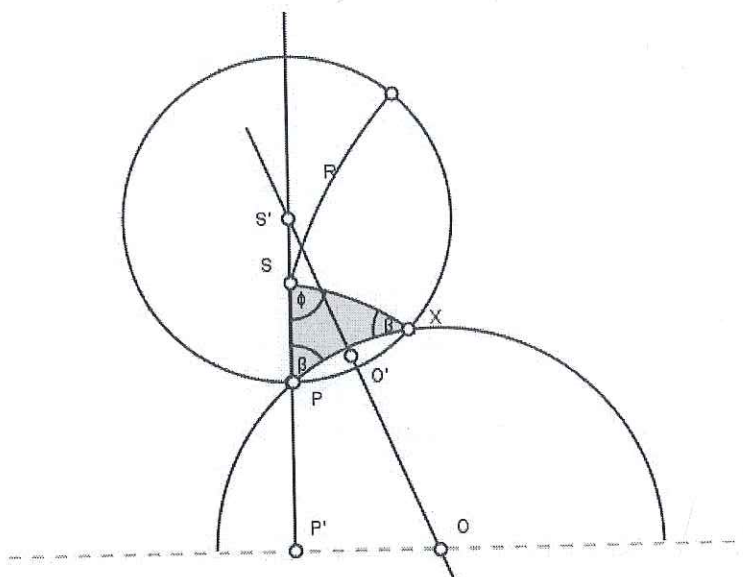
$$y = \frac{y(\phi) + 1 - 2e^R \cosh(R)}{x(\phi)} x + e^R \cosh(R).$$

Aby wyliczyć x_O podstawiamy w powyższym równaniu 0 za y i otrzymujemy

$$x_O = \frac{x(\phi)e^R \cosh(R)}{2e^R \cosh(R) - y(\phi) - 1}.$$

Następnie przekształcimy powyższe wyrażenie, wstawiając na początku współrzędne punktu $X(\phi)$.

$$\begin{aligned} x_O &= \frac{\frac{e^R \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})(e^{2R}-1)}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1} \cdot e^R \cosh(R)}{\frac{2e^R(e^R+e^{-R})}{2} - \frac{e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1} - 1} = \\ &= \frac{\frac{e^{2R} \operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})(e^{2R}-1) \cosh(R)}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1}}{\frac{e^{2R}(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1) - e^{2R}(\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)}{e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1}} = \frac{\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})(e^{2R}-1) \cosh(R)}{(e^{2R} \operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1) - (\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})+1)} = \end{aligned}$$



Rysunek 4.6.

$$= \frac{\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})(e^{2R} - 1) \cosh(R)}{\operatorname{ctg}^2(\frac{\phi}{2})(e^{2R} - 1)} = \frac{\cosh(R)}{\operatorname{ctg}(\frac{\phi}{2})} = \operatorname{tg}(\frac{\phi}{2}) \cosh(R)$$

Zauważmy następnie, że miarę β ma również $\angle POP'$. Zatem

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{|PP'|_e}{|P'O|_e} = \frac{1}{x_O} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\phi}{2}) \cosh(R)},$$

czyli

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\phi}{2}) \cosh(R)}\right).$$

Fakt został udowodniony. ■

Możemy teraz wyliczyć $P(W_1^-(\phi, R))$.

$$P(W_1^-(\phi, R)) = \pi - (\phi + 2\beta) = \pi - \phi - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\phi}{2}) \cosh(R)}\right)$$

Wielokąt $W_n^-(\phi, R)$ będzie sumą n wielokątów postaci $W_n^-(\phi/n, R)$. Jego pole wynosi zatem

$$P(W_n^-(\phi, R)) = n\left(\pi - \frac{\phi}{n} - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\phi}{2n}) \cosh(R)}\right)\right).$$

Wyliczmy i teraz odpowiednią granicę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n^-(\phi, R)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\pi - \frac{\phi}{n} - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\phi}{2n}) \cosh(R)}\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \frac{\pi - \frac{\phi}{n} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2n}\right) \cosh(R)}\right)}{\frac{\phi}{n}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{\phi}{n} \\ n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = \\
&= \phi \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi - x - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cosh(R)}\right)}{x} = (\star \star \star)
\end{aligned}$$

Powyzsza granica jest symbolem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, zastosujemy zatem regule de l'Hospitala. Przypomnijmy tez wyrazenie na pochodna funkcji arcus tangens.

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}
(\star \star \star) &= \phi \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-1 - 2 \cdot \frac{(-1) \cdot \frac{1}{(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cosh(R))^2} \cdot \cosh(R) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cosh(R)}\right)^2}\right) = \\
&= \phi \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cosh(R)}{\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cosh^2(R)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \cosh^2(R)+1}} - 1\right) = \phi \lim_{x \rightarrow 0^+} \cosh(R) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) (\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \cosh^2(R) + 1)} - 1 = \\
&= \phi (\cosh(R) - 1) = 2\phi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right)
\end{aligned}$$

Na koniec zauwazmy, ze dla dowolnych naturalnych n_1 i n_2 zachodzi

$$W_{n_1}^-(\phi, R) \subset W(\phi, R) \subset W_{n_2}^+(\phi, R),$$

gdzie $W(\phi, R)$ oznacza wycinek kola hiperbolicznego o promieniu R . Dalej z monotonicznosci funkcji pole otrzymujemy

$$P(W_{n_1}^-(\phi, R)) \leq P(W(\phi, R)) \leq P(W_{n_2}^+(\phi, R)).$$

Ostatecznie, jako ze

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P(W_{n_1}^-(\phi, R)) = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} P(W_{n_2}^+(\phi, R)) = 2\phi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right),$$

to z twierdzenia o trzech ciagach rowniez

$$P(W(\phi, R)) = 2\phi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right),$$

co konczy dowod Twierdzenia 4.4.1 ■

Wniosek 4.4.3. Pole hiperbolicznego kola o promieniu R wynosi

$$\boxed{4\pi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right)}$$

Dowód Wniosku 4.4.3

Z tego, że koło jest wycinkiem dla kąta środkowego $\phi = 2\pi$ oraz z Twierdzenia 4.4.1 od razu dostajemy tezę wniosku. ■

Wniosek 4.4.4. *Pole wycinka koła hiperbolicznego o promieniu R opartego na łuku długości s wynosi*

$$s\left(\operatorname{ctgh}(R) - \frac{1}{\sinh(R)}\right)$$

Dowód : Rozważmy koło o promieniu R i jego łuk dowolnej długości s . Oznaczmy przez ϕ kąt środkowy tego koła odpowiadający łukowi s . Z Twierdzenia 4.2.1 mamy

$$s = \phi \sinh(R),$$

czyli

$$\phi = \frac{s}{\sinh(R)}.$$

Ponadto z Twierdzenia 4.4.1 pole wycinka opartego na tym łuku (czyli dla kąta środkowego ϕ) wynosi

$$P(W(\phi, R)) = 2\phi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right) = \phi(\cosh(R) - 1).$$

podstawiając w powyższym za ϕ wyrażenie $s/\sinh(R)$ dostajemy

$$P(W(s, R)) = \frac{s}{\sinh(R)}(\cosh(R) - 1) = s\left(\operatorname{ctgh}(R) - \frac{1}{\sinh(R)}\right). \quad \blacksquare$$

Wniosek 4.4.5. *Dla koła hiperbolicznego o krzywiznie k brzegowego okręgu pole jego wycinka opartego na łuku długości s wynosi*

$$s(k - \sqrt{k^2 - 1})$$

Dowód : Rozważmy koło hiperboliczne z okręgiem brzegowym o krzywiznie k i jego łuk dowolnej długości s . Oznaczmy przez R promień tego okręgu. Wtedy z Twierdzenia 4.3.1

$$k = \operatorname{ctgh}(R).$$

Wyraźmy pomocniczo wyrażenie $1/\sinh(R)$ przez $\operatorname{ctgh}(R)$. Mamy

$$\cosh^2(R) - \sinh^2(R) = 1$$

oraz

$$\operatorname{ctgh}(R) = \frac{\cosh(R)}{\sinh(R)}.$$

Z dwóch powyższych wyrażeń wyliczamy

$$\operatorname{ctgh}^2(R) = \frac{\cosh^2(R)}{\sinh^2(R)} = \frac{\sinh^2(R) + 1}{\sinh^2(R)} = 1 + \frac{1}{\sinh^2(R)},$$

skąd

$$\frac{1}{\sinh^2(R)} = \operatorname{ctgh}^2(R) - 1,$$

czyli

$$\frac{1}{\sinh(R)} = \sqrt{\operatorname{ctgh}^2(R) - 1}.$$

Z Wniosku 4.4.4 mamy

$$P(W(s, R)) = s\left(\operatorname{ctgh}(R) - \frac{1}{\sinh(R)}\right) = s\left(\operatorname{ctgh}(R) - \sqrt{\operatorname{ctgh}^2(R) - 1}\right).$$

Po podstawieniu w powyższym za $\operatorname{ctgh}(R)$ zmienną k dostajemy

$$P(W(s, R)) = s(k - \sqrt{k^2 - 1}).$$

■

5. Uwagi końcowe

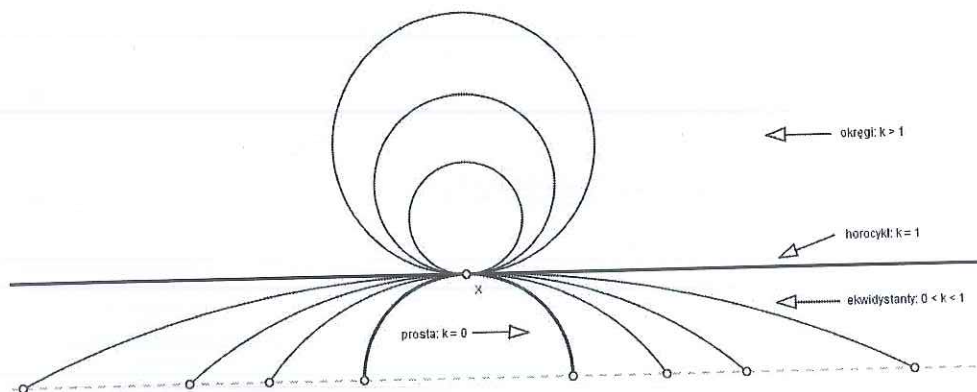
W rozdziale tym przedstawimy trzy twierdzenia, które w pewnym sensie łączą wszystkie rozważania i obliczenia przeprowadzone w tej pracy. Pierwsze dwa dotyczą krzywizny krzywych kołowych.

Twierdzenie 5.0.6. *Dla dowolnego $k \geq 0$ istnieje krzywa kołowa o krzywiznie k .*

Dowód : Ustalmy dowolną krzywiznę $k \geq 0$.

- Jeśli $k = 0$ to rozważamy prostą. Krzywizna prostej wynosi 0, co wprost wynika z definicji krzywizny (styczne do prostej są tą prostą, więc tworzą kąt zerowy).
 - Jeśli $0 < k < 1$, to rozważamy ekwidystantę odległą od swojej prostej bazowej o $\operatorname{ar} \operatorname{tgh}(k)$. Wtedy, z Twierdzenia 3.2.1, krzywizna ekwidystanty wynosi $\operatorname{tgh}(\operatorname{ar} \operatorname{tgh}(k)) = k$, czyli tyle ile żądamy.
 - Jeśli $k = 1$, to rozważamy horocykl. Jego krzywizna wynosi właśnie 1, o czym mówi Twierdzenie 2.2.1.
 - Jeśli zaś $k > 1$, to rozważamy okrąg o promieniu $\operatorname{ar} \operatorname{atgh}(k)$. W świetle Twierdzenia 4.3.1 jego krzywizna wynosi wtedy $\operatorname{ctgh}(\operatorname{ar} \operatorname{ctgh}(k)) = k$.
- W ten sposób wyczerpaliśmy wszystkie możliwości na wartość krzywizny. ■

Poniżej przedstawiamy Rysunek 5.1 obrazujący Twierdzenie 5.0.6 z dodatkowym warunkiem styczności wszystkich rozważanych krzywych kołowych do prostej w jej ustalonym punkcie X . Prawdziwe jest też następane Twierdzenie 5.0.7, którego dowód pomijamy ze względu na to, iż wymaga bardziej



Rysunek 5.1.

nie 5.0.7, którego dowód pomijamy ze względu na to, iż wymaga bardziej

zaawansowanych narzędzi matematycznych, wykraczających poza standardy tej pracy.

Twierdzenie 5.0.7. *Proste, ekwidystanty, horocykle i okręgi są w geometrii hiperbolicznej jedyne krzywymi o stałej krzywiznie.*

Ostatnie ciekawe spostrzeżenie odnoszące się do krzywych kołowych łączy wszystkie wyliczane atrybuty trzech krzywych kołowych jednocześnie.

Twierdzenie 5.0.8. *Dla krzywych kołowych w geometrii hiperbolicznej pole wycinka opartego na łuku ustalonej długości s jest funkcją ciągłą zmiennej k , oznaczającej krzywiznę krzywej zawierającej ten łuk.*

Dowód : Niech $P_s(k) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ będzie funkcją zmiennej k , przyporządkowującą liczbie k pole wycinka, który odpowiada łukowi długości s krzywej kołowej o krzywiznie k , tzn. $P_s(k) = P(W(s, k))$. Wtedy z Twierdzenia 2.3.2 oraz Wniosku 3.3.5 i Wniosku 4.4.5 mamy:

$$P_s(k) = \begin{cases} sk & 0 < k < 1 \\ s & k = 1 \\ s(k - \sqrt{k^2 - 1}) & k > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} sk & 0 < k \leq 1 \\ s(k - \sqrt{k^2 - 1}) & k > 1 \end{cases}.$$

Obydwie funkcje składowe są funkcjami ciągłymi, jedynym punktem, w którym ciągłość należy sprawdzić, jest $k = 1$. Mamy

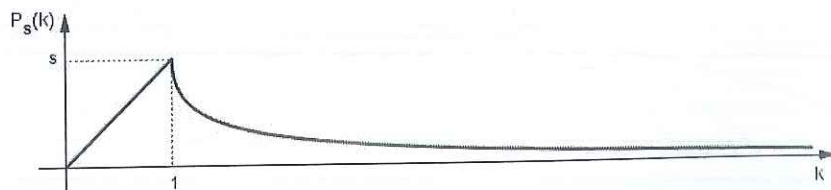
$$P_s(1) = s \cdot 1 = s,$$

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} P_s(k) = \lim_{k \rightarrow 1^-} sk = s \cdot 1 = s,$$

$$\lim_{k \rightarrow 1^+} P_s(k) = \lim_{k \rightarrow 1^+} s(k - \sqrt{k^2 - 1}) = s(1 - \sqrt{1^2 - 1}) = s.$$

Zatem granica rozważanej funkcji w punkcie $k = 1$ jest równa wartości tej funkcji w tym punkcie, więc funkcja $P_s(k)$ jest ciągła w argumentie 1. Ostatecznie funkcja $P_s(k)$ jest ciągła na całej swojej dziedzinie, co kończy dowód twierdzenia. ■

Poniżej przedstawiamy wykres funkcji $P_s(k)$.



Rysunek 5.2.

Bibliografia

- [1] K. Borsuk, W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972
- [2] R. Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001
- [3] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, Tom 1*, PWN, Warszawa 1972
- [4] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy, Funkcje jednej zmiennej*, PWN, Warszawa 1978